69

MATH ECOLE

1975 SEPTEMBRE
14e ANNÉE

MATH ECOLE 69

14e ANNÉE SEPTEMBRE 1975

Vues rétro-prospectives

Propos tenus par certaines des personnalités qui se sont exprimées dans «Math-Ecole» depuis les origines. Ces propos ont été recueillis pour présenter la revue aux visiteurs de l'exposition de matériels d'enseignement qui eut lieu cet été à Neuchâtel à l'occasion du 84e cours normal de la Société suisse de travail manuel et de réforme scolaire.

- Que l'initiation mathématique soit adaptée aux opérations intellectuelles caractéristiques des différents stades du développement de l'enfant.
  Bureau international d'Education — Numéro 3, septembre 1962

- *L'intelligence est un système d'opérations, toutes les mathématiques sont des systèmes d'opérations.*
  Jean Piaget — Numéro 4, octobre 1962

- Les différents matériels disponibles rendent possible l'apprentissage de certains concepts à un plus grand nombre d'enfants.
  Zoltan-P. Dienes — Numéro 8, mai 1963

- *L'habitude que prennent les élèves très jeunes d'être toujours prêts à rencontrer l'inconnu fait que la mathématique devient éducatrice au sens large.*
  Caleb Gattegno — Numéro 10, novembre 1963

- Dès qu'ils savent, ils ne font plus de mathématiques; le savoir bouche la pensée. Savoir peu, pouvoir beaucoup.
  Madeleine Goutard — Numéro 11, janvier 1964

- *Raisonner, c'est combiner, enchaîner des énoncés pour arriver, partant d'un point de départ, constats de faits ou énoncés «acceptés», à des conclusions qui peuvent être posées sans recours à de nouveaux constats.*
  Pierre Oléron — Numéro 14, septembre 1964

- Nous sommes au XXe siècle. Pourquoi donc nos enfants, dont beaucoup verront le siècle suivant, n'auraient-ils droit qu'à l'état de conscience du XVIIIe siècle, et encore dans le meilleur des cas ?
  Jean-Blaise Grise — Numéro 23, mai 1966

- *Le degré de culture d'un pays se mesure, aujourd'hui, au niveau mathématique de ses habitants.*
  André Lichnerowicz — Numéro 29, septembre 1967

Planchettes à clous et géométrie spontanée d'enfants de 9 à 11 ans

par Gisèle Dronne et Simonne Sauvy

La belle et substantielle revue «Activités, recherches pédagogiques» (ARP) de Paris dont Math-Ecole a souvent signalé des articles qui se recommandaient par leur valeur mathématique et pédagogique, cette revue, victime de la misère de l'heure, a dû cesser de paraître. Math-Ecole le regrette profondément car c'est une voix qui se tait au moment même où il faudrait continuer à informer enseignants, administrateurs et parents afin de les gagner à une cause. Celle-ci étant moins celle de la «math moderne» que celle de la mise en valeur de toutes les possibilités des enfants, qui sont grandes, plus grandes qu'on le croit, plus grandes qu'on ne veut le croire.

Madame Simonne Sauvy était directrice de la Revue et qui a déjà collaboré à Math-Ecole (voir notamment le numéro 65, novembre 1974), a spontanément offert à notre bulletin l'article sur les «Planches à clous» *qu'elle avait composé avec Gisèle Dronne pour sa propre revue. Math-Ecole reçoit ce cadeau avec une reconnaissance émue et souhaite pouvoir mettre souvent ses pages à la disposition de ceux qui cherchent un lieu où s'exprimer.*

S.R.

En début d'année, au cours d'une séance de travail avec des collègues de l'école [1] et le concours de l'équipe ARP, nous arrêtons les grandes lignes d'un programme de travail centré sur la *planchette à clous.*

Nous nous proposons en effet, au cours de l'année qui commence, d'exploiter de façon intensive ce genre de matériel. A nos yeux il présente des avantages pédagogiques indéniables (qui se préciseront au cours des activités et sur lesquels nous reviendrons plus loin). D'autre part, s'agissant d'un matériel qu'on peut fabriquer en partie soi-même (planchettes en contre-plaqué sur lesquelles on enfonce des clous à tête ronde), les frais à exposer pour équiper convenablement la classe sont modérés.

Dans ce programme de travail nous avions prévu de faire surtout utiliser par les enfants des réseaux à mailles carrées. Mais nous avions aussi envisagé la mise en œuvre de réseaux à mailles parallélogrammes et des réseaux radio-concentriques. En fait, étant donné que nous avons respecté le rythme des enfants et que nous les avons largement suivis dans les voies choisies par eux, nous n'avons pas encore eu l'occasion, à la date du présent compte rendu, d'introduire systématiquement ces derniers réseaux dans la classe.

[1] Ecole Decroly de Saint-Mandé, près de Paris.

1. Libres recherches

Pendant plusieurs semaines se déroulent de libres recherches.

Les enfants, travaillant isolément ou par petits groupes, font des expériences avec leurs planchettes à clous (planchettes carrées sur lesquelles sont plantés, par exemple, 5 × 5 clous en rangées espacées de 2,5 ou de 3 cm, stock d'élastiques de couleurs et de diamètres différents).

L'intérêt des enfants se porte d'abord sur la forme des polygones qu'ils peuvent réaliser avec les élastiques. De temps à autre des échanges interviennent de table en table et une terminologie, en partie spécifique aux enfants, se met en place. Certains trapèzes présentant un angle à 90° sont baptisés «marteaux», un quadrilatère à double symétrie est appelé «cerf-volant», les trapèzes sont dénommés «bateaux», etc.

Si, au départ, la plupart des figures sont convexes, on en voit apparaître par la suite qui présentent des angles rentrants.

L'intérêt des enfants pour ce genre d'activités est grand et soutenu.

Toutefois, rapidement on voit se dégager des axes de recherches.

Par exemple un groupe d'enfants recherche *tous* les carrés (d'abord sans clou à l'intérieur puis avec ou sans clous à l'intérieur) qu'on peut réaliser sur la planchette à clous de 5 × 5, tandis qu'un autre s'intéresse aux triangles.

Etant donné, dans ce genre de dénombrements systématiques, qu'on risque de compter deux fois la même figure, les enfants participant à cette recherche s'organisent pour noter sur leur cahier par des dessins appropriés les résultats obtenus. Cette transposition de la configuration concrète au dessin est relativement facile à réaliser: les enfants utilisent le réseau carré de leur cahier et tracent les segments de droite à main-levée le plus souvent. On notera qu'ils ne cherchent pas à respecter les dimensions exactes du dessin: ils se contentent de produire sur leurs cahiers des *figures semblables* aux modèles dont ils veulent conserver la trace.

