Ellipse, ovale, ove

Antoine Gaggero

J'ai abordé ce thème avec des élèves de huitième année, dans le cadre de l'option chapitres choisis de mathématiques. J'ai choisi d'étudier ces courbes particulières car elles conduisent à effectuer des pliages, à utiliser le curviligne, le logiciel cabri géomètre, à collaborer pour utiliser la méthode dite du jardinier. De plus, les courbes non constructibles avec le compas intriguent beaucoup les élèves. Ce thème est modulable selon les niveaux de compétence des élèves des différentes sections secondaires.

Je leur ai demandé de fournir un dossier contenant différents éclairages du sujet:

- Construction de l'ellipse par pliage.
- Utilisation de cabri géomètre.
- Construction de l'ellipse en utilisant la définition.
- Construction de l'ellipse par dessin technique.
- Construction de l'ellipse par la méthode dite du jardinier.
- Construction de courbes apparentées: l'ove et l'ovale.

Avec plus ou moins d'enthousiasme et de succès, tous les élèves se sont mis au travail. En voici le compte rendu.

1. Construction de l'ellipse par pliage.

Consignes:

- Découper un disque de diamètre quelconque et désigner le centre par la lettre a.
- Placer dans le disque un point b.
- Répéter le plus de fois possibles la manipulation suivante:
  Faire correspondre un point c du bord du disque avec le point b, plier et marquer le pli avec un trait au crayon.

Les élèves obtiennent cette figure. Les plis successifs font gondoler le disque en papier et la photo n'apparaît pas plane:

2. Utilisation de cabri géomètre.

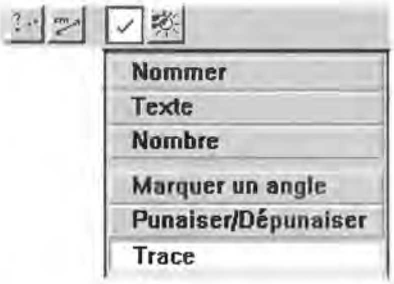
Démarche

- Dessine un cercle de centre a et de 6cm de rayon, puis place un point b à l'intérieur de ce cercle. Place ensuite un point c appartenant au cercle.

- Clique sur la quatrième icône puis sélectionne la fonction «milieu». Tu désigneras le point b et le point c avec la souris. Le logiciel place automatiquement le point milieu m de bc.

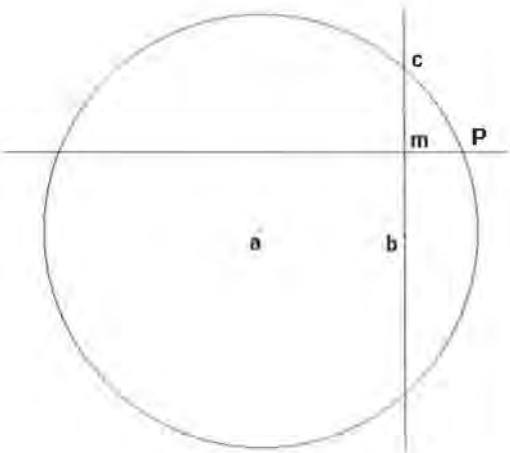
- Construis la perpendiculaire P au segment bc passant par m en effectuant la sélection ci-contre, puis clique sur m pour la dessiner.

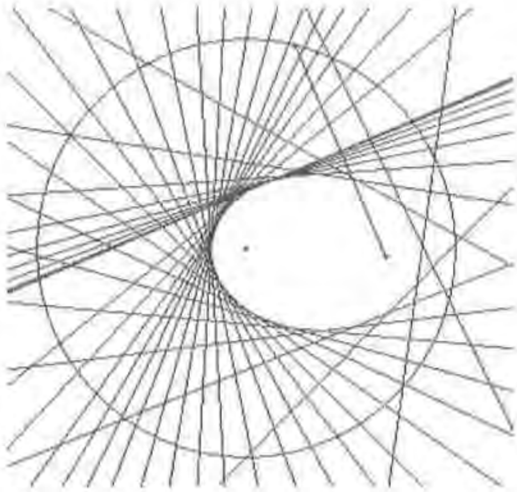
- Sélectionne trace, puis clique sur la droite P.



