Produire ou reproduire des compétences mathématiques ?

L'exemple de la droite numérique

P. Stegen, M. Docquier, A. Di Fabrizio et F. Renier
Equipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques, Liège

Introduction

Dans cet article et dans des publications à venir, nous comptons vous faire part des enseignements qui se construisent au travers d'un dispositif de recherche collaborative. Par recherche collaborative, que faut-il entendre? Dans le cas présent, le concept de recherche collaborative traduit une volonté de réunir, au sein d'un même dispositif de recherche, des enseignants et des chercheurs autour de difficultés que rencontrent les élèves de ces enseignants dans la construction des compétences numériques. L'objectif pour le chercheur est double: d'une part, il s'agit de favoriser le développement professionnel des enseignants et, d'autre part, de viser le développement de connaissances sur les pratiques enseignantes.

Très concrètement, les questions qui réunissent les chercheurs et les enseignants dans le dispositif de recherche peuvent être formulées de la manière suivante:

- *que peut apporter la recherche en didactique des mathématiques à des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage de leurs élèves en matière de compétences numériques?*
- *quelles conséquences en dégager pour la construction de nouveaux outils didactiques?*

Cette réflexion sur les modalités d'association «enseignant – chercheur» s'inscrit dans le contexte particulier d'une école primaire francophone en profonde mutation. Les difficultés rencontrées par les élèves, les demandes de plus en plus fortes d'enseignants pour disposer d'outils didactiques adaptés aux exigences définies par les nouveaux programmes... ont pour conséquence d'accroître les demandes de retombées utilitaires de la recherche en didactique.

Dans le cas présent, le travail du chercheur ne consiste plus à fournir aux enseignants des propositions d'activités avec l'injonction de les mettre en application dans la réalité de leur classe. La perspective développée par la recherche collaborative contraint notamment le chercheur à créer les conditions nécessaires pour que les enseignants soient en mesure de construire avec lui une démarche susceptible de répondre à leurs besoins. L'enseignant ne doit plus être seul pour combler les vides du scénario dicté par les multiples réformes qui affectent sa profession et son rapport aux savoirs à enseigner.

Le dispositif actuel implique 8 enseignants [1] et leurs élèves, 3 directeurs d'école primaire [2], deux

1. Il s'agit de: Mesdames Curckovic (E.C. du Gros Chêne – Flémalle) et Dambiermont (E.C. Ans – Cité du Lonnay); Messieurs Bastin (E.C. J. Brouwir – Heure-le-Romain), Chatin (E.C. des Champs – Grâce-Hollogne), Distrée (E.C. de Comblain-la-Tour), Graindorge (E.C. des Cahottes – Flémalle), Kristof (E.C. de Bierset) et Spineux (E.C. de Villers-aux-Tours)

2. Madame A. Liben (E.C. d'Hermée), Madame Terlicher (E.C. de Bierset), Monsieur Ramquet (E.C. de Bierset)

inspecteurs cantonaux[3], un professeur de psycho-pédagogie[4] et ses étudiants... le tout coordonné par un chercheur[5] en didactique des mathématiques.

Le dispositif a débuté en mars 2000. Pour la rentrée de septembre 2000, il était prévu de mettre en place une épreuve diagnostique[6] chargée de faire le point sur les compétences numériques des élèves de 5e et de 6e primaire[7]... afin d'anticiper les difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves.

Cette épreuve porte essentiellement sur la maîtrise des nombres rationnels (fractions et décimaux). L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves lors de cette épreuve a amené l'équipe à réfléchir au mode de construction de la droite numérique, présentée souvent comme le référent indispensable à la compréhension des nombres décimaux. Comment les élèves situent-ils des nombres sur une droite graduée? L'analyse des productions des élèves nous permet d'apporter des premiers éléments de réponse à cette question.

Comment des élèves de 5e et 6e primaire situent-ils des nombres sur une droite numérique?

Pour rappel, l'épreuve diagnostique, dans laquelle s'insère l'item que nous allons vous présenter, s'est déroulée durant la seconde quinzaine du mois de septembre.

Présentation d'un item[8]

Voici une droite graduée.
Sur cette droite, le point B représente le nombre 1 ; le point C représente le nombre 4.

