Problème mathématique *Une pomme pour la récré* : Gros plan sur l'interprétation et le raisonnement mathématiques de quatre élèves

Lucie Mottier Lopez
Université de Genève

Rappelons que les moyens d'enseignement romands des mathématiques sont centrés sur la résolution de problèmes, avec la conception constructiviste que les élèves vont réorganiser la structure de leurs connaissances mathématiques de façon à résoudre ce qu'ils considèrent comme problématique. De plus, un grand nombre d'activités des moyens didactiques sont à réaliser en petits groupes. Cette proposition d'organisation sociale est fondée sur la conception néo-piagétienne que les interactions entre pairs stimulent le développement cognitif individuel. Ainsi, lors de la première phase de l'activité didactique, vue comme un temps de recherche, d'essais, de conjectures, de vérification, les élèves sont sensés développer une interprétation et un raisonnement mathématiques le plus souvent en interaction avec des pairs, mais sans guidage de la part de l'enseignant.

Les résultats du suivi scientifique de la mise en œuvre des moyens d'enseignement romands des mathématiques 1P-4P, assuré par l'IRDP[1], mettent en évidence, entre autres aspects, une adhésion des enseignants aux principes théoriques qui sous-tendent les moyens didactiques mis à disposition (par exemple, Mottier Lopez, 2001). Si la conception de l'apprentissage semble ainsi partagée et reconnue, l'enseignant, ainsi que toute personne intéressée par les processus d'enseignement et d'apprentissage en situation scolaire, peut légitimement s'interroger sur la façon dont les élèves travaillent en groupes. S'investissent-ils réellement dans les activités mathématiques? Quels interprétations et raisonnements mathématiques développent-ils tout au long d'une leçon? Dans quelle mesure la résolution est co-élaborée entre les élèves d'un même groupe? Quelle articulation peut-il y avoir entre des temps de recherche en groupes et des temps collectifs compte tenu de l'avancement différent des démarches de résolution des uns et des autres? etc.

Bien que l'enseignant puisse observer les interactions entre les élèves, interagir afin de prendre de l'information sur les procédures développées, organiser une mise en commun pour faire un état des lieux des différentes démarches déployées, il a rarement l'occasion de suivre de façon soutenue l'ensemble des travaux des enfants, notamment s'il souhaite que le problème reste à leur charge.

Le but de cet article est d'illustrer – et ainsi de « donner à voir » – la résolution d'un problème relativement complexe dans les conditions ordinaires d'une classe de 4P. L'objectif principal est de tenter d'analyser le type d'interprétation et de raisonnement mathématiques de quelques élèves dans des organisations et des dynamiques sociales différentes au cours d'une même leçon: un travail en dyade lors d'une première phase de résolution de problèmes, une mise en commun sous forme

1 Sous la conduite de Chantal Tièche Christinat (1999) de l'Institut de recherche et de documentation pédagogique (IRDP).

d'interaction semi-collective[2] et une reprise de l'activité en dyade. Pour ce faire, l'ensemble des interactions entre l'enseignant et les élèves au cours d'une leçon a été enregistré et protocolé, ainsi que les interactions entre les élèves pendant les phases de travail en dyades. La leçon a été suivie d'un entretien avec l'enseignant. Les traces écrites de la résolution du problème de chaque élève et des notes de terrain complètent le corpus de données.

La typologie des classes de problèmes définie par Vergnaud (1981, 1988) a servi, d'une part, à l'analyse *a priori* de l'activité mathématique *Une pomme pour la récré* (4P; LM 179; LE 81). D'autre part, elle a fondé l'analyse du raisonnement mathématique des élèves tel qu'il s'est effectivement développé au cours des interactions dyadiques et lors de la mise en commun. Des observations complémentaires portent sur l'interprétation faite par les élèves entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques développées (Voigt, 1994).

Certaines caractéristiques et quelques constats mis en évidence par les analyses sont discutés en fin d'article,. avec notamment l'interrogation de la relation entre les processus cognitifs et sociaux dans l'activité mathématique des élèves. En effet, il est apparu indispensable au fil de l'analyse effectuée de considérer la dynamique interactive propre à chaque dyade (Gilly, Fraisse, Roux, 1988), amenant la question de la pertinence de dissocier l'activité cognitive des élèves des processus sociaux dans lesquels cette activité se développe.