- Saisis le point c que tu feras tourner. Observe la trace laissée par P.

Voici la construction avant de faire tourner le point c et le résultat après rotation du point c avec la figure engendrée par la trace de la droite P. On obtient bien le même résultat que par pliage.



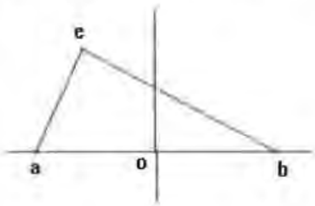


3. Construction de l'ellipse utilisant une de ses définitions.

Définition

Un point e appartient à l'ellipse s'il satisfait la condition :

ae + be = constante
a et b sont les foyers de l'ellipse

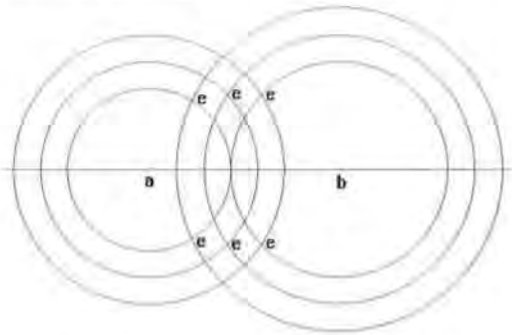


Cette définition étant acquise, les élèves ont construit l'ellipse à partir de ce problème :

Dessine sur une droite deux points a et b distants de 8 cm. Construis le lieu géométrique des points dont la somme des distances aux points a et b est 12 cm. Relie ensuite ces points e avec le curviligne.

Avec cette activité les élèves découvrent que les points de l'ellipse sont formés par les intersections des cercles, mais que ces points e ne peuvent être reliés au compas.

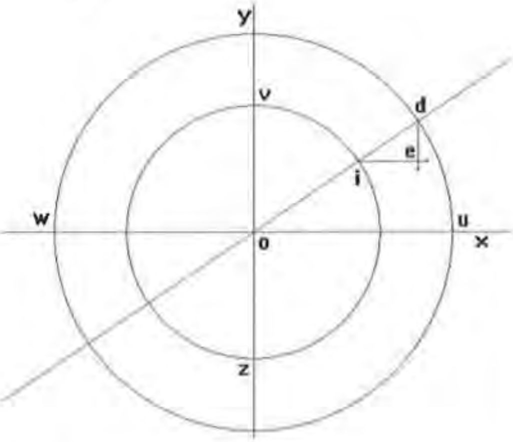
Ils découvrent et apprennent ainsi la manipulation du curviligne.



4. Construction de l'ellipse par le dessin technique.

Méthode

- Dessine deux cercles concentriques de centre o ainsi que deux axes orthogonaux ox et oy.
- Dessine des diamètres tous les 15° en partant de l'axe ox.
- Chaque diamètre intercepte le cercle intérieur en i et le cercle extérieur en d.
- Trace un segment parallèle à ox issu de i et un segment parallèle à oy issu de d. Le point d'intersection de ces deux segments est un point e de l'ellipse.
- u, v, w et z sont des points de l'ellipse. Relie ensuite tous ces points avec le curviligne.



5. Construction de l'ellipse par la technique du jardinier.

Méthode

- Sur une feuille blanche placer deux points a et b.
- Attacher les extrémités d'un fil de longueur constante à deux aiguilles que l'on plantera en a et b.
- Parcourir avec un crayon, le fil tendu, toute la trajectoire possible.

Le résultat est une ellipse.
La réaction de l'élève-informaticus fut claire et nette: à l'époque de l'informatique on n'emploie plus des méthodes aussi ancestrales!!! Il est vrai que pour obtenir un résultat acceptable, mais non parfait, il faut se concentrer, travailler à deux et ne pas hésiter à recommencer.

