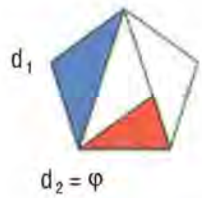
Approche géométrique du calcul matriciel

Jean Bauer
Trigam SA, Neuchâtel

Nous avons regardé lors de deux précédents articles comment illustrer géométriquement la suite de Fibonacci ou les nombres irrationnels sous forme de jeux. Nous abordons ici un aspect inattendu que nous proposent ces jeux, à savoir une illustration concrète du calcul matriciel. Notre ambition est de montrer qu'une voie ludique vers l'algèbre linéaire est tout à fait possible en assemblant des triangles isocèles.

Cas N = 5 (pentagone)

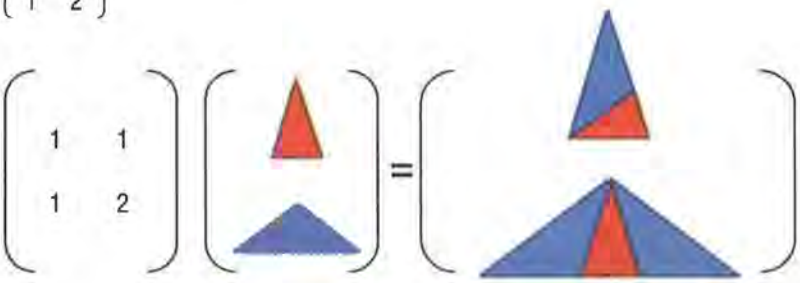


Nous considérons les 2 isotriangles du pentagone comme les composantes d'un vecteur.

(Rappel : les diagonales – ou leurs mesures – d_n sont issues d'un même sommet et relient tous les autres. d_1 correspond au côté du polygone régulier de longueur normalisée à 1, d_2 est la diagonale qui relie deux sommets qu'on rejoint par 2 côtés successifs…)

En lui appliquant la matrice M, ce vecteur est agrandi d'un facteur φ, nombre d'or pour les côtés (φ^2 pour les surfaces),

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



La matrice M est le carré de la matrice M_0

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_0} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{M}$$

On peut calculer

$$M_0^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \qquad M_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_0^{-n} = \begin{pmatrix} (-1)^n F_{n+1} & (-1)^{n+1} F_n \\ (-1)^{n+1} F_n & (-1)^n F_{n-1} \end{pmatrix}$$

Où les F_n sont les nombres classiques de Fibonacci

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	...
1	1	2	3	5	8	13	

Rappelons la formule : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Calculons maintenant $| M_0 - \lambda I | = 0$ pour obtenir les valeurs propres de la matrice M_0

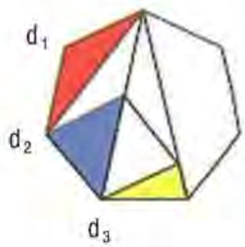
$$| M_0 - \lambda I | = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

L'équation obtenue est la relation algébrique du nombre d'or π avec les solutions :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \varphi \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618\ldots = -1/\varphi$$

Le formalisme matriciel va nous permettre d'illustrer un aspect d'algèbre linaire d'une manière géométrique pour d'autres valeurs de N. Prenons par exemple

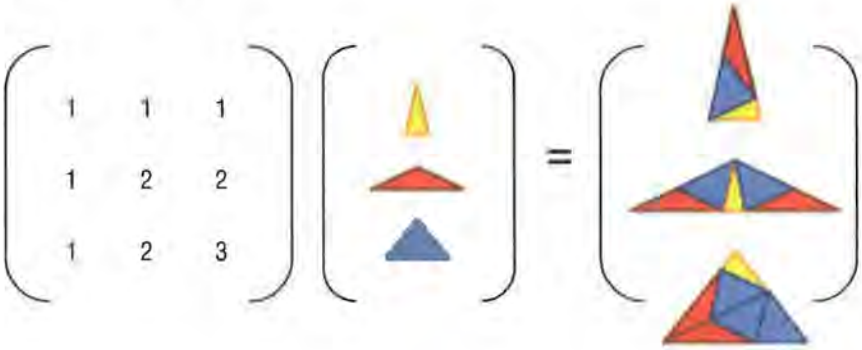
N = 7 (heptagone)



Considérons maintenant les 3 isotriangles de l'heptagone comme composantes du vecteur et appliquons lui la matrice M:

Le facteur d'agrandissement est cette fois de d_3 pour les côtés (d_3^2 pour les surfaces).