1. L'activité *Une pomme pour la récré* (4P; LM 179; LE 81)

L'activité observée s'inscrit dans le module 4 *Des problèmes pour connaître la multiplication*, dans le champ *Reconnaître des problèmes multiplicatifs et divisifs*. Le livre du maître stipule que la tâche consiste à résoudre une situation de partage comportant des opérations successives. Le problème est formulé en ces termes aux élèves:

Une classe a reçu un carton plein de pommes. Quel jour de la semaine le carton sera-t-il vide ?
On dispose des renseignements suivants :

- *le carton contient 185 pommes*
- *il y a 22 élèves dans la classe*
- *la distribution des pommes commence un lundi*
- *chaque élève reçoit une demi-pomme par jour*
- *il y a 5 jours d'école par semaine*

En admettant que le problème soit interprété par les élèves en terme de situation de partage tel que le suggère le livre du maître[3], une résolution «experte» impliquerait une suite de multiplications et divisions. Mais analysons également ce problème sur la base des différentes classes de problèmes multiplicatifs définies par Vergnaud (1981, 1988).

2. Dans la leçon observée, quatre dyades sont concernées par la même activité mathématique et sont réunies pour la mise en commun.

3. Intention didactique à confronter ensuite avec les procédures effectivement déployées par les élèves.

Dans le problème *Une pomme pour la récré*, on distingue plusieurs «grandeurs»: les quantités de pommes, d'élèves, de jours, de semaines. Chacune de ces «grandeurs» est en relation, plus ou moins directe, avec les autres. Ces relations relèvent toutes de la proportionnalité. On se trouve donc en présence de quatre suites proportionnelles, chacune dans son «espace de mesures». Ces suites sont encore incomplètes; l'énoncé ne donne explicitement qu'une valeur pour chaque «espace de mesures» et les «1» sont donnés implicitement (*5 jours par semaine* doit être compris comme *5 jours pour 1 semaine* et *chaque élève reçoit une demi-pomme par jour* comme *1 élève reçoit une demi-pomme pour 1 jour*):

Tableau général[4]

Nb d'élèves	Nb de pommes	Nb de jours	Nb de semaines
1	1/2	1	
22		1	
	185		
		5	1

La relation principale en jeu implique les deux espaces de mesures «nombre de jours» et «nombre de pommes». Le tableau de correspondance suivant, partie du tableau précédent, illustre cette relation de proportionnalité entre les quatre termes-clés qui permettront d'arriver à la solution du problème:

Tableau pommes – jour

Nb de pommes	Nb de jours
?	1
185	?

Avant de pouvoir compléter ce tableau, il faut déterminer l'un des deux nombres encore inconnu. Ce sera la première étape de la résolution consistant à interpréter les données *«22 élèves dans la classe; une demi-pomme distribuée par jour à chaque élève»*, afin d'établir le nombre total de pommes correspondant à 1 jour.

Tableau élèves – pommes, en 1 jour

Nb d'élèves	Nb de pommes	Nb de jours
1	1/2	1
22		1

4. Ce tableau et les suivants ne sont là que pour faciliter la lecture et mettre en évidence les relations entre les grandeurs en jeu. Ce type de représentation n'est pas un objet d'enseignement et pas nécessaire, pour les élèves, à la résolution du problème.

Il y a plusieurs manières de trouver le nombre de pommes, pour un jour, correspondant à 22 élèves:

- en utilisant la relation fonctionnelle «nb d'élèves —> nb de pommes», qui est «multiplier par 1/2» ou «diviser par 2» (passer de 1 élève à 1/2 pomme), ce qui donne 11 pommes.
- en reproduisant une opération du premier espace de mesures (les nombres d'élèves) dans le deuxième espace de mesures (les nombres de pommes) – ce que Vergnaud appelle «isomorphisme de mesures» et les mathématiciens désignent par «propriété de la fonction linéaire $kf(x) = f(kx)$»: pour passer de 1 à 22 élèves, on multiplie par 22. On multiple de la même manière 1/2 pomme par 22, ce qui donne 11 pommes, tout comme dans l'utilisation de la relation fonctionnelle. Il y aurait également des procédures intermédiaires consistant à insérer des lignes supplémentaires dans le tableau de correspondance, par exemple: 2 élèves —> 1 pomme, 20 élèves —>10 pommes...

Dans le cas où la «division par 2» serait choisie, on se trouve dans la situation suivante:

Division 1:

Nombre de pommes distribuées chaque jour

Dividende	22	Le nombre des élèves de la classe
Diviseur	2	Le nombre d'élèves pour une pomme
Quotient	11	Le nombre de pommes distribuées chaque jour

Une fois trouvée la valeur correspondant à 1 jour, on peut retourner au tableau laissé en suspens, complété maintenant par le «11» dans la colonne «pommes» en regard du «1» de la colonne «jours»:

Nb de pommes	Nb de Jours
11	1
185	?