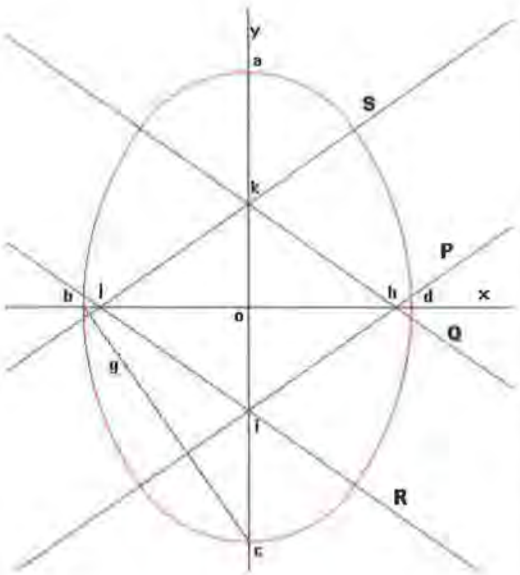
6. L'ovale

C'est une courbe souvent confondue visuellement avec une ellipse. Cependant, l'ovale est constructible avec des arcs de cercle.

Méthode

- Dessiner deux axes perpendiculaires se croisant en o. Placer les points a, b, c et d qui sont des points de l'ovale et tels que (voir le dessin ci-dessous):
  oa = oc = 5cm et ob = od = 3.5 cm
- Tracer le segment bc, puis construire le point g sur le segment bc tel que:
  bg = oa – ob = 1,5 cm
- Construire la médiatrice de gc et placer le point h sur l'axe ox et le point i sur l'axe oy.
- Le point j est le symétrique de h et k le symétrique de i par rapport au point o.
- Tracer les droites hk, kj, ji et ih.
- h, i, j, k sont les centres des quatre arcs de cercle qui forment l'ovale et les droites S, P, Q, R sont les limites de ces arcs.

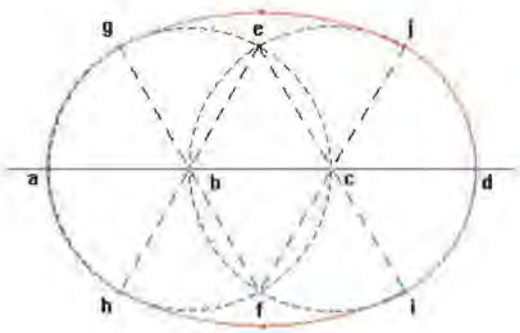
Tracer ces quatre arcs de cercle pour obtenir l'ovale.



7. Ovale elliptique

Méthode

- Tracer une droite sur laquelle on place les points a, b, c, d à intervalles réguliers.
- Tracer les deux cercles de centres b et c et de rayon bc.
- Construire par symétries centrales les points g, h, i, j:
  par la symétrie du centre b, h est l'image de e et g est l'image de f;
  par la symétrie du centre c, i est l'image de e et j est l'image de f;
- Construire les segments gf, ei, eh, jf.
- Tracer l'arc de cercle gj de rayon fg et de centre f ainsi que l'arc de cercle ih de rayon eh et de centre e.
- La figure formée par les quatre arcs hg, gj, ji et jh est un ovale elliptique.

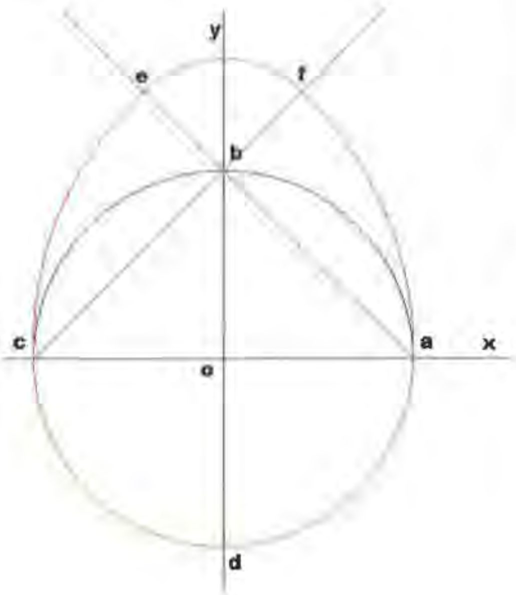


8. L'ove

Méthode

- Tracer les axes perpendiculaires ox et oy
- Dessiner un cercle de centre o et de rayon 4cm.
- Placer les points d'intersections a, b, c, d du cercle avec les axes.
- Tracer les droites ab et cb qui sont les limites des trois arcs de cercle ce, ef et fa.
- Tracer l'arc ce de centre a et de rayon ac. Tracer l'arc ef de centre b et de rayon be.

