Une séquence d'activités pour construire la droite numérique au cycle 10/12

Pierre Stegen,
Serge Chatin[1], Jean-Pierre Distrée[2],
Raymond Kristof[3] et Bernard Spineux[4]
Equipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques
Service de Didactique générale (ULg)

*Dans le numéro précédent[5], nous avons évoqué les difficultés rencontrées par des élèves dans l'utilisation de la droite numérique. A cette occasion, nous nous sommes interrogés sur la manière dont les élèves rencontraient ce référent. Pour illustrer cette réflexion, nous avons présenté une activité «**Sérier, comparer des nombres à virgule**». Celle-ci peut être utilisée par l'enseignant du degré supérieur pour vérifier le degré de maîtrise de ce référent par les élèves.*

Nos allons cette fois vous présenter une séquence d'activités[6] dont l'objectif est de permettre aux élèves de construire personnellement leur propre droite numérique. Dans un premier temps, nous présenterons le canevas général de l'activité tel qu'il a été proposé aux enseignants de l'équipe de recherche collaborative. Dans un second temps, nous détaillerons des éléments mis en évidence par les enseignants lors de l'analyse a posteriori des activités expérimentées. Ces éléments sont regroupés sous l'intitulé «analyse a priori» qui suit la présentation du canevas de la séquence.

Dans le prochain numéro, nous détaillerons une suite d'activités destinées à aider les élèves du cycle 8/10 à construire le passage de la bandelette numérique à la droite numérique.

Activité 1: construire et utiliser une droite numérique

Objectif:

Construire et utiliser une droite graduée pour situer des nombres entiers.

Organisation:

Phase de travail individuel ou en duo.

Matériel:

Une demi-droite tracée au tableau sur laquelle les nombres 0, 1 et 2 sont déjà placés.

Chaque élève (ou chaque duo d'élèves) reçoit une bandelette de papier sur laquelle la même droite numérique est représentée.

1. Ecole communale des Champs de Grâce-Hollogne
2. Ecole communale de Comblain-la-Tour
3. Ecole communale de Bierset
4. Ecole communale de Villers-aux-Tours
5. P. Stegen, M. Docquier, A. Di Fabrizio et F. Renier (2001). Produire ou reproduire des compétences mathématiques? L'exemple de la droite numérique. *Ecoles des années 2000*, repris dans *Math-Ecole* no 202, juin 2002, pp 32-41
6. Cette séquence est une adaptation de celle développée par ERMEL (1999). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2*. Paris : Hatier.

Consignes:

- Demander aux élèves de placer, sur leur droite numérique, les traits correspondant aux nombres 3 et 4 *sans mesurer*.

Mise en commun:

- Confronter les différentes productions des élèves au départ de la question: « comment avez-vous procédé ? »
- Valider les démarches appropriées (pliage, utilisation du compas, ...).

Possibilité de prolongement:

Pour vérifier le degré de compréhension de ses élèves, l'enseignant peut donner comme consigne complémentaire de situer, sur la droite numérique représentée sur le tableau noir, les nombres 3 et 4.

Analyse a priori

Cette situation oblige les élèves à recourir au pliage pour situer précisément des nombres entiers sur une droite numérique. Cette stratégie n'est pas habituelle pour eux ; ils n'y pensent pas spontanément. Dans un premier temps, il est vraiment important de laisser les élèves chercher seuls (ou à deux) et de ne pas intervenir pour valider ou invalider des stratégies d'élèves (tout en maintenant l'interdiction du recours au mesurage). C'est lors de la phase de mise en commun que l'enseignant et les élèves doivent confronter la pertinence et la validité des démarches utilisées.

Pour faciliter l'organisation et la gestion de cette phase, il peut être plus intéressant de fonctionner comme suit:

- Dans un premier temps, demander aux élèves de travailler seuls pour situer le plus précisément possible les nombres 3 et 4 ;
- Dans un second temps, regrouper les élèves en duos et leur demander de confronter leur démarche et de se mettre d'accord sur une proposition.