- Quel nombre représente la lettre D ?
- Quel nombre représente la lettre A ?
- Par quels nombres entiers, le nombre représenté par la lettre E est-il encadré ?

Présentation des réponses des élèves

Comme le montre le tableau suivant, les élèves interrogés n'éprouvent pas de grosses difficultés à identifier le nombre représenté par la lettre D.

3. Antoine Di Fabrizio et Francis Renier

4. Marcel Docquier et ses étudiants: Bailly Emilie; Dirick Geraldine; Dumarey Marjorie; Durieux Delphine; Gilson Pierre-Yves; Graindorge Isabelle; Iachini Emilie; Jadin Laurent; Marichal Joelle; More Nathalie; Mottard Amandine; Noel Severine; Pierard Arnaud; Parotte Rachel; Peeters Severine; Pirotte Virginie; Rasier Emilie; Seron Anthony; Tarantini Sabrina.

5. Pierre Stegen

6. Cette épreuve peut être téléchargée sur le site internet de la recherche à l'adresse suivante: http://139.165.54.66/recherche_collaborative/accueil.htm

7. Au total, une centaine d'élèves de 5e et une centaine d'élèves de 6e ont été interrogés. Ils se répartissent dans les 8 écoles dans lesquelles travaillent les enseignant avec lesquels nous collaborons.

8. Celui-ci est repris d'une évaluation réalisée par l'Observatoire de l'enseignement des mathématiques français (EVAPM).

Tableau 1 : ***Que représente la lettre D ?***

	% 5e	% 6e
7	*82*	*91*
Pas de réponse	5	1
5	3	1
6	3	1
8	3	5
3	1	2
Autres réponses	3	
	100	100

Il en va tout autrement pour l'identification du nombre représenté par la lettre A.

Tableau 2 : ***Que représente la lettre A ?***

	% 5e	% 6e
0	*79*	*73*
0.9	7	13
Pas de réponse	3	1
0.75	2	
2	2	2
0.5	1	3
0.1	1	3
0.7	1	
0.99	1	2
Autres réponses	3	3
	100	100

En ce qui concerne, la valeur de l'encadrement de la lettre E, on obtient les réponses suivantes :

Tableau 3 : ***Par quels nombres entiers, le nombre représenté par la lettre E est-il encadré ?***

	% 5e	% 6e
08-09	*34*	*62*
Pas de réponse	11	11
08-10	7	7
01-00	7	
08-05	7	6
07-05	3	
09	3	
07-08	2	
09-10	2	4
Autres réponses	24	10
	100	100

Premiers constats

Une première analyse de ces résultats bruts fait apparaître les constats suivants:

- La présentation et la formulation des consignes de cet item sont inhabituelles et ont peut-être entraîné des difficultés de compréhension pour les élèves.
- Les erreurs constatées se retrouvent dans toutes les classes.
- Manifestement des élèves éprouvent des difficultés à positionner le zéro sur la droite numérique. Est-ce la présence de graduations se trouvant à la gauche de A qui leur pose problème?
- Les élèves interrogés identifient difficilement les deux naturels qui encadrent un rationnel. Comprennent-ils le sens du terme «encadré»?

Quelles démarches de résolution ont été mobilisées par les élèves?

Pour tenter d'en savoir plus sur les démarches utilisées par les élèves pour produire ces réponses, nous avons mis en place un dispositif impliquant des élèves de la section primaire de la Haute Ecole Charlemagne de Liège.

Avec ceux-ci nous avons tenté d'identifier des démarches utilisées par les élèves pour produire leurs réponses. Après avoir réalisé également un travail d'analyse formative de cette épreuve diagnostique, les normaliens ont interrogé les élèves de deux classes de 5e et deux classes de 6e qui avaient participé à cette épreuve au départ du guide de questions suivant:

- Que te demandait-on de faire dans cet exercice?
- Comment as-tu procédé pour réaliser cet exercice?
- Comment ton enseignant t'a-t-il appris à le faire?
- As-tu éprouvé une difficulté? Si oui, laquelle?
- Penses-tu avoir réussi cet exercice?: très bien – bien – médiocrement – pas du tout. A quoi le vois-tu?