Souvent, au cours de ces activités, les enfants font coexister sur la planchette plusieurs figures, facilement discernables grâce à la couleur différentes des élastiques qui en délimitent le contour. Ils ont alors l'occasion de remarquer *les positions respectives des figures les unes par rapport aux autres:* polygones ayant un côté commun, mais extérieurs l'un à l'autre, polygones emboîtés sans contact aucun, polygones qui s'intersectent, etc.

La comparaison des figures conduit d'autre part certains enfants à compter le nombre de clous qui jalonnent le pourtour des différentes figures («clous du pourtour»).

Ils notent également qu'il y a des figures qui n'ont pas de clous à l'intérieur alors que d'autres en ont un ou plusieurs.

La notion de surface fait également son apparition, la surface étant considérée comme «la partie de bois» qui se trouve à l'intérieur de l'élastique.

Une fillette, Isabelle, qui cherche à comparer la surface du carré **a** à celle du triangle **b** (fig. 1 a), arrive à la conclusion que ces deux surfaces sont équivalentes.

Figure 1

D'autres enfants trouvent que l'aire du rectangle **d** est le double de l'aire du carré **c** (fig. 1 b).

Certains enfants font des remarques sur les longueurs des côtés d'un polygone et sur leurs angles.

Dans le carré, les quatre côtés sont égaux. Dans la «bateau» deux des côtés qui sont «en face l'un de l'autre» sont égaux. Dans le losange deux angles qui se font face sont égaux.

Dans le «cerf-volant», ce n'est vrai que pour les angles **p** et **q**.

Figure 2

2. Mise en ordre

Après cette longue période pendant laquelle les enfants ont tout loisir de chercher dans les directions qui leur conviennent, vient une période de mise en ordre au cours de laquelle je présente des propositions, soit oralement à destination de tel ou tel enfant ou de tel ou tel groupe, soit sous forme de fiches.

C'est ainsi qu'une recherche ordonnée et systématique se développe collectivement sur les divers polygones ayant une surface équivalente à celle d'un carré choisi comme unité.

Il s'agit en somme de développer la remarque d'Isabelle suivant laquelle la surface du triangle **b** est équivalente à la surface du carré **a** (fig. 1 a).

Les enfants (fig. 3) cherchent du côté des figures telles que le triangle **d**, le parallélogramme **e**, le parallélogramme **f**.

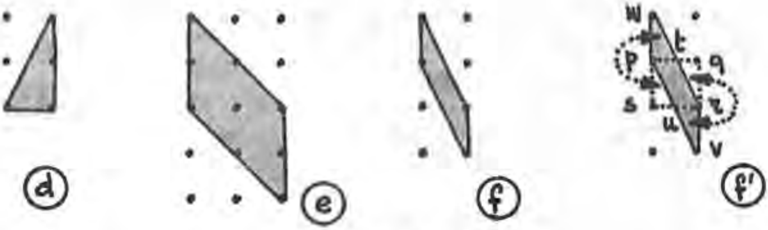


Figure 3

Pour vérifier que les surfaces sont bien équivalentes le procédé consiste à *décomposer* la figure initiale en parties dont on vérifie qu'on peut les «recomposer» pour en faire un carré équivalent au carré unité (en utilisant, si nécessaire, des élastiques auxiliaires).

Ainsi dans le cas du parallélogramme f on le décompose en trois «morceaux»: (ptw), (ptur), (uvr) et on vérifie qu'avec ces trois morceaux on peut reconstituer le carré (pqrs) (fig. 3 f').

3. Affichage et fiches

Finalement je[2] récolte un ensemble de onze figures ayant toutes 4 clous sur leur pourtour et 0 clou au milieu et qui sont équivalentes, au point de vue surface, à la figure unité. Elles sont réunies sur un panneau suspendu à un mur de la classe.

Les fiches dont j'ai parlé plus haut sont destinées aux enfants qui n'ont pas manifesté le même intérêt que leurs camarades à des recherches du type ci-dessus.

En voici un spécimen.

Les planches à clous (5 × 5 clous)
Les rectangles

«— As-tu fait des rectangles avec 0 clou au milieu ?
Si c'est oui, dessine un rectangle de chaque sorte (dans le cahier).
— Avec 1 clou au milieu ? Avec 2 ?
Pour chaque cas où ça a été possible, dessine un rectangle de cette sorte.
— Quel est le rectangle qui renferme le plus de clous ?
— Quel est celui qui a le plus de clous autour ?
— As-tu une remarque à signaler ?»

[2] NDRL: c'est Gisèle Dronne, la maîtresse, qui a rédigé cette partie de l'article.

Une autre fiche présente diverses figures qui ont été réalisées par les enfants de la classe (du carré au «marteau» en passant par le «cerf-volant») et demande de préciser leurs caractéristiques métriques.

«— Ont-ils des côtés égaux ?
Combien ? 2 ? 4 ?
En face l'un de l'autre ou voisins ?»
— Ont-ils des angles égaux ?
Combien ? 2 ? 4 ?
En face l'un de l'autre ou voisins ?

Cette classification retient l'attention d'un des élèves qui réalise un jeu de cartes perforées du modèle de la figure 4.

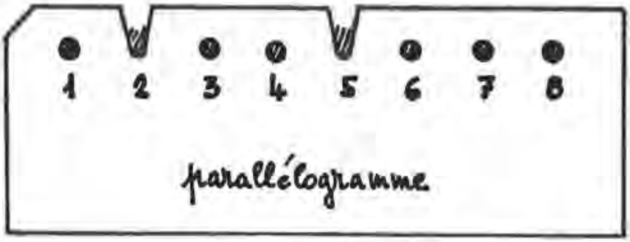


Figure 4

Le code utilisé est le suivant:

4 côtés égaux: une fente en 1
2 côtés égaux en face: une fente en 2
2 côtés égaux voisins: une fente en 3
4 angles égaux: une fente en 4
2 angles égaux en face: une fente en 5
2 angles égaux voisins: une fente en 6

(Les perforations 7 et 8 sont disponibles pour d'autres caractéristiques mais, sur le code de l'enfant, elles figurent avec un point d'interrogation).

Très satisfait de cette réalisation, l'élève en question, muni d'aiguilles à tricoter, s'amuse longuement à extraire telle ou telle figure de son jeu de cartes.

Une autre fiche demande aux élèves de réaliser sur leur planchette des figures de leur choix, de les dessiner sur le cahier et d'indiquer chaque fois sur un tableau le nombre de clous situés sur le pourtour et le nombre de clous situés à l'intérieur.

4. Vers la formule de Pick

A la suite d'une fiche demandant aux élèves de réaliser sur leur planchette des figures de leur choix et d'indiquer chaque fois sur un tableau le nombre de clous situés sur le pourtour et le nombre de clous intérieurs, plusieurs enfants ou groupes d'enfants disposaient d'une série importante de résultats. Certains avaient commencé à examiner ces données et à faire des remarques de caractère général. Quand ils surent qu'ils pouvaient, s'ils le voulaient, approfondir la question avec mon aide, ils se portèrent volontaires pour cette nouvelle activité [3].