Les élèves ont de nouveau la possibilité d'appliquer deux types de calcul relationnel, soit par isomorphisme de mesures – reproduction dans la colonne de gauche de ce qui se passe dans la colonne de droite – soit par la relation fonctionnelle qui fait passer d'une colonne à l'autre – une «division par 11» (passage de 11 à 1 dans la première ligne, de gauche à droite). Comme la distribution des pommes se fait jour par jour, le travail se fait sur des nombres entiers et on est dans le cas d'une division euclidienne:

Division 2:

Nombre de jours de distribution possible des pommes

Dividende	185	Le total des pommes dans le carton
Diviseur	11	Nombre de pommes distribuées chaque jour (quotient de la 1ère division)
Quotient euclidien	16	Nombre de jours de distribution possible de pommes
Reste	9	

Une des difficultés du problème est que les élèves de 4P ne connaissent pas encore d'algorithme pour cette opération et qu'ils sont par conséquent obligés de revenir au sens profond de la division euclidienne qui est en quelque sorte un «ajustement» du dividende par le multiple du diviseur qui lui est inférieur et le plus proche. Dans notre cas: 185 = ... x 11 + r (où r est un reste, inférieur à 11). Bien qu'ils aient peut être l'idée de partage, les élèves vont ainsi partir de la relation fonctionnelle «multiplier par 11» qui apparaît dans la première ligne du tableau (de gauche à droite). Le «11» étant admis comme image de «1», ils vont travailler ensuite dans l'espace de mesures des pommes (colonne de gauche) par des additions successives ou multiplications en se posant la question «Combien de fois 11 pommes pour arriver à 185 pommes?».

Une autre difficulté est que le dividende 185 n'est pas un multiple de 11, et que les élèves vont devoir considérer le reste pour pouvoir répondre à la question du problème.

Nb de Jours	Nb de pommes
1	11
...	...
16	176
16*	185
17	187

* avec un reste de 9

Cela se traduit dans le tableau de correspondance par les multiples de 176 et 187 qui «entourent» 185.

Les élèves doivent encore interpréter les 16 jours de distribution possible de pommes en termes de semaines de 5 jours. Comme précédemment, ils ont le choix entre plusieurs méthodes, dont l'une serait l'application de la relation fonctionnelle qui fait passer de l'espace de mesures des jours à celui des semaines par la «division par 5».

Tableau jours – semaines

Nb de jours	Nb de semaines
5	1
16	

Division 3:

Nombre de semaines de distribution de pommes

Dividende	16	Nombre de jours de distribution possible (quotient de la 2ème division)
Diviseur	5	Semaines de 5 jours
Quotient euclidien	3	Nombre de semaines de 5 jours
Reste	1	

Comme précédemment, en l'absence d'algorithme, cette division euclidienne s'effectue par la relation fondamentale 16 = (3 x 5) + 1.

Mais comme l'analyse des procédures des élèves le montrera par la suite, cette recherche du nombre de semaines peut être déjà incluse dans la recherche du nombre de jours, lorsque le tableau «pommes/jour» est développé par des tranches de «55 pommes en 5 jours».

Il est à noter que les quotients des divisions 1 et 2 jouent des rôles importants et différents dans l'interprétation et la résolution du problème. L'interprétation des données *«il y a 22 élèves dans la classe; chaque élève reçoit une demi-pomme par jour»* implique une première division dont le quotient sert ensuite de diviseur à la division du nombre total de pommes. Quant au quotient de la division 2, il permet d'identifier le dividende de la division 3 visant à calculer le nombre de semaines de distribution de pommes.

Les restes ont également toute leur importance dans l'interprétation du problème. Le reste (1) de la division euclidienne 3 «16⌊5» permet de dire qu'il y a encore un jour de distribution après les 3 semaines de 5 jours. Autrement dit, il s'agit du lundi de la 4ème semaine en considérant que *«la distribution des pommes commence un lundi»*. Le reste (9) de la division 2 «188⌊11» indique, quant à lui, qu'il y a encore 9 dernières pommes à distribuer le mardi de la quatrième semaine, tout en précisant que ce jour-là, 4 élèves ne recevront pas de pommes.

Bien que l'intention didactique du problème *Des pommes pour la récré* vise à «partager des collections selon des règles plus ou moins complexes» (Danalet, Dumas, Studer, & Villars-Kneubühler, 1998), on peut s'attendre à des procédures diverses de résolution, telles que par exemple:

- une suite d'additions réitérées, plus le reste: 11 + 11 + 11 ... + 9
- des combinaisons d'additions en fonction des valeurs «quantité de pommes/jour» et «quantité de pommes/semaine»: 55 + 55 + 55 + 11 + 9
- une multiplication suivie de l'addition du reste: (16 x 11) + 9 (relation fondamentale de la division euclidienne)
- une combinaison de multiplications et d'additions: (3 x 55) + (1 x 11) + 9
- des soustractions successives: 185 – 11 – 11 – 11 ... – 9; 185 – 55 – 55 – 55 – 11 – 9
- ...