Cette façon de procéder permet de diminuer le nombre de propositions d'élèves à gérer lors de la phase de mise en commun.

Au niveau des ***variables didactiques***[7] de cette situation, il convient de remarquer que le 0 n'est pas placé exactement au bord de la droite numérique. Les élèves doivent tenir compte de cette contrainte avant d'effectuer le pliage qui définit la valeur de l'intervalle à reporter pour situer 3 et 4.

Le choix des nombres à situer sur cette droite numérique définit également les variables didactiques de cette situation. Dans la description de l'activité, nous proposons de placer les nombres 3 et 4. Il est possible de modifier ces variables didactiques pour différencier les tâches des élèves en les adaptant

7. Pour rappel, une variable didactique se définit comme un élément de la situation qui peut être modifié par l'enseignant. Cette modification a pour conséquence d'affecter la hiérarchie des stratégies de solutions que l'élève doit mettre en place.

à leur degré de maîtrise des compétences numériques. Ainsi, on peut demander à certains élèves de placer les nombres 3 et 4 et, à d'autres, les nombres 6 et 7 ou 8 et 9 ou, encore 4 et 9.

Même si cela peut paraître tentant, nous proposons à ce niveau de ne pas situer des nombres décimaux (du type 3,5 ou 4,5) afin de ne pas anticiper sur la suite des apprentissages. En effet, la séquence d'activités est construite sur la progression suivante: situer des nombres entiers, situer des fractions décimales puis seulement des nombres décimaux.

Si des élèves ont rapidement accompli cette consigne de placer les nombres 3 et 4, l'enseignant peut leur demander de placer des nombres plus grands comme 5 et 8 par exemple de manière à gérer au mieux les rythmes de travail de ses élèves.

L'***activité de prolongement*** oblige les élèves à changer de stratégies ; ici, il n'est pas question de plier le tableau pour reporter la valeur d'un intervalle. D'autres stratégies doivent être proposées par les élèves comme l'utilisation d'une bandelette étalon, d'un compas...

Activité 2: construire et utiliser une droite numérique (suite)

Objectif:

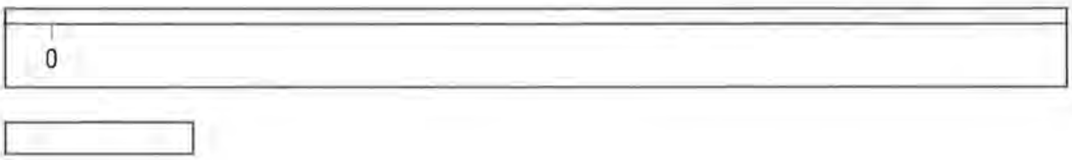
Construire une graduation en reportant, un dixième de l'unité.

Organisation: phase de travail en duo.

Matériel:

Chaque duo reçoit :

- une bandelette de 2 mètres sur 3 ou 4 cm (un morceau de rouleau de calculatrice ou des bandes de papier listing de 4 cm de large) sur laquelle le zéro est déjà placé ;
- une bandelette (étalon) de 5 cm sur 1 cm.



Consigne:

Demander aux élèves de situer 1 sur cette droite numérique en précisant que la longueur de la petite bandelette vaut 1/10. Placer cette dernière au tableau en écrivant à côté sa valeur.

Mise en commun:

La phase de mise en commun doit permettre de faire apparaître que pour placer le nombre 1, il s'agit de reporter dix fois la petite bande (dans le sens de la longueur) car dans une unité, il y a 10 dixièmes.

Possibilité de prolongement:

Demander aux mêmes duos de placer le nombre 2.

Analyse a priori

Pour situer le nombre 1 sur la droite numérique, les élèves doivent, cette fois, reporter 10 fois la valeur de l'étalon fixée à 1/10.

Les ***variables didactiques*** sont définies par ces deux nombres (1 et 1/10). Il importe de bien présenter le dixième aux élèves en le mettant dans le sens de la longueur (en l'affichant au tableau, par exemple). Lors de la phase d'expérimentation, il est apparu que certains élèves reportaient dix fois la hauteur de la bandelette étalon.