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



La matrice M est le carré de la matrice M_0 suivante:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{car:} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{M_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{M}$$

et en calculant: $|M_0 - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

Il en sort l'équation: $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

dont une des solutions est: $\lambda_1 = d_3 = 2{,}247\ldots$

La matrice inverse de M_0 est M_0^{-1}:

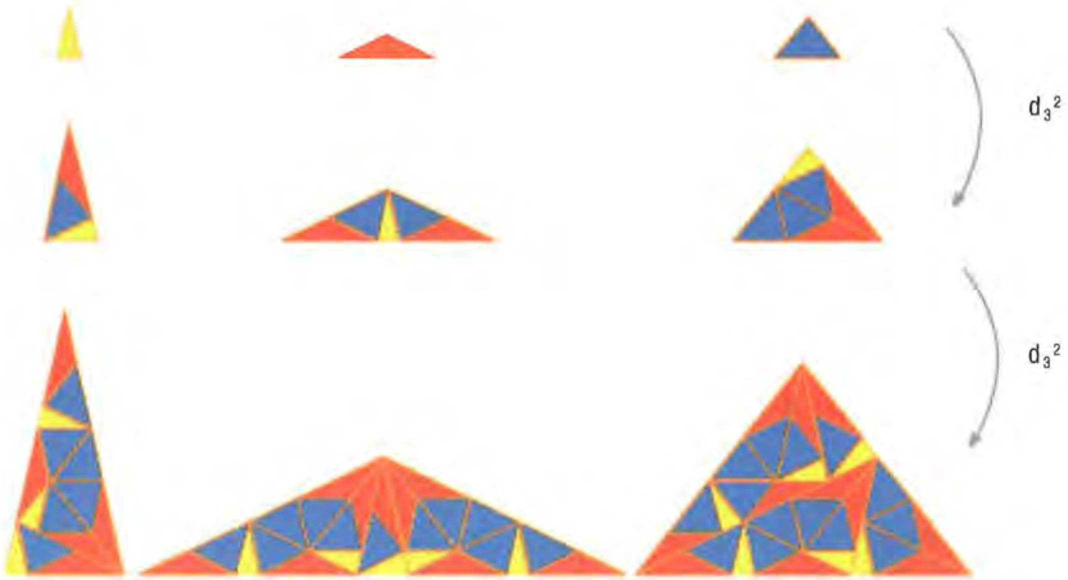
$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{tel que } M_0^{-1} M_0 = I$$

en calculant le déterminant de cette matrice:

$$| M_0^{1} - \lambda I | = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \qquad \text{On en tire } \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

dont une des solutions est: $\lambda_1 = 1/d_3 = 0{,}445\ldots$

Les nombres de Fibonacci étendus e_n, f_n, g_n sont donnés en comptant le nombres de triangles (lorsque l'aire est agrandie de $d_3{}^2$).