L'idée générale qui guidait mon intervention était la suivante:

Au cours de leurs recherches, certains des enfants avaient procédé systématiquement pour passer d'une figure à une autre. Par exemple une fillette, Cécile, âgée de dix ans, avait laissé *invariant* le nombre de clous du milieu (nombre que nous désignerons désormais par **i**) et elle avait fait croître d'une unité le nombre de clous frontières (nombre que nous appellerons désormais **f**). Elle avait obtenu la série de dessins représentés sur la figure 5 (où l'on a marqué chaque fois en grisé la partie qui vient s'adjoindre à la figure précédente).

Figure 5

Cette façon de procéder était propice à la compréhension de l'existence d'un lien unissant le nombre **f** de clous frontières à l'aire **s** du polygone correspondant puisqu'on voyait facilement que chaque fois qu'on ajoutait un clou frontière on augmentait l'aire d'un demi-carré, c'est-à-dire d'une demi-unité (le carré de base étant, rappelons-le, pris comme unité).

Un autre groupe d'enfants disposait d'une série de résultats grâce auxquels on pouvait voir (fig. 6) que lorsqu'on augmente d'une unité le nombre de clous intérieurs sans faire varier le nombre de clous frontière l'aire augmente d'une unité.

Figure 6

[3] NDLR: c'est désormais Simonne Sauvy, psychopédagogue, qui parle.

C'était là, me semblait-il, des circonstances particulièrement favorables pour donner l'occasion aux enfants de découvrir le lien qu'il peut y avoir entre une variable (le nombre **f** de clous frontières ou le nombre **i** de clous intérieurs) et une grandeur qui en dépend (l'aire exprimée en carrés unités). Autrement dit c'était une occasion d'explorer le concept fondamental de *fonction* («L'aire est fonction de...»).

4.a. La séance avec Cécile

Au cours de cette séance nous essayons de découvrir la fonction qui lie l'aire **s** à **f** dans le cas ou **i** reste constant et égal à 0.
Cécile a établi le tableau ci-dessous [4].

Nombre de clous

	Extérieur	*Intérieur*	*Aire*
	4	0	1
	5	0	1 ½
	6	0	2
	7	0	2 ½
	8	0	3
	9	0	3 ½
	10	0	4
Total	49	0	17 ½

Les caractéristiques de sa planchette à clous (fig. 7) ne lui ont pas permis

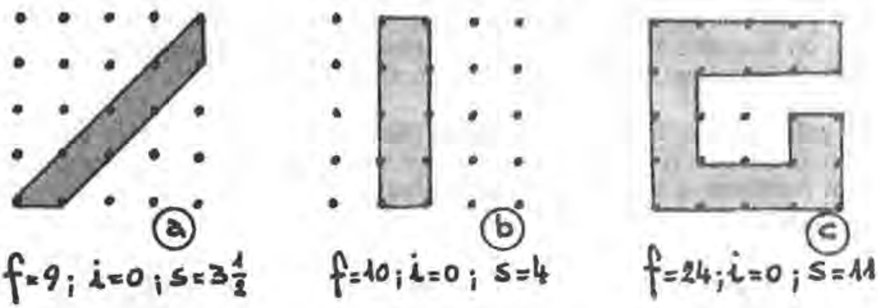


Figure 7

d'aller au-delà de 10 clous extérieurs. D'autre part, elle n'a pas découvert les figures telles que le polygone de la figure 7 c, qui compte un plus grand nombre de clous frontière.
Sur son tableau elle a fait le total des clous et des aires et elle se demande si le polygone à 49 clous extérieurs (et 0 intérieur) qu'on pourrait construire sur une planchette à clous plus grande aurait une aire de 17 ½.

[4] Tableau qu'elle appelle elle-même un «résumé» de ses résultats.

Autrement dit son idée sous-jacente, non formulée, est que l'additivité s'applique.
Sur sa planchette elle place deux élastiques a et b comme indiqué sur la figure 8.

Figure 8

Elle a l'intuition que l'aire de la figure globale obtenue est égale à la somme des aires des figures composantes mais elle ne voit pas qu'on n'a pas le droit de faire la somme des clous frontière en raison du double compte des clous **p** et **q** communs aux deux frontières.

Nous prenons donc le problème autrement et je l'incite à observer la série des résultats, dont elle dispose déjà pour voir si on ne peut pas «découvrir une règle». Après pas mal de tâtonnements elle y arrive et formule la règle à peu près dans les termes suivants: «Quand on augmente le nombre de clous frontière d'*une* unité, on augmente le nombre qui mesure la surface d'une demi-unité».

Par exemple, quand **f** passe de 9 à 10 (+ 1), **s** passe de 3 ½ à 4 (+ ½) [5].

Dès lors elle est en mesure d'extrapoler de proche en proche la suite de ses résultats et elle écrit:

11 clous ext. $\longrightarrow$ **s** = 4 ½
12 clous ext. $\longrightarrow$ **s** = 5
13 clous ext. $\longrightarrow$ **s** = 5 ½

et elle ajoute «et caetera et on pourrait aller comme ça jusqu'à l'infini».

Toutefois des difficultés surgissent quand elle veut sauter à 49 clous extérieurs (pour vérifier si on trouve 17 ½). Elle pense qu'il suffira de prendre la moitié de 49 pour trouver le nombre cherché. Je lui dis que ce n'est pas juste.

Pour en avoir le cœur net elle «revient au concret» et, pour cela, utilise une planchette plus grande qui compte 9 rangées de 9 clous. Elle peut alors réaliser un rectangle pour lequel **f** = 2 × 9 = 18; **i** = 0, et **s** = 8.

Après diverses extrapolations on arrive à la conclusion que pour **f** = 40 on aura **s** = 19. Partant de cette nouvelle base elle procède de proche en proche en appliquant sa règle de tout à l'heure et établit le tableau:

[5] Il est à noter que la fraction ½ est familière à cet âge-là: son maniement élémentaire ne fait pas de difficultés.

f	i	s
40	0	19
41	0	19 ½
42	0	20
43	0	20 ½
44	0	21
45	0	21 ½
46	0	22
47	0	22 ½
48	0	23
49	0	23 ½

Elle découvre alors que l'aire pour 49 clous extérieurs n'est pas égale à 17 ½ comme elle l'avait supposé au départ mais 23 ½.

J'essaye de lui faire découvrir la formule (pour **i** = 0)

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{f} - 1$$

en lui proposant notamment de regarder ce qui se passe quand **f** est le plus petit possible, c'est-à-dire égal à 3.

Elle voit bien qu'on a alors un triangle dont la surface est moitié de celle du carré unité et donc que, pour **f** = 3, **s** = ½, mais cela ne l'aide pas à découvrir la formule.