L'analyse de leurs rapports d'entretien fait apparaître les éléments suivants:

- Pour retrouver le nombre représenté par la lettre D, les élèves déclarent compter les graduations qui se trouvent entre 1 et 4 pour définir ainsi la valeur de l'intervalle. La formulation inhabituelle de cette question n'a, semble-t-il pas posé de problèmes aux élèves qui ont correctement identifié ce que l'exercice leur demandait de faire.

  On note toutefois que certains élèves répondent 5. Cette erreur s'est retrouvée dans les classes où les étudiants de l'école normale ont interrogé des élèves. Il apparaît, pour ces élèves, une confusion entre «lettres et chiffres». Pour eux, ce sont les lettres qui définissent la valeur de l'intervalle. Pour ces élèves, les intervalles qui séparent deux nombres ne doivent pas nécessairement être égaux.

- La deuxième partie de la question a posé de nombreux problèmes aux élèves. C'est un des rares items où les taux de réussite sont supérieurs en 5e (en soit, ce n'est pas significatif mais cela mérite d'être souligné). En fait, la plupart des erreurs produites en 6e relèvent d'une même logique: ***les élèves éprouvent de grosses difficultés avec le zéro, d'une part, et, d'autre part, ils considèrent que sur une droite numérique, les nombres entiers se situent à la droite et les nombres décimaux à la gauche du 0 ou du 1.***

Un des élèves que j'ai interviewé avait bien répondu à cette partie de la question ; il avait identifié que la lettre D représentait le nombre 7 et la lettre A, le nombre 0. Comme il avait commis une erreur au niveau de l'encadrement de la lettre E, je lui demande de placer tous les nombres sur ces droites numériques. A ma grande surprise, il a placé, à la gauche de la lettre A, les nombres « 0,1 », « 0,2 »... Je lui propose de continuer vers la gauche et il ajoute les graduations tout en continuant « 0,3 », « 0,4 », « 0,5 »...

Je lui demande alors si, sur une droite numérique, on procède toujours de la même façon. Il me répond affirmativement en précisant que « vers la droite, on met les nombres entiers et vers la gauche les nombres à virgule ».

Je lui demande alors de me dire quelle est la valeur de la lettre E. Il me répond « 9 ». Il a précisé, sur sa copie, que la lettre E est encadrée par les nombres « 8 » et « 10 ». Je l'interroge pour savoir s'il est sûr de sa réponse et après un temps de réflexion, il déclare s'être trompé. Je lui demande alors de se justifier et il me déclare que l'on doit faire plus 1 lorsque l'on progresse d'une barre et que la lettre E est placée juste au milieu entre deux barres ; ce n'est donc pas « 9 » mais « 8,5 ».

Je lui demande alors de me dire où se trouve le nombre « 2,5 ». Il le situe au bon endroit. Je lui demande de situer « 0,5 ». Il le place au bon endroit.

Je lui demande alors s'il ne s'est pas trompé car « 0,5 », il l'a placé tout à l'heure à la gauche du « 0 ».

Il hésite puis me déclare qu'il s'est trompé la première fois ; « 0,5 » se place bien juste au milieu de « 0 » et de « 1 ».

Je lui demande alors quels seraient les nombres qui se placent alors à la gauche du « 0 ». Il propose les nombres suivants : « 0,9 » ; « 0,8 »...

Cet exemple n'est pas anecdotique. Comme le montrent les résultats présentés en début d'article, l'identification du nombre désigné par la lettre A pose davantage de problèmes aux élèves de 6e qu'à ceux de 5e. Quand on regarde maintenant la nature des erreurs commises par les élèves, on constate que 22 % d'élèves de 6e considèrent que la lettre A désigne un nombre décimal compris entre 0 et 1. Autrement dit, ils adoptent un point de vue tout à fait comparable à celui qui vient d'être développé précédemment.

Ce raisonnement erroné se retrouve davantage en 6e qu'en 5e... quelle que soit la classe fréquentée par l'élève. En effet, lors de nos interventions dans les classes, nous nous sommes aperçus que de nombreux élèves partageaient cette conception erronée.

- Pour la troisième partie de la question 4, il apparaît que les élèves éprouvent des difficultés à comprendre la signification du terme « encadré ».
- Certains ne savent pas ce que cela veut dire ; ils savent encadrer un mot dans une phrase à analyser mais ne savent pas ce que veut dire « encadrer un nombre ». Ils tra-

vaillent par analogie avec l'analyse grammaticale et répondent n'importe quoi ou ne répondent pas.