e_n f_n g_n

On peut alors considérer un tableau de 3 colonnes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 14 & 25 & 31 \\ 70 & 126 & 157 \\ 353 & 636 & 793 \\ 1782 & 3211 & 4004 \\ 8997 & 16212 & 20216 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & f_n & g_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$e_n = e_{n-1} + f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$f_n = e_n + f_{n-1} + g_{n-1}$$

$$g_n = f_n + g_{n-1}$$

$$\frac{e_n}{e_{n-1}} \to \frac{f_n}{f_{n-1}} \to \frac{g_n}{g_{n-1}} \to d_3^2 \text{ si } n \to \infty$$

$$\frac{f_n}{e_n} \to d_2 \text{ si } n \to \infty$$

$$\frac{g_n}{e_n} \to d_3 \text{ si } n \to \infty$$

$$\boxed{e_n^2 + f_n^2 + g_n^2 = e_{2n}}$$

$$\boxed{e_n e_{n+1} + f_n f_{n+1} + g_n g_{n+1} = e_{2n+1}}$$

$$e_{n-1} e_{n+1} + f_{n-1} f_{n+1} + g_{n-1} g_{n+1} = e_{2n}$$

Il est possible d'exprimer les coefficients de M (pour N = 7) avec les nombres de Fibonacci étendus comme ci-dessous :

$$M_0^2 = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_0^{2n} = M^n = \begin{pmatrix} e_n & f_n & g_n \\ f_n & e_n + g_n & f_n + g_n \\ g_n & f_n + g_n & e_n + f_n + g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_n & U_n & V_n \\ U_n & Y_n & W_n \\ V_n & W_n & Z_n \end{pmatrix}$$

Ainsi en assemblant des triangles isocèles dont les côtés isocèles sont identiques et dont les angles sont des multiples de π/N on arrive à illustrer géométriquement la structure nécessaire à la résolution de système d'équations linaires.

Ce sujet se trouve détaillé dans le livre « Au delà du nombre d'or » qui est à disposition sur CD-Rom, que vous pouvez vous procurer auprès de Trigam SA, Neuchâtel, CH, tél. 032 721 28 38 et qui donne de très nombreux exemples de jeux simples également à disposition permettant de faire comprendre aux élèves les multiples ponts qu'il y a entre différents domaines mathématiques.

Exposition Rivages Mathématiques

Le numéro spécial de la revue *Hypercube 32/33*, (voir p. 3 de couverture) est le catalogue de l'exposition *Rivages mathématiques* qui comprend dix expériences sur des thèmes qui, historiquement, se sont développés « autour de la Méditerranée » :

- Les poids de Babylone (bases de numération, Mésopotamie)
- La pierre angulaire (tronc de pyramide, Egypte)
- Thalès en un clin d'œil (triangles homothétiques, Grèce)
- Nombres figurés (conception du nombre, Grèce)
- Pavages magiques (carrés magiques, Islam)
- Pythagore en pièces (théorème de Pythagore, Grèce)
- Kwarizmath (équations, Islam)
- Trois carrés en un (démonstration et somme de carrés, Islam)
- L'escalier de Leonardo (suite de Fibonacci, Moyen-âge)
- Curieux carrelages (pavages, Islam)

Une exposition pour animer votre collège, un club, une fête des mathématiques...

L'exposition a été présentée dans le cadre du festival *Sciences et Cité* à Neuchâtel (Voir *Math-Ecole* no 197) puis à la *Nuit de la Science* et au Musée des sciences de Genève, en 2001 et au début de cette année. Elle est désormais à disposition des écoles ou d'autres institutions qui désirent faire connaître les mathématiques de manière dynamique.

Matériel à disposition : 5 triptyques recto-verso (15 panneaux, quadrichromie), à poser sur des tables : longueur 120 cm, largeur et hauteur 80 cm, matériel en bois, métal et plastique, représentant 10 postes de travail. Des fiches complémentaires et un « dossier pédagogique » accompagnent chaque expérience.

Les 10 postes occupent 5 grandes tables, dans un espace de 40 m^2 environ. Le matériel est contenu dans deux caisses de 30 kg : 90 x 15 x 65 et 80 x 37 x 60.

Location : CHF 350.- pour deux semaines + transports et assurance. Ce prix comprend un exemplaire de la revue *Hypercube 33/34*, un exemplaire des fiches, pour photocopie et 50 exemplaires du guide-visiteurs.

Réservation : SENS www.abord-ch.org/sens