Sentant qu'il serait prématuré de la lui fournir moi-même je lui propose de remettre la suite de l'investigation à plus tard.

4.b. Séance avec trois garçons

Trois garçons, Alban, Eric et Frank, âgés respectivement de 11, 11 et 10 ans, m'expliquent qu'après avoir établi leur tableau de résultats la maîtresse leur a dit «d'aller plus loin». Alors ils sont allés plus loin et ils ont prolongé leur tableau. Ils ont déjà trouvé 21 polygones ayant 4 clous extérieurs et 0 intérieur, mais ils pensent qu'il doit y en avoir encore d'autres.

Après un bref échange de vues ils se demandent si on pourrait trouver un «code», ou une règle qui permettrait, quand on connaît le nombre de clous extérieurs et le nombre de clous intérieurs (**f** et **i**), de calculer l'aire (**s**) *sans faire la figure.*

Tous sentent que ça doit être possible et Frank, qui a le tableau ci-dessous sous les yeux, propose une règle qu'il a du mal à formuler, mais qui revient à dire que quand **f** = 4, pour avoir **s** on doit ajouter 1 à **i**, et quand **f** = 5, pour avoir **s** on doit ajouter 1 ½ à **i**, ce qui est vrai.

Effectivement cette règle «marche» mais les difficultés surgissent quand il s'agit de la généraliser à d'autres valeurs de **f**.

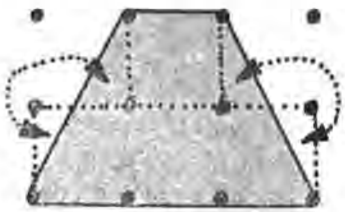
Pour **f** = 8, Frank pense qu'on va devoir ajouter 4 à **i**.

Par exemple, pour **i** = 3 on devrait trouver 3 + 4 = 7. On fait la vérification avec la planchette et on trouve 6 !

Cette déconvenue ne décourage pas Frank. Il est sensible à la *parité* de **f** et il pense qu'il faut ajouter 1 quand **f** est pair et 1 ½ quand **f** est impair.

f	i	s
4	0	1
4	1	2
4	2	3
.	.	.
.	.	.
.	.	.
4	8	9
5	0	1 ½
5	1	2 ½
.	.	.
.	.	.
.	.	.
5	8	9 ½

Les autres enfants s'en mêlent. Ils sentent qu'il faut ajouter au nombre **i** *un nombre qui varie suivant la valeur de* **f**.
Par exemple Eric pense que si **f** = 6 il faut ajouter 2. On essaye avec **i** = 2. **s** devrait être égal à 2 + 2 = 4 suivant sa formule (fig. 9). On vérifie, ça marche.



f = 6 ; i = 2 ; s = 4

Figure 9

Et pour **f** = 8 ? Eric dit qu'il faudrait ajouter 3 (1 de plus que pour **f** = 6). La vérification montre que ça marche à nouveau.
Par contre Eric essuie un échec dans le cas ou **f** = 7 et **i** = 3. Il pense qu'il faut ajouter 1 ½ à 3 et que l'aire doit être égale à 4 ½. Vérification faite c'est 5 ½ qu'on trouve.
Les recherches se poursuivent ainsi jusqu'à la fin du temps disponible et, si elles n'aboutissent pas à mettre au clair la *formule de Pick* (**s = ½ f + i — 1**), du moins les enfants ont ils «brûlé» et ils ont bien compris que **s** augmentait d'une unité quand **i** augmentait d'une unité et d'une demi-unité quand **f** augmentait d'une unité.

4.c. Séance avec deux fillettes

Le groupe suivant est constitué de deux fillettes, Claire-Agnès âgée de 10 ans et Annie âgée de 11 ans.

Elles apportent un tableau de résultats très fourni. Pour toutes les valeurs de **f** de 9 à 25 et les valeurs de **i** de 0 à 9 elles ont cherché sur leurs planchettes la valeur correspondante de **s**.

Cette longue et minutieuse phase d'expérimentation leur a permis de se familiariser avec la loi de progression et c'est sans difficulté qu'elles expriment le fait que quand **i** augmente d'une unité, **s** augmente d'une unité et quand **f** augmente d'une unité **s** n'augmente que d'une ½ unité.

Elles songent à exploiter ces règles pour *calculer* l'aire de surfaces qui ne figurent pas sur leur tableau initial.

Ainsi partant du résultat

4 (**f**), 10 (**i**) ⟶ 11 (**s**),

Claire-Agnès déduit qu'on doit avoir

4 (**f**), 11 (**i**) ⟶ 12 (**s**)

(1 de plus pour **s** puisque 1 de plus pour **i**).

Je l'incite alors à regarder de plus près cette dernière formule et à chercher si on ne pourrait pas calculer l'aire pour une figure donnée sans passer par l'intermédiaire de la figure «précédente».

Elle remarque alors que l'aire compte une unité de plus que **i**. Je lui rappelle d'autre part que lorsque **f** augmente de 1, **s** n'augmente que de la moitié. Cela lui donne l'idée de prendre la moitié de **f**. Dans le cas présent cela donne

$\frac{1}{2} \times 4 = 2$ pour **f** et 11 pour **i**.

Si on ajoute les deux on obtient 13, c'est-à-dire un de plus que 12 qu'il faudrait trouver. D'où l'idée, pour que ça marche, de retrancher 1.

Sentant que ces fillettes sont «mûres» pour passer au stade de la formule générale, je leur dis que la règle est bien celle-là. Pour *calculer l'aire: on prend la moitié de* **f**, *on y ajoute* **i** *et on retranche 1* et j'écris

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\,\mathbf{f} + \mathbf{i} - 1$$

Les fillettes sont ravies, presque subjuguées. Elles s'empressent de faire des vérifications, multipliant les essais, pour le plaisir... Puis, explosant littéralement de joie, bien que ce soit des enfants en général très réservés, elles se précipitent chez la maîtresse qui se trouve dans une pièce voisine pour lui faire partager leur plaisir.

5. Commentaires

a — L'intérêt des enfants ne s'est pas relâché tout au long de l'année. C'est sans doute parce que les investigations auxquelles invite la planchette correspondent à une problématique fondamentale des enfants de l'âge considéré (9-11 ans), comme d'ailleurs à leurs possibilités de répondre aux questions qu'ils se posent.

b — Des nombreux travaux faits par les enfants à cette occasion (dont nos comptes rendus ne donnent qu'une faible part) il ressort que *tous* mettent désormais un contenu sous le mot «*surface*»,[6] surmontant ainsi une des difficultés que connaissent bien les maîtres et maîtresses enseignant des enfants de la tranche d'âge considérée.

c — Tous également ont amélioré leur *visualisation*, en particulier à l'occasion des partitions de polygones complexes qu'ils ont été amenés à faire pour en exprimer l'aire en termes de carrés-unités. De même ont-ils utilisé *spontanément* les propriétés de *symétrie* des figures, l'égalité des angles alternes-internes, etc. et la notion d'angle s'en est trouvé raffermie.

d — En ce qui concerne le *concept de fonction* il est apparu que les enfants des âges considérés n'étaient pas très éloignés de pouvoir s'en emparer, à condition que la référence «au concret», (pour employer la terminologie de J. Piaget), reste possible en permanence. Mais il est également apparu qu'il convenait d'*être très prudent dans l'introduction des formules algébriques*.