- D'autres pensent que cela signifie «être juste au milieu» et produisent la bonne réponse sans avoir compris la question.

- On note aussi certains élèves qui considèrent que la lettre E désigne le nombre «9» ce qui explique qu'ils déclarent que la lettre E est encadrée par «8» et «10» ou «9» et «10» ou encore «9» selon qu'ils ont compris ou non la signification du terme encadré. A nouveau, pour ces élèves, on constate que l'échelle de graduation ne doit pas être nécessairement constante sur une même droite numérique.

Au-delà des constats, des hypothèses de travail à explorer...

L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves a conduit les membres de l'équipe de recherche à s'interroger sur la manière dont se construit la droite numérique à l'école primaire. Il est ainsi apparu que, dans les écoles concernées, la droite numérique sert de référent de base pour la construction des nombres de la première à la sixième primaire. Sur les murs de toutes les classes, on retrouve ce type de support pour situer des nombres d'un point de vue ordinal. Ce constat pourrait illustrer un bel exemple de continuité des apprentissages (un même support sert à placer des nombres entiers, puis des rationnels tout au long de leur construction par les élèves). Toutefois, les difficultés rencontrées par les élèves dans l'utilisation de ce support viennent nuancer ces propos. ***Comment se fait-il, en effet, que des élèves éprouvent autant de difficultés avec un support qui leur est familier depuis si longtemps?***

La réponse à cette question tient sans doute dans la manière dont les élèves rencontrent ce référent. En effet, si tous les enseignants de la première à la sixième l'utilisent, quel est, parmi eux, celui qui le construit réellement avec les élèves? L'enseignant du cycle 5/8? Sans doute, mais ses élèves sont-ils en mesure de comprendre notamment le pourquoi de la constance des intervalles?

Au cours de la troisième maternelle et en début de scolarité primaire, les élèves sont familiarisés avec le principe ordinal via des jeux de parcours qui préfigurent notamment une étude plus systématique au travers d'une bandelette numérique. Au delà de ce premier constat, l'équipe de recherche (enseignants et chercheurs) a travaillé au départ des questions suivantes:

- Comment l'enseignant de première année assure-t-il ce passage, cette rupture, entre deux supports fondamentalement différents: la bandelette numérique et la droite numérique?

- Pourquoi introduire si tôt la droite numérique? Est-elle vraiment indispensable?

- A ce niveau, les élèves étudient essentiellement des nombres entiers... soit des quantités discrètes. La bandelette numérique n'est-elle pas un support plus adapté au niveau de compréhension des élèves de cet âge et au type de nombres rencontrés?

- Plutôt que de leur imposer comme tel, un support dont ils ne peuvent comprendre les principes de construction, ne faut-il pas privilégier d'autres supports, comme la grille des 100 premiers nombres[9], qui va leur permettre de mieux appréhender les régularités des suites numériques et devenir un référent très appréciable pour affronter des opérations additives et soustractives?

- Un référent comme la droite numérique apparaît, dans le développement des compétences numériques des élèves, très utile et compréhensible au moment où les élèves découvrent les nombres rationnels qui vont leur permettre d'aborder des quantités continues. Ne faut-il dès lors pas aborder la construction de ce référent, en fin de cycle 8/10, lorsqu'il apparaît que les nombres rationnels ne peuvent être situés sur des bandelettes numériques... que ce support doit être abandonné au profit d'un autre?

Cette dernière hypothèse de travail a été privilégiée par l'équipe de recherche qui a décidé de poursuivre ses investigations dans deux directions:

- Comment aider les enseignants de 6e primaire confrontés à des élèves en difficultés avec la droite numérique et ne disposant pas d'assez de temps pour effectuer un long retour en arrière (re-médiation à court terme)?

- Dans une perspective plus globale, quelles activités mettre en place pour permettre aux élèves de construire, en cycle d'apprentissages, des droites numériques?

9. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de Sacré, A. & Stegen, P. (2000) *Savoir dénombrer et savoir calculer au cycle 5/8*, paru aux Editions Labor, des exemples d'activités:
   - pour construire, avec les élèves, des bandelettes numériques,
   - pour assurer la passage de la bandelette numérique à la grille des nombres.