Tracer l'arc fa de centre c et de rayon ac.
- Le demi-cercle adc complète la figure qui se nomme ove.



9. Commentaires didactiques

A la fin de cet aperçu sur le thème de l'ellipse, qui a occupé la classe pendant 12 périodes, il me paraît important de revenir aux objectifs du travail effectué par les élèves, sous l'angle de leurs apprentissages mathématiques.

- *A propos de la méthode par pliage*

Cette première partie est une activité manuelle, où les instruments de dessin géométrique ne sont pas essentiels (le disque peut être découpé par report d'un modèle, sans utiliser de compas, les droites peuvent être marquées sans règle, à l'intérieur des plis).

Pourtant l'élève y apprend déjà des choses importantes dans le domaine du dessin géométrique, de la géométrie et des mathématiques en général:

- Il apprend à organiser ses pliages de manière systématique, au prix parfois de plusieurs essais, car il ne connaît pas encore le résultat final. Il doit donc observer sa progression pour voir dans quelle région du disque il se passe quelque chose d'intéressant. Il devra alors concentrer ses plis dans cette région et se rendre compte que le résultat ne doit rien à la magie mais qu'il y a une propriété mathématique cachée. C'est sa première approche du concept d'enveloppe de courbe en géométrie.

- Il aborde la notion d'infini au travers de questions du genre «quand dois-je m'arrêter?», «est-ce mieux si j'en trace beaucoup?», «comment puis-je arrondir ce coin?» ou encore «pourrais-je continuer sans jamais m'arrêter?».

- Il apprend, par le geste, les caractéristiques d'une médiatrice: le pli est entièrement déterminé par les deux points b et c dès qu'ils sont l'un sur l'autre, ce pli se situe exactement «entre» les deux dans une direction bien déterminée (qui sera reconnue plus tard comme perpendiculaire au segment bc), ce pli partage équitablement l'espace entre les deux points, même si les deux parties du disque qu'il détermine ne sont pas égales: le demi-plan contenant b, se rabat sur le demi-plan contenant c, ou vice-versa...

- *A propos de la construction informatique*

Le passage de la manipulation à la construction par cabri-géomètre exige un saut conceptuel très grand:

1) Le disque de papier est visualisé par un cercle.

2) Le pli est une médiatrice à l'écran.

3) Les manipulations sont traduites en instruc-

tions données dans un langage informatique exigeant un apprentissage de concepts abstraits qu'il faut relier à la réalité comme la médiatrice, le milieu d'un segment, la perpendiculaire.

4) La machine permet de générer rapidement une infinité de points c alors que manuellement ce travail serait long et fastidieux pour n'aboutir qu'à une construction approximative.

5) Grâce à la machine, même le plus maladroit peut visualiser une courbe bien faite à condition de savoir programmer ou de suivre le listing donné par le professeur!

– *A propos de la construction point par point*

Le passage de la manipulation à la construction de l'ellipse sur papier, fait appel à des notions et connaissances apprises dans d'autres thèmes: la médiatrice, le milieu d'un segment, la perpendiculaire, la tangente. C'est l'occasion pour les élèves de se remémorer des techniques de constructions avec règles et compas et de renforcer et d'enrichir des concepts géométriques en reliant les différents contextes d'où ils émergent.

Au cours de cette construction, la question de la précision et de la propreté du dessin géométrique n'est pas une exigence «externe» venant du maître, elle est en quelque sorte «interne», sous la responsabilité de chaque élève. Celui qui estime que sa «courbe» ne lui convient pas, par rapport à celle de ses camarades ou celle de la construction avec Cabri géomètre, peut recommencer sa construction en s'efforçant d'améliorer son maniement des instruments de dessin géométrique, dans les limites de ses compétences manuelles. Il est bien entendu que pour certains élèves, au comportement aléatoire, c'est le maître qui fixe les objectifs de propreté à atteindre.