Dans cette matière plus que dans tout autre le «hâte-toi lentement» doit rester le maître-mot.

---

[6] Il s'agit du concept d'*étendue* par opposition au concept de *ligne* que les enfants de cet âge maîtrisent mieux. Précisons que le terme d'*aire* (mesure de la surface) n'a pas été employé dans le cours de la recherche: une trop stricte précision terminologique étrangère aux préoccupations des enfants aurait risqué d'entraver leur activité de recherche.

Mathématique... tessinoise

par Maurice Denis Froidcoeur

— «Un chasseur (... sachant chasser...) chassait un ours. Il le suivit durant 3 km en ligne droite direction Sud, puis il dut courir direction Est sur 3 km, et enfin remonta au Nord pendant 3 km encore... et se retrouva à son point de départ ! Quelle est la couleur de la fourrure de l'ours ?»

(D'accord, elle est vieille, mais que serait le monde sans grand-mères ? Et puis elle valait bien la peine de s'attirer la réponse: «Il faudrait imaginer un carré qui à force de rétrécir sur un bord, deviendrait un trapèze de plus en plus aigu et finalement un triangle, toujours équilatéral mais bi- et donc trirectangle; et alors il ne serait plus vrai que deux perpendiculaires à une droite sont parallèles entre elles !...»)

De toute façon il fallait bien partir de quelque part. Je ne vous raconterai pas où on est arrivé, mais seulement par où on est passé, en baguenaudant de question en question, de la *géographie* à la *sélénoscopie*, puis à la *géométrie*.

La terre

Nous disions donc que, la terre étant ronde...

— trouver dans une encyclopédie ce que sont:
  — pôles et antipodes,
  — équateur et tropiques,
  — méridiens et parallèles,
  — azimuth et nadir,
  — périgée, apogée,
  — périhélie et aphélie,
  — latitude et longitude,
  — etc.
— rechercher les coordonnées de la commune,
— calculer celles des antipodes et les situer,
— construire un astrolabe,
— regarder le ciel ce soir et le décrire... verbalement ou par le dessin.

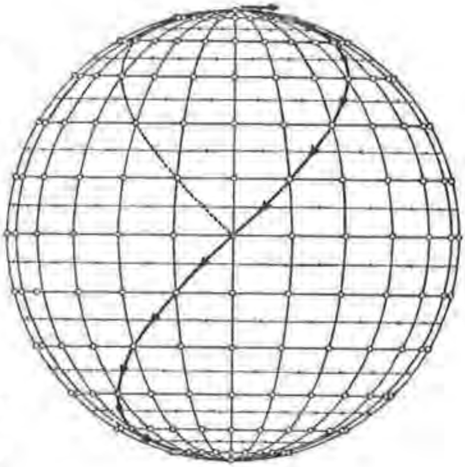


Figure 1

Le LUNATIQUE en promenade...

Voilà bien des choses ! Et qui en tout cas renvoient aux «heures» de géographie, dessin, travail manuel et expression verbale. Mais surtout qui font naître de nouvelles questions:

— Comment se fait-il qu'on puisse représenter la Terre en mappemonde ? Essayer avec une pelure de mandarine pour se rendre compte des difficultés. Qu'en déduire de la validité de toutes les cartes du monde ? Quelle est finalement la... «moins fausse» ?

  Et tant qu'on y est à reparler de cartes, où en étions-nous du problème des couleurs ?

Et la Lune ?

En fait, que voit-on ? (La découverte, toute fraîche encore, du compas a prévalu sans conteste sur l'observation dès qu'il s'est agi de dessiner la lune parce qu'elle n'était pas pleine ce jour-là !) Et l'on a ainsi eu droit à des interprétations du type de celle donnée par la figure 2).

Alors il a bien fallu recourir à des «lunes» de jour: les globes-lampadaires de papier.

— Que voit-on donc ? Pourquoi sont-ce des ellipses ? Qu'est l'ombre d'un disque au soleil (avant qu'il ne gondole !). Quelle relation y a-t-il entre les deux phénomènes ? Comment dessiner une ellipse ? (Quelle guerre au compas, de nouveau !). Comment vérifier si une courbe est vraiment une ellipse ? Que penser alors des «ellipses» des couturières ? Comment dessi-

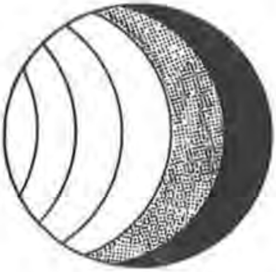


Figure 2

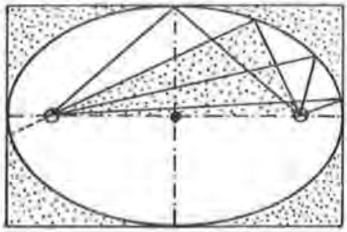


Figure 3

ner maintenant 12 phases de la lune à intervalles de temps réguliers !
Comment interpréter le tableau «Le *lunatique* en promenade» ? (fig. 1).

— Réaliser matériellement un tampon à ellipses.

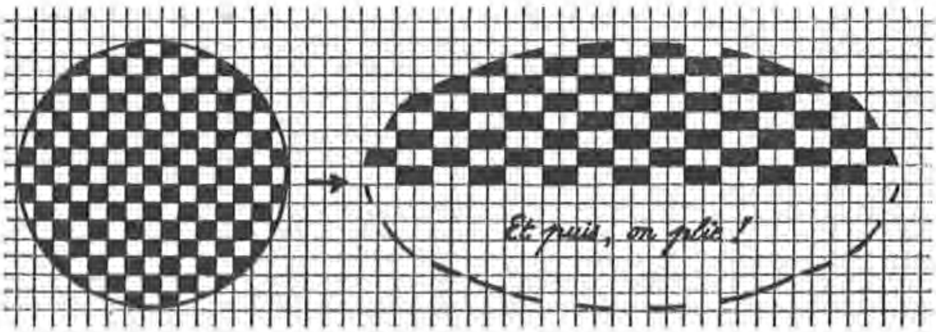


Figure 4

Le cercle et le disque

— Etablir le rapport entre le diamètre d'un disque et son contour, le cercle; le faire pour un grand nombre de cas (jusqu'à ce que saute à l'œil une valeur approchée de π).