A nouveau, il convient ici aussi de laisser les élèves travailler seuls et d'observer les démarches qu'ils utilisent en ne les corrigeant pas (c'est le rôle de la phase de mise en commun). Certains risquent de confondre le dixième avec l'unité: ils ne reportent qu'une fois le dixième. La plupart des élèves reportent 10 fois le dixième pour obtenir l'unité. On note aussi, parfois, certaines stratégies plus économiques et plus expertes: des élèves reportent 5 fois le dixième puis reportent une seconde fois cet intervalle de 5/10.

Lors de la ***phase de mise en commun***, les élèves explicitent leurs démarches (comment avez-vous procédé ? »). Il est important à ce moment de leur demander de mathématiser leurs manipulations au travers d'écriture du type « $1 = 10 \times 1/10$ ou $1 = (5 \times 1/10) \times 2$ » et de noter ces mathématisations au tableau. Elles servent de support au raisonnement des élèves et permettent de leur faire prendre conscience des possibilités de communication offertes par le formalisme mathématique.

Si nous recommandons à l'enseignant de ne pas intervenir au cours de la phase de recherche des élèves, il importe pour lui de bien repérer les démarches utilisées par les élèves et l'ordre dans lequel il va demander aux élèves de venir expliquer leur démarche.

La validation se fait par comparaison des différentes productions des élèves (affichage au tableau).

Au terme de cette première phase de mise en commun, l'enseignant demande aux élèves de placer le nombre 2 sur cette droite. Cela lui permet d'analyser le degré d'expertise des procédures développées par les élèves: vont-ils à nouveau reporter 10 fois le dixième au départ du nombre 1 pour situer 2 (procédure la plus simple mais la moins économique) ou, au contraire, vont-ils directement reporter la mesure de l'écart entre 0 et 1, par pliage, pour situer 2 ? Si cette dernière stratégie est utilisée par les élèves, il faut à nouveau noter que le 0 n'est pas situé au début de la bandelette; cela risque d'induire les élèves en erreur dans le travail de pliage et de report de la valeur de l'intervalle compris entre 0 et 1.

Activité 3: utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux dixièmes)

Objectif:

Placer des fractions décimales (exprimées en dixièmes) sur la droite graduée construite lors de l'activité précédente.

Organisation:

Phase de travail en duo (cf. activité 2).

Matériel:

Le matériel est identique à celui de la phase précédente sauf que cette fois les élèves ont gradué leur droite et que les nombres 0, 1 et 2 sont placés.

Consignes:

Placer sur la droite la fraction 8/10.
Placer sur la droite la fraction 25/10.

Mise en commun:

Lors de la phase en commun, demander aux élèves de justifier leurs démarches et mathématiser les démarches utilisées au travers des expressions suivantes:

$8/10 = 1 - 2/10 = 8 \times 1/10$

$25/10 = 2 + 5/10 = 3 - 5/10 = 25 \times 1/10$

Analyse a priori

Il s'agit cette fois de placer des fractions décimales sur la droite numérique. La technique reste identique; les élèves ont à leur disposition la bandelette étalon valant un dixième. Toutefois, le choix des nombres à placer 8/10 et 25/10 n'est pas le fruit du hasard et il importe, pour l'enseignant de bien observer les stratégies développées par ses élèves. Pour placer 8/10, les élèves ont le choix de reporter 8 fois la bandelette étalon ou de partir d'une unité et de soustraire 2 dixièmes.

Pour 25/10, les stratégies sont encore plus diversifiées; il se peut que des élèves procèdent en pliant en deux l'intervalle existant entre 2 et 3 ou, au contraire, ils reportent 5 fois la bandelette 1/10 entre 2 et 3. Lors de la phase d'expérimentation, on a même vu un élève qui reportait trois fois, par pliage, la valeur de l'intervalle compris entre 0 et 8/10 puis ajoutait un dixième.

Dans cette perspective, il est sans doute plus intéressant de procéder à une phase de mise en commun après avoir placé 8/10, puis de proposer de placer 25/10.