– *A propos de la construction de courbes apparentées*

- Les élèves découvrent des formes qui visuellement ressemblent à une ellipse mais qui sont constructibles par arcs de cercle.
- Les élèves apprennent à lire un mode de construction.

– *Autres développements possibles*

- Certains élèves demandent si on peut construire d'autres courbes par pliage. On peut leur proposer la construction de la parabole.

- Certains élèves très curieux peuvent être orientés sur le Net pour découvrir d'autres informations sur ces courbes particulières. Le mot clé «ellipse» suffit pour découvrir des centaines d'articles sur ce sujet.

- D'autres élèves, déjà soucieux de leurs choix professionnels, peuvent être aiguillés sur des sites d'informations appropriés pour satisfaire leur curiosité ou être encouragés à faire des stages. Ce développement n'a bien sûr rien à voir avec les mathématiques, mais avec le travail quotidien du maître secondaire.

Conclusions

Les élèves aiment bien ce thème car il fait une synthèse des techniques de construction différentes et variées, comme la manipulation, le dessin assisté par ordinateur et la construction à l'aide des instruments de dessin géométrique. Ils peuvent comparer ces différents modes de travail, s'engager dans celui qui leur convient le mieux et qui leur apparaît le plus efficace comme illustration des concepts géométriques sous-jacents.

Les aspects esthétiques de ce thème participent aussi de son intérêt: les courbes qui apparaissent au fur et à mesure de la construction de leurs points ou de leurs tangentes sont harmonieuses, régulières et surprenantes.

Je prends le risque d'être ringard en prétendant qu'en ayant travaillé sur ce thème, les élèves ont amélioré leur technique de dessin, même si cette acquisition est éphémère pour certains!

Cette proposition de découverte de courbes, qu'on n'est pas encore en mesure de traiter analytiquement aux premiers degrés de l'école secondaire, est de nature à remettre à l'honneur, auprès des élèves et des maîtres, une approche expérimentale d'objets géométriques et de l'étendre à d'autres concepts mathématiques.

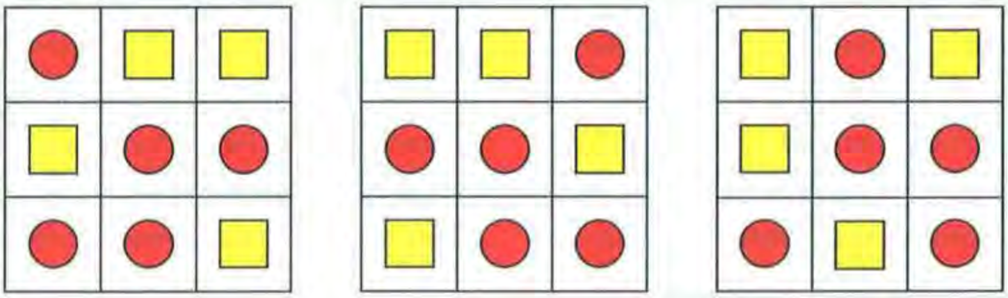
Inventaire

Combien y a-t-il de possibilités différentes, à une rotation près, de disposer 4 carrés jaunes et 5 ronds rouges, chacun dans une des cases d'une grille carrée de 3 x 3?

Exemple:
Par «à une rotation près», on entend que deux dispositions qui pourraient être superposées exactement par une rotation ne représentent qu'une même possibilité, (comme la figure de gauche et la figure de droite ci-dessous, images l'une de l'autre par une rotation d'un quart de tour par exemple).

En revanche, deux dispositions qui seraient «superposables», après d'éventuelles rotations préalables, par une symétrie axiale représentent deux possibilités différentes, (comme les figures de gauche et du centre ou comme celles de droite et du centre).

Parmi les trois figures ci-dessous, il n'y a donc que deux possibilités recherchées.



[ndlr] Si nous vous proposons aujourd'hui cet inventaire, c'est en vue du prochain numéro de *Math-Ecole*, où vous trouverez un jeu (Torticolis) qui exploitera les solutions que vous aurez trouvées. Et en attendant, il y a de quoi conduire une belle recherche exhaustive qui nécessite une «mémoire» rigoureusement organisée des possibilités trouvées.