— Qui peut aider un cercle à retrouver son centre ?
Que devient un cercle si son centre... a la bougeotte ? Examiner plusieurs cas possibles. Etudier d'autres «maladies» du cercle et du disque: la perspective, la projection, la dilatation dans une seule direction (p. ex. du double: voir fig. 4).

— Comment trouver les foyers d'une ellipse donnée ? (on connaît Pythagore !)

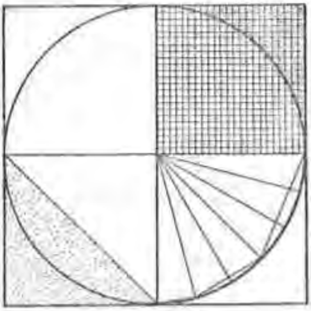


Figure 5

Aire du grand carré:
$4 \cdot 23^2 = 2116$
Petits carrés en dehors:
$4 \cdot 114 = 456$
Aire du disque:
$2116 - 456 = 1660$

$\pi \cong 1660 / 529 = 3{,}15...$
Points dehors: 162
Points dedans: 220
$\pi \cong 2408 / 764$

- Trouver un moyen de calculer l'aire d'un disque:
  - par approximations successives au moyen des polygones,
  - par approche probabiliste,
  - par le raisonnement à partir de la relation entre aire et périmètre des polygones réguliers (cf. fig. 5).
- Serait-ce tellement plus difficile de trouver l'aire d'une ellipse (retour à la fig. 4).

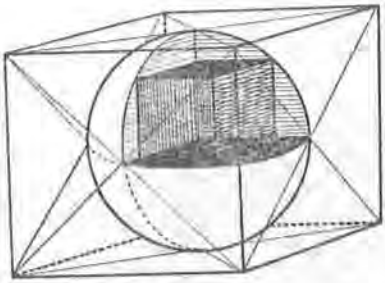


Figure 6
La boîte... en boule... en boîte !?

La boule et la sphère

— Recommencer tout ça ! Mais peut-être en essayant de penser d'abord, c'est-à-dire en tentant d'appliquer dans l'espace ce qu'on a vu dans le plan.

— Qu'est-ce qui ne va pas dans le tableau, figure 6 ? Mais qu'est-ce qui va ? Bien entendu les découvertes ont exigé de multiples manipulations avec du sable, de petits dés, de l'eau et tant de billes, balles et ballons. A chaque trouvaille il a fallu payer un prix fort de précisions (poids spécifique, densité, capacité, système de mesures).
Alors pour se détendre on a inventé des grilles nouvelles: avec le compas, bien sûr, et aussi le rapporteur.
Voilà le travail: figure 7.

— Quels commentaires pourrait-on faire sur la spirale ?
— Comment continue et finit (en pointe ou arrondie) la courbe esquissée ?
— Est-il possible de réaliser une ligne droite et de trouver son «équation» ?

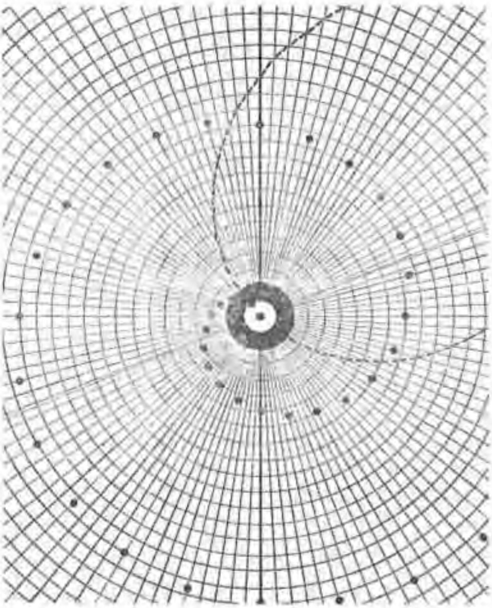


Figure 7

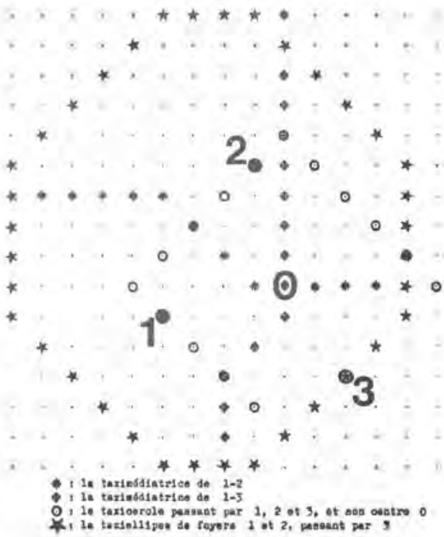


Figure 8

Et puisque Monsieur Pythagore nous fait sécher, on est revenu au XX^{e} siècle (Non ! Pas encore cette fois-ci chez Monsieur Einstein, rassurez-vous !), mais tout bonnement à Taxipolis, chez Frédérique (fig. 8):
— Que sont ici disques, ellipses ?
— Que valent encore nos formules ?

(Dommage que Math-Ecole ne soit pas en couleurs: nos dessins étaient mille fois plus jolis !).

Un *problème* pour finir en beauté:
— Comment disposer 250 balles de ping-pong pour occuper l'espace minimum ?

Des casse-tête...
pour vous et vos grands élèves...

Jeux et exercices glanés en divers ouvrages et en divers lieux et proposés aux participants à des Sessions de recyclage.

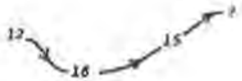
1) On donne une série d'informations:

— Mons, Charleroi, Sombreffe, Nivelles, Auvelais sont des villes qui peuvent entendre les émissions de Radio-Hainaut.
— Namur, Dinant, Charleroi, Nivelles, Ciny, Auvelais sont des villes qui peuvent entendre Radio-Namur.
— Tournai, Anvers, Malines, Mons, Charleroi, Ciney, Auvelais et Boom sont des villes qui peuvent recevoir RTB-Bruxelles.

Citer d'autres informations que l'on peut tirer de celles qui sont données.

2) *Somme de diviseurs*

L'ensemble des diviseurs de 12 (12 *exclu*) est $\{1, 2, 3, 4, 6\}$. La somme de ces diviseurs $(1 + 2 + 3 + 4 + 6)$ est égale à 16. Sur le schéma on a tracé une flèche reliant 12 à 16.
En effectuant la somme des diviseurs de 16 (16 *exclu*), on montre qu'une flèche reliera 16 à 15.
A partir de 15, on trace une autre flèche. Où ira-t-elle ?
Continuer la chaîne.
Construire d'autres chaînes en changeant le point de départ.