Dans le prochain numéro de cette revue, nous détaillerons un ensemble d'activités que nous avons mises en place en collaboration avec les enseignants pour répondre à cette seconde question.

Pour terminer cet article, nous vous proposons un exemple d'activité expérimentée par les enseignants de 6e pour permettre à leurs élèves de s'approprier davantage les principes de construction d'une droite numérique. Cette activité, qui demande notamment aux élèves de construire des segments de droite, peut être utilisée comme outil diagnostique pour vérifier la compréhension de la droite numérique.

Un exemple d'activité

Titre de l'activité:

Sérier, comparer des nombres à virgule[10]

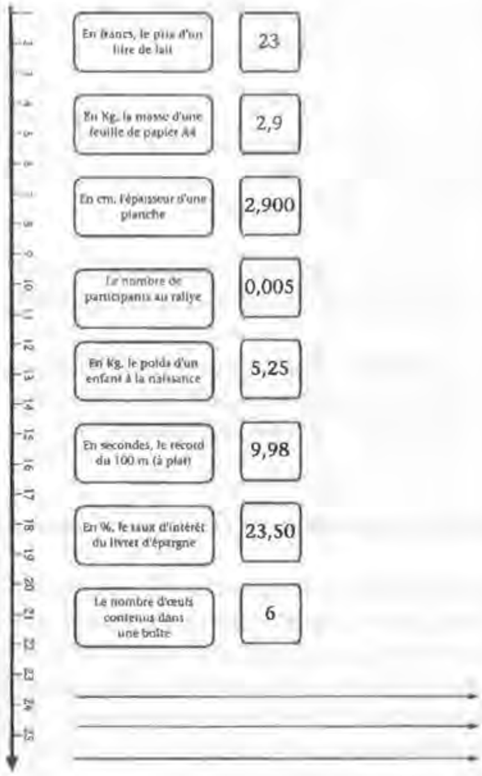
Objectifs:

- Repérer et situer des nombres sur une droite graduée.
- Connaître la signification de chacun des chiffres composant un nombre entier ou un nombre décimal.
- Rattacher l'utilisation des «nombres à virgule» à la réalité quotidienne.

Matériel:

- Une série de cartons-nombres et de cartons-grandeurs
- Une droite graduée de 0 à 25
- Des portions de droite sans aucun repère

10. Source: Roegiers, X. (1991, 3ème éd.), *Réseau Mathématique 5*, Bruxelles: De Boeck-Wesmael



Scénario de l'activité:

Phase 1 : association nombre-grandeur (Travail sur les» nombres de»)

- Présentation des deux séries de cartons à chaque élève en leur demandant d'associer chaque «carton-grandeur» à un «carton-nombre» (Phase individuelle).
- Mise en commun en groupes de 4 élèves maximum; les élèves doivent se mettre d'accord sur les hypothèses émises.
- Mise en commun générale, chaque groupe présente ses associations et les justifie.
- Discussion-réflexion sur le statut des nombres et sur la différence existant entre les nombres entiers et les nombres à virgule (Pourquoi avoir associé tel nombre plutôt que tel autre avec telle grandeur?)

Phase 2: positionnement sur la droite des nombres (en groupes)

- *Situation approximative*
  Les élèves travaillent sur une droite graduée de 0 à 25 et indiquent la situation approximative de chaque nombre. Le but est bien de situer les nombres les uns par rapport aux autres et non de les situer avec précision sur la droite numérique.
- *Vers une plus grande précision*
  Distribuer les morceaux de droite à découper en donnant la consigne suivante: «Pour chaque nombre à virgule, construis le morceau de droite qui te permet de le situer exactement».
- ***Synthèse provisoire***
  Discussion sur base des propositions de chaque groupe.

Quelques remarques sur la mise en place de cette activité

L'activité proposée doit être considérée comme une proposition de réponse, issue du champ de la recherche en didactique, à des difficultés d'apprentissage rencontrées par les élèves. Deux remarques s'imposent:

- dans notre esprit, cette activité ne peut être considérée comme une sorte de potion magique qui va permettre de résoudre, d'un coup de baguette, les difficultés rencontrées par les élèves;
- cette activité est présentée aux enseignants sous la forme d'un canevas général qui demande à être contextualisé, singularisé en fonction de la réalité de la classe et des pratiques de référence des enseignants.