Lors de ces phases de mise en commun, il est important à nouveau de mathématiser les stratégies des élèves sous la forme des équivalences reprises dans la description du canevas de l'activité.

Activité 4: utiliser une droite numérique pour situer des fractions décimales (limitées aux centièmes)

Objectif:

Placer des fractions décimales (exprimées en centièmes) sur la droite graduée construite lors de l'activité précédente.

Organisation:

Cf. phase précédente.

Matériel:

Cf. phase précédente.

Consigne:

Vous avez trouvé des moyens pour placer exactement 8/10 et 25/10. Placez maintenant exactement 135/100.

Mise en commun

Faire préciser par les élèves les différentes démarches qu'ils ont utilisées et les comparer.

Prolongation:

Pour s'assurer de la bonne compréhension des élèves, on peut leur demander de placer des fractions telles que 205/100 et 40/100 à l'aide des instruments ainsi construits.

Analyse a priori

Toujours au départ du même matériel, les élèves doivent cette fois positionner une fraction décimale exprimée en centièmes. Le matériel à leur disposition ne leur permet pas de réaliser cette tâche; la bandelette étalon représente un dixième. Toutefois, la variable didactique «placer le nombre 135/100» a été définie de manière à rendre possible cette tâche au départ de deux stratégies différentes

- établir que 135/100 se trouve juste au milieu de l'intervalle compris entre 13/10 et 14/10. L'élève doit donc repérer sur la droite numérique l'intervalle compris entre les bornes 13 dixième et 14 dixièmes et partager cet intervalle en deux. Pour effectuer ce positionnement, il doit avoir établi que 13/10 est égal à 130/100 et 14/10 à 140/100.

- Plier en deux, la bandelette étalon, de manière à obtenir 5/100 (et établir ainsi que 1/10 = 10/100 et que 1/10 : 2 = 5/100) puis positionner cette demi bandelette au départ de 13/10 ou de 14/10 après avoir également établi que 13/10 est égal à 130/100 et 14/10 à 140/100.

Cette démarche de positionnement est très importante. Elle permet aux élèves de prendre conscience de ruptures existant entre les entiers et les rationnels:

- ***l'idée de succession***: un naturel a un successeur (le successeur de «7» est «8»). Cette idée n'a évidemment pas de sens pour les décimaux. Ainsi, quel est le successeur de «21/10»? «22/10» ou «211/100»?

- ***les problèmes d'intercalation***: entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il existe une infinité de décimaux.

Lors des phases de mise en commun qui suivent le positionnement de 8/10 et de 25/10, il importe de mathématiser les différentes relations construites par les élèves sous la forme
1 = 100/100
1/10 = 10/100
1/10 : 2 = 5/100
135/100 = 1 + 35/100 = 13/10 + 5/100 = 14/10 – 5/100 ...
35/100 = 4/10 – 5/100
L'activité de prolongement permet de conduire aux nouvelles égalités suivantes:
205/100 = 2 + 5/100
40/100 = 4/10

Au terme de ces activités, l'enseignant peut institutionnaliser le savoir ainsi construit sous la forme suivante:

Dans une unité, il y a 10 dixièmes: 1 = 10/10
Dans une unité, il y a 100 centièmes: 1 = 100/100
Dans un dixième, il y a 10 centièmes: 1/10 = 10/100

A l'issue de cette étape, l'enseignant demande aux élèves de tracer sur la droite graduée des élèves tous les dixièmes compris entre 0 et 2 et de graduer, à l'aide d'une latte, l'étalon d'un dixième en 10 centièmes.

A ce moment, les élèves ont construit un référent qui va leur permettre de situer des fractions décimales et des nombres décimaux.

Activité 5: placer des nombres décimaux sur une droite numérique

Objectifs:

Etablir un lien entre écriture en fractions décimales et écritures à virgule.

Savoir situer des nombres décimaux sur une graduation, les décomposer en somme de partie entière et de fractions décimales.