3) *Classements*

On dispose d'une collection de 14 blocs logiques:
— 2 tailles (grand, petit);
— 2 formes (rond, triangulaire);
— 2 couleurs (rouge, bleu);
— 2 épaisseurs (épais, mince).

a) Placer ces blocs dans une grille carrée de 16 cases de manière que tous les rouges se trouvent dans des cases contiguës (qui se touchent par un côté et pas seulement par un sommet), tous les grands dans des cases contiguës, tous les ronds dans des cases contiguës, et tous les épais dans des cases contiguës.

b) Classer de la même manière les 16 collections que l'on peut former avec des pions de couleur:

$E = \{r, v, j, b\}$; classer les éléments de $\mathscr{P}(E)$
— 0 ou 1 pion rouge,
— 0 ou 1 pion vert,
— 0 ou 1 pion jaune,
— 0 ou 1 pion bleu.

c) Etablir des comparaisons entre ces deux classements.

4) *Le jeu de Lucas* (François: mathématicien français)

R	R	R		B	B	B

C'est un jeu pour une personne munie de 3 pions rouges et de 3 pions bleus. Il faut, au départ, placer les pions rouges sur les cases marquées R et les bleus sur les cases marquées B. L'objet du jeu est de faire passer les pions rouges sur les cases B et les pions bleus sur les cases R.

Règles:

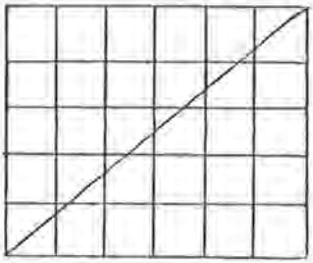
— Les pions rouges peuvent seulement avancer vers la droite, les pions bleus seulement vers la gauche.
— Le joueur peut avancer un pion soit en le plaçant dans la case voisine vide soit en sautant par-dessus un seul pion jusqu'à la case suivante.
— Aucune case ne peut contenir deux pions à la fois et les pions ne peuvent pas sortir du jeu.

Combien de fois faut-il déplacer un pion pour obtenir l'objectif final ?

(Même jeu avec 4 pions ou plus de chaque couleur).

5) *Diagonales*

Sur du papier quadrillé, tracer un rectangle de cinq carreaux sur six carreaux. Tracer une diagonale de ce rectangle.



Combien de carreaux sont traversés par la diagonale ?

Recommencer pour d'autres types de rectangles.

Peut-on prévoir le nombre de carreaux traversés si on connaît la longueur et la largeur du rectangle ?

Catherine Rübner

Quelques noisettes pour se faire les dents...

1) Deux droites parallèles partagent le plan en trois régions. Une troisième droite, sécante, crée deux intersections et six régions. Si on trace une troisième droite, sécante avec toutes les précédentes, sans qu'il y ait plus de deux droites passant par le même point, on obtient cinq intersections et dix régions. On ajoute de nouvelles droites, selon le même principe.

Mettez les résultats sous forme de tableau.

Combien a-t-on d'intersections avec cinq droites ? combien de régions ?

Même question pour huit droites. Peut-on généraliser ?

2)

— Soit le nombre quinze, si on l'écrit en base trois, laquelle des écritures suivantes convient:

a) 5	d) 113
b) 120	e) 300
c) 122	

— Même question pour seize écrit en base huit:

a) 2	d) 20
b) 18	e) 121
c) 24	

— Quel est en base dix le nombre qui en base trois s'écrit 222:

a) 26	d) 74
b) 22	e) 222
c) 20	

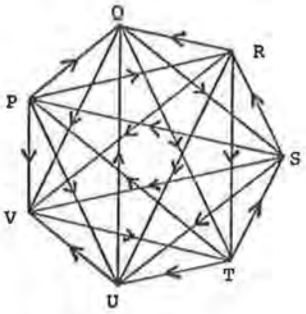
— Quel est en base huit le nombre qui en base trois s'écrit 201:

a) 15	d) 209
b) 20	e) 23
c) 201	

— Quel est en base dix le nombre qui s'écrit 17 en base huit:

a) 13	c) 17
b) 15	d) 19
e) 21	

3) Un homme veut s'acheter un téléviseur. Il compare les mérites de sept postes désignés par P, Q, R, S, T, U et V. Pour faciliter sa décision, il a fait le diagramme suivant:



La flèche signifie: x a des avantages sur y.

Quel(s) poste(s) est(sont) considéré(s) comme supérieur(s) à R.

a) U	d) Q
b) T	e) S
c) V

Lequel des raisonnements suivants est incorrect:

A) P est meilleur que U et
T est meilleur que P
donc T est meilleur que U

B) P est meilleur que Q et
S est meilleur que P
donc S est meilleur que Q

C) U est meilleur que V et
R est meilleur que U
donc R est meilleur que V

— Si vous faites confiance au jugement de l'homme, quel téléviseur achèteriez-vous:

a) P	d) S
b) Q	e) U
c) R

— La relation représentée est une relation:

a) d'équivalence
b) d'ordre total
c) d'ordre partiel

Catherine Rübner

Lu pour vous

- **Réformes et efforts de coordination dans l'enseignement mathématique en Suisse**

Bulletin d'information de la Commission pédagogique de la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique, numéro 3 b, version française. Juin 1975. Où il est montré, avec exemples à l'appui, que la coordination s'entend, en Suisse, non comme une démarche centralisatrice et uniformatrice, mais, bien au contraire, comme une coopération destinée à harmoniser progressivement un certain nombre de «vues concordantes». Au sommaire: Organisation de la coordination. Etat de la réforme de l'enseignement mathématique pendant la scolarité obligatoire. Etudes de cas d'innovation dans l'enseignement de la mathématique. C'est dans ce chapitre que Mme Catherine Rübner présente l'«Innovation en mathématique en Suisse romande». Une importante bibliographie (six pages en texte suivi) présente les moyens d'enseignement utilisés dans les différents cantons.
On se permet, ici, de formuler un regret: «Math-Ecole», à l'œuvre depuis 14 ans et qui n'a pas peu contribué au renouvellement de l'enseignement de la mathématique dans notre pays, n'a pas eu l'honneur d'être signalé dans cet ouvrage.

S.R.

- Nous avons reçu le numéro de mars 1975 (No 1/75) du Bulletin Cuisenaire (Revue trimestrielle de l'Association Cuisenaire Belgique, groupe d'étude pour la promotion de l'enseignement de la mathématique moderne).

Nous relevons dans le sommaire:

— Crible d'Eratosthène et diviseurs (R. Gérardy).
Il s'agit des nombres entiers de 1 à 100 disposés dans un tableau carré de 10 sur 10. Vous reliez les multiples de 2 en rouge, par exemple, ceux de 3 en vert, etc. Aux croisements des lignes, vous trouvez alors les multiples du produit des nombres correspondant aux couleurs des lignes (rouge et vert, par exemple, multiples de $2 \times 3 = 6$).
Le crible peut s'utiliser pour trouver jusqu'à 100 les nombres premiers, les ensembles des diviseurs des nombres, l'ensemble des diviseurs communs de deux nombres (et le pgcd), la décomposition en facteurs, etc.