Compte tenu de cette analyse du contenu mathématique de l'activité, observons maintenant comment deux dyades résolvent le problème au cours de la leçon.

2. Déroulement de la leçon de mathématiques

L'enseignant a choisi de partager la classe en trois groupes de base de 8 élèves. Chaque groupe réalise une activité mathématique différente sur le temps d'une leçon d'environ 50 minutes. Un «tournus» est organisé sur plusieurs séances. Le groupe de base concerné par l'activité Une pomme pour la récré est subdivisé en quatre dyades. L'article porte plus particulièrement sur les activités de deux dyades:

- Sylvie (niveau scolaire élevé[5]) et Anna (niveau scolaire faible)
- Jean (niveau scolaire faible) et Béatrice[6] (niveau scolaire moyen à faible).

5. Qualification des niveaux scolaires des élèves en mathématiques sur la base de l'évaluation de l'enseignant.

6. Prénoms modifiés.

Phases du déroulement de la leçon

Organisation du travail par l'enseignant	Première phase de résolution en dyades	Mise en commun semi-collective	Reprise de l'activité en dyades
2 minutes (temps arrondi)	16 minutes	10 minutes	26 minutes

Une fois le «tournus» terminé, l'activité *Une pomme pour la récré* s'est poursuivie lors d'une séance qui concernait tous les élèves de la classe. Une phase de clôture sous forme de mise en commun collective a eu lieu, servant à discuter les caractéristiques des différentes procédures de résolution.

3. Première phase de résolution de problèmes

Une analyse qualitative et détaillée des interactions entre les élèves et de leurs traces écrites a été effectuée, dans le but d'inférer l'interprétation et le raisonnement mathématiques des élèves dans l'élaboration de la procédure de résolution de problèmes lors du travail en dyades.

3.1 Dyade de Sylvie et Anna

D'emblée, la situation est identifiée par les deux élèves comme une situation de partage. Anna énumère plusieurs possibilités de diviseur de 185 en citant les données chiffrées présentes dans l'énoncé du problème. Elle n'argumente pas ses propositions. Sylvie, quant à elle, énonce la division «185 : 11», témoignant qu'elle a déjà effectué mentalement soit la division de 22 par 2, soit la multiplication lacunaire «2 x ... = 22», permettant de connaître le diviseur de 185. Sans tenir compte des propositions multiples de sa camarade, Sylvie poursuit en suggérant de rechercher le nombre de pommes mangées dans une semaine de 5 jours. Elle formule d'abord l'interprétation mathématique «5 x 11» puis explique son raisonnement à Anna: *«On va faire quelque chose fois quelque chose pour arriver à 185»*. Anna collabore à la proposition de Sylvie en formulant la réponse intermédiaire 55.

Les deux élèves poursuivent en multipliant par deux le nombre de pommes mangées par semaine: «55 x 2 = 110». Sylvie propose ensuite une addition: «110 + 55». Anna reformule par la multiplication: «55 x 3». Sophie acquiesce. On observe ici une alternance d'interprétation entre une suite d'additions réitérées «55 + 55 + 55» et sa correspondance multiplicative «3 x 55».

«Cela fait déjà 3 semaines» commente Sylvie. Cet énoncé montre les liens qu'elle effectue entre les opérations mathématiques développées et son interprétation des données du problème. Anna ne comprend pas la remarque de sa camarade. Sylvie lui explique: *«Oui, 3 semaines. 55, c'est si on mange des pommes en 1 semaine. La classe consomme des pommes en 1 semaine. Alors après, on fait x3. Ça fait 3 semaines»*. *«Mmm»* répond Anna.

Sylvie poursuit en signalant qu'il ne sera plus possible d'ajouter encore une fois 55. Elle propose en conséquence de ne plus raisonner en terme de semaine, mais en terme de jour: *«Si tu rajoutes encore 55, ça fera trop gros [...] alors il faut rajouter jour par jour»*. Anna cherche à comprendre: *«Alors tu veux dire que si on fait 4 x 55, ça serait déjà trop gros?»*. Sylvie confirme: *«Ouais, il n'y aura pas assez de pommes [...] donc il faut prendre 11 pommes»*. *«Pourquoi 11 pommes?»* demande Anna. Sylvie explique: *«Si tu veux, on peut* *toujours faire + 11 [...] On ne peut pas ajouter 1 semaine de plus, mais on peut rajouter quelques jours de plus. Tu vois?»*.