Passer de l'écriture à virgule à des écritures à l'aide de fractions décimales et inversement.

Connaître la signification des chiffres dans une écriture à virgule, l'utiliser pour lire des nombres décimaux.

Organisation:

Phase de travail individuel puis en duo.

Matériel:

Les élèves disposent de leur grande bande graduée en dixièmes et d'une bande d'un dixième graduée en centièmes (construites précédemment).

Consignes:

- Demander aux élèves de placer 1,7 sur cette graduation (d'abord individuellement puis comparaison en duo).
- En fonction des réponses produites par les élèves, leur demander de placer 2,03 et 1,235.

Mise en commun

La mise en commun doit permettre:

- d'utiliser la notation fractionnaire pour donner du sens aux chiffres des écriture à virgule et pour traduire les relations entre le millième et l'unité; le centième et l'unité, le dixièmes et l'unité:

  1,7 = 1 + 7/10
  2,03 = 2 + 3/100
  1,235 = 1 + 235/1000
  1,235 = 1 + 2/10 + 3/100 + 5/1000
  1 = 1000/1000
  1 = 100/100;

- de donner du sens au terme millième;
- de donner un sens précis à la lecture des écritures à virgule («deux unités trois centièmes» et non «deux virgule zéro trois»).

Prolongements:

Les élèves reçoivent le tableau ci-dessus qu'ils vont devoir compléter ligne par ligne. Le maître précise que la partie entière d'un nombre est le nombre d'unités contenues dans ce nombre et qu'une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000...

Ecriture avec les mots unité, dixième, centième, millième	Ecriture à virgule	Somme de la partie entière et de la fraction décimale	Fraction décimale
	2,22		
Sept centièmes			
		203 + 8/1000	
			275/100
	92,120		

Autres exercices de prolongement

1. Ecrire avec une virgule les nombres suivants: 3/100; 23/10; 75/100; 108/100; 1/1000; 1/2...
2. Ecrire avec une fraction décimale: 12,7; 0,7; 1,03; 63,142...
3. Ecrire en utilisant les mots dixième, centième, millième: 9,05; 70,103; 502,25; 0,5; 0,75; 0,001...

4. Ecrire à l'aide d'une somme comportant la partie entière et une ou plusieurs fractions décimales : 2,27 ; 1,5 ; 91,25 ; 632,50 ; 632,05…

5. Jeux de portrait…
J'ai un dixième de plus que 2,35 ; qui suis-je ?
J'ai un centième de moins que 142,375 ; qui suis-je ?

Analyse a priori

Il s'agit donc cette fois pour les élèves de placer des nombres décimaux sur la droite graduée. L'objectif est de les amener à établir des liens entre écriture fractionnaire et écriture décimale d'un rationnel. Ce passage peut être source d'erreurs :

- ainsi, certains élèves peuvent interpréter 1,7 comme 1,07 (soit la décomposition suivante : 1 + 7/100).
- D'autres traduiront 1,235 par 3,35 (soit la décomposition 1 + 235/100).

Pour placer ce dernier nombre, les élèves doivent adopter une stratégie semblable à celle développée précédemment lorsqu'il s'agissait de passer des dixièmes aux centièmes. Ce travail permet de poursuivre la réflexion sur les phénomènes d'intercalation définis précédemment : 1,235 = 1 + 2/10 + 3/100 + 5/1000. Pour trouver 5/1000, on partage 1/100 en deux parties égales.

Toutes ces manipulations doivent être soutenues par une écriture mathématique au tableau. Au terme de cette activité, la première possibilité de prolongement permet de systématiser cette mise en relation entre écriture fractionnaire et écriture décimale.

La correction doit se faire ligne par ligne et faire apparaître, si possible, que dans certaines cases, on peut obtenir plusieurs réponses.

Au terme de cette activité, l'enseignant peut procéder à une institutionnalisation du savoir sous la forme :

$$2,15 = 2 + 15/100 = 2 + 1/10 + 5/100 = 215/100$$

2	,	15
partie entière de 2,15		partie décimale de 2,15