— Variations sur le nombre 120:
Une suite de leçons en fin de 2e année — D. van Haeren.
Cet article se subdivise comme suit:
I. Problèmes - La tombola de l'Ecole.
II. Graphes fléchés.
III. Les diviseurs de 120.
IV. Ensembles de multiples.
V. Ecriture en d'autres bases que 10.

— Un noyau-thème: le jeu de cartes - L. Jeronnez.
Le jeu de 52 cartes est prétexte à tous les exercices de classement, à la formation de toutes sortes de sous-ensembles et de différentes partitions.
Il sert ensuite d'approche expérimentale de la probabilité.
Le dernier paragraphe montre encore comment exploiter le jeu de cartes pour introduire l'ensemble Z (entiers relatifs, c'est-à-dire positifs et négatifs).

C. Rübner

● Activités mathématiques

(Essai d'application de la réforme dans les classes à plusieurs degrés). Par Pierre Arnoux, Gérard Charrière, Jean-Claude Fleuret, Nadia Guillet, Michel Vacheron, Jean-Jacques Walder. Publication numéro 7 du Service de la recherche pédagogique du Département de l'instruction publique. Genève. Mars 1975.

L'avant-propos de Raymond Hutin, directeur du SRP, avertit: «L'adoption du nouveau programme romand implique que le corps enseignant adhère à un certain nombre de présupposés sans lesquels aucun progrès véritable ne pourra être réalisé: reconnaissance d'un développement génétique de la pensée, priorité au raisonnement logico-mathématique par rapport à la mémorisation des connaissances, confiance dans les capacités d'autonomie et de créativité de l'enfant, droit pour l'élève d'accéder à une véritable activité mathématique».
Un tel épanouissement de l'intelligence et, aussi, de l'être tout entier, des maîtres de classes rurales de Genève (car il y a aussi de telles classes dans ce canton), ont voulu qu'il soit le fait de leurs élèves campagnards. Ils ont, continuant un effort de collaboration qui se développe depuis de nombreuses années, mis ensemble leurs forces et leurs idées et fini par proposer plus de douze thèmes de recherche mathématique qui, parcourus par maîtres et élèves au gré des circonstances, donnent l'occasion d'acquérir avec bonheur les notions du «programme».
Quelques titres: Voyage à New York, Numéros postaux, La CGTE en chiffres (Compagnie genevoise des tramways électriques), Graphiques (avec le livre de géographie Rebeaud I), Le dé à jouer, Service compris, La coudée royale. Des dessins, des tableaux, des suggestions... et l'envie de se mettre au travail.

S. Roller

● Nous avons le plaisir de signaler aux lecteurs de Math-Ecole la «Collection formation des maîtres en mathématique» (directeur Maurice Glaymann) édité par CEDIC. Une quinzaine d'ouvrages ont déjà paru apportant une moisson d'idées pour enrichir l'enseignement. Il y en a pour tous les degrés, pour le primaire, comme pour le secondaire inférieur et le secondaire supérieur.

Certains de ces livres ont été traduits de l'anglais, et ce ne sont pas les moins bons. Nos voisins d'Outre-Manche ont ce pragmatisme de bon aloi, qui met au centre des préoccupations plutôt l'élève que des théories battues en brèche à tous moments par la multiplicité des situations pédagogiques. Parmi ceux-ci, citons: Banwell, Saunders, Tahta: Points de départ - CEDIC 1974, dont sont tirés les deux exemples suivants:

«*Pliage d'une feuille de papier*»
Chaque élève doit avoir une bande de papier de 30 cm × 5 cm environ.

— Pliez le morceau de papier en deux.
Maintenant pliez-le encore en deux.
Dépliez la bande de papier.
Que remarquez-vous ?
On cherchera probablement le nombre de plis, le nombre de lignes parallèles, le nombre de rectangles...

— Placez votre papier suivant le croquis ci-contre.
Décrivez comment sont disposés les plis de la gauche vers la droite.
Dans le cas présent, les trois plis sont respectivement tournés vers le haut, le bas, le bas.

— Pouvez-vous plier un morceau de papier de façon à obtenir différentes combinaisons de plis ?

— Pliez votre bande de papier à nouveau comme elle l'était.
Pliez encore le papier en deux.
Ne dépliez pas votre bande tout de suite.

Combien de plis pensez-vous avoir cette fois ?
Pouvez-vous expliquer ce fait ?
Combien en prévoyez-vous qui sont tournés vers le haut ?
Combien en prévoyez-vous qui sont tournés vers le bas ?
Maintenant ouvrez la bande et regardez si vous aviez raison.

Cette situation peut être étudiée de différentes façons.

1. Recherchez le nombre de plis si l'on continue à plier la bande. Quelle est la relation entre le nombre de pliages et le nombre de plis.

Nombre de pliages	*Nombre de plis*
1	1
2	3
3	7
4	15
.	.
.	.
.	.

2. Une nouvelle bande de papier est nécessaire et on décrira clairement la méthode suivie pour le pliage. Par exemple, placez le papier sur le bureau et pliez toujours le côté gauche sur le côté droit.
Après un pliage on obtient un pli dirigé vers le bas.
Après deux pliages, on obtient trois plis dirigés respectivement vers le haut, le bas, le bas.
On encourage les enfants à inventer une écriture symbolique pour rendre compte de la situation, etc., etc.»

«Sommes de naturels premiers»

$$\begin{array}{r} 7 \\ 19 \\ 23 \\ +\ 29 \\ \hline 78 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 53 \\ +\ 23 \\ \hline 78 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 37 \\ +\ 41 \\ \hline 78 \end{array}$$

— Choisis quatre naturels premiers inférieurs à 50. Calcule leur somme.
— Peux-tu obtenir la même somme avec trois naturels premiers seulement ? avec deux ?
— Ecris les naturels de 1 à 50 sous la forme d'une somme de naturels premiers, en utilisant dans chaque cas un nombre *minimum* de naturels premiers.

Indiquons pour terminer les ouvrages tirés de cette collection et qui s'adressent, comme «Points de départ», surtout aux instituteurs primaires:

— «La logique à l'école», de M. Glaymann - P. C. Rosenbloom.
— «Addition dans N», de M. Robert.
— «Modèles finis», de A. Myx.
— «Les probabilités à l'école», de M. Glaymann et T. Varga.
— «Opérateurs à l'école élémentaire», de F. Jarente.
— «Rencontre sur l'enseignement élémentaire», Quatrième séminaire - E. Galion.
— «Points de départ», de C. S. Banwell, K. D. Saunders et D. G. Tahta.
— «Six thèmes pour six semaines», de A. Myx.

C. Rübner

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311