Dans un article précédent[11], nous avons déjà mis

11. voir *Math-Ecole* no 194 «La préparation, un moment-clé pour la mise en place de nouvelles pratiques didactiques»

en évidence les ruptures introduites par nos propositions d'activité dans les pratiques de référence des enseignants. Dans cette perspective, pour les aider à mettre en place de telles activités, le dispositif de recherche prévoit les phases suivantes :

- *une préparation de la mise en place de l'activité avec l'enseignant* ; cette préparation est réalisée au départ des questions que nous avons déjà abordées lors de précédente publication ;
- *l'observation, par le chercheur, du déroulement de cette activité ;*
- *une analyse a posteriori menée au terme de l'activité.*

L'ensemble des informations développées au cours de ces trois phases est repris par le chercheur qui les synthétise sous la forme d'un compte rendu. Une fois celui-ci approuvé, amendé par l'enseignant, il est communiqué aux autres partenaires du dispositif afin de permettre des échanges et des réflexions sur les pratiques didactiques expérimentées.

Très concrètement, l'expérimentation de l'activité « Sériation, comparaison de nombres à virgule » fait apparaître deux moments délicats à gérer par l'enseignant :

- la synthèse de la première activité « association carton nombre – carton grandeur ;
- la construction de segments de droite précis pour placer les nombres lors de la deuxième partie de la seconde phase.

Phase 1 : association des deux types de cartons

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'association «carton nombre» / «carton grandeur» ne va pas de soi. Les élèves semblent parfois dépourvus des connaissances sociales nécessaires à la réalisation de cet exercice. A titre d'exemple, voici les propositions obtenues dans une classe de 6e.

Nombres affichés	Propositions des duos d'élèves
23,50	En francs, le prix d'une boîte de lait En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat
0,005	En kg, la masse d'une feuille de papier
5,25	En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat Le nombre de participants à un rallye
23	Le nombre de participants à un rallye
6	Le nombre d'œufs contenus dans une boîte
2,900	En kg, le poids d'un enfant à la naissance
9,98	En cm, l'épaisseur d'une planche En francs, le prix d'une boîte de lait En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire En secondes, le record du 100 mètres plat
2,9	En cm, l'épaisseur d'une planche En %, le taux d'intérêt d'un livret bancaire

Comment l'enseignant va-t-il valider ces propositions d'élèves? Est-ce à lui de dire quelles sont les associations correctes ou doit-il demander aux élèves de rechercher parmi leurs référents les associations correctes? Validation externe ou validation interne?

Phase 2: positionnement sur la droite des nombres

La première partie de cette activité ne pose pas de problème aux élèves. Ils sont tous capables de positionner approximativement ces nombres sur une droite numérique graduée de 0 à 25. Dans le contexte d'une droite graduée déjà construite, ils identifient les nombres entiers qui encadrent les nombres rationnels à placer. Ils précisent, par exemple, que:

- «23,5» se place juste au milieu entre 23 et 24;
- «9,98» se place pratiquement à côté de 10...

Les choses se compliquent quand l'enseignant leur demande de situer le plus précisément possible un de ces nombres sur un segment de droite qu'ils doivent construire.

Ainsi, par exemple, après avoir constaté qu'il n'est pas possible de situer précisément «9,98», sur la droite graduée de 0 à 25, l'enseignant distribue un segment de droite «vierge» aux élèves et leur demande de placer le plus précisément possible ce nombre. Des élèves peuvent éprouver beaucoup de difficultés pour produire d'autres démarches que celle qui consiste à graduer les segments tous les cm et... reproduire, ainsi, un segment comparable à celui de l'activité précédente.

En français, il y a 9 solutions pour le premier cas mais on se rend bien vite compte qu'il est inutile de chercher de la commutativité avec 2 x QUATRE = HUIT.

b)

	D	E	U	X
	D	E	U	X
	D	E	U	X
+	D	E	U	X
	H	U	I	T

En italien, c'est à peu près pareil, il y a trois solutions pour le premier cas.

c)

		D	U	E
		D	U	E
		D	U	E
+		D	U	E
	O	T	T	O

(Solutions dans le prochain numéro)