Le calcul «165 + 11 = 176» est formulé. Sylvie demande à Anna d'énoncer la suite de la résolution. Anna propose de rajouter un jour, témoignant ainsi qu'elle a compris le raisonnement de Sylvie. Elle objecte toutefois: *«Ce sera sûrement trop gros»*. Sylvie admet. Après un long moment de silence, les deux élèves constatent qu'il reste 9 pommes. Sylvie verbalise son raisonnement: *«Attends, tu as déjà 3 semaines [...] Il faudrait mettre la 4ème semaine avec 176 [...] Le lundi on va manger 176 pommes, il en reste 9. Alors le jour d'après, on va manger ces 9 pommes et ce sera donc terminé [...] Et il n'y aura même pas une pomme pour tous les élèves»*. Tout au long de ce raisonnement, Anna acquiesce régulièrement: *«Oui, mm»*. L'enseignant annonce la mise en commun.

Procédure de résolution de Sylvie et Anna

22 : 2 = 11 185 : 11	Identification du diviseur (la valeur correspondant à 1 dans la relation «nombre de jours» «nombre de pommes»), afin de trouver le nombre de pommes consommées par jour.	Calcul de la valeur «quantité pommes/jours» et de la valeur «quantité pommes/semaine».
11 x 5 = 55	Calcul du nombre de pommes consommées par semaine; ou calcul d'un «paquet» qui permet d'arriver plus rapidement à la solution.	
2 x 55 = 110 110 + 55 = 3 x 55 = 165	Additions réitérées; multiplication de la quantité pommes/semaine.	Additions successives de différentes quantités de pommes pour atteindre 185 et interprétation des quantités en terme de nombre de semaines et jours.
165 + 11 = 176	Addition de la quantité pommes/jour	
176 + 9 = 185	Addition du reste, quantité pommes < quantité pommes/jour.	

Bien que la situation de partage soit identifiée par les élèves, ces derniers choisissent une résolution par additions successives des quantités de pommes «semaine», «jour» et «reste». La multiplication formulée remplace la suite d'additions réitérées de la quantité pommes/semaine. On observe que les élèves développent une procédure «par isomorphisme de mesures», dans le sens qu'elles réfléchissent en terme de «nombre de fois» d'une quantité de pommes définie. Le dénombrement de chaque quantité permet ensuite d'interpréter le nombre de jours et semaines pour répondre à la question du problème. On note que la relation entre les mesures «nombre de jours et semaines» et «quantité de pommes distribuées» reste à l'esprit de Sylvie qui ajuste la valeur des nombres à additionner pour atteindre 185 au fur et à mesure de la résolution.

Globalement on observe encore que Sylvie fait régulièrement une interprétation entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques successives effectuées au cours de la résolution du problème (Voigt, 1994). Anna semble, quant à elle, éprouver des difficultés à établir des liens entre les calculs effectués sous la guidance de Sylvie vue comme l'autorité mathématique du groupe (Cobb, 1995) et les données du problème.

3.2 Dyade de Jean et Béatrice

Les vingt premiers tours de parole servent à nommer les différentes variables du problème, sans un établissement explicite d'une relation mathématique entre les données. Ensuite, Jean formule une première proposition: *«On va faire combien pour aller jusqu'à 185»*. Béatrice précise: *«Ouais, combien de x 22»*. *«Dans 185»* approuve Jean qui poursuit néanmoins en objectant: *«Tu divises 22 plutôt [...] parce que chaque élève reçoit une demi-pomme par jour»*. *«Ben tu fais 11 pommes»* répond Béatrice qui accepte l'argumentation de son camarade. Ainsi, initialement, Jean et Béatrice semblent partager la même interprétation du problème: il faut diviser 22 par 11, compte tenu que les élèves mangent une demi-pomme par jour. Toutefois, l'ensemble des interactions suivantes va porter sur cette première assertion qui sera finalement réfutée et qui donnera lieu à des interprétations et raisonnements différents entre les élèves. En effet, Jean se fixe sur le fait qu'il y a 22 élèves dans la classe:

Jean	*Chaque élève reçoit une demi-pomme par jour.*
Béatrice	*Ouais. Alors attends, tu fais 11 (silence) 11 pommes (silence) 11 pommes.*
Jean	*Ah ! Parce que si tu partages par la moitié, ben tu donnes à un élève et puis à un autre. Après, on reprend une pomme et puis on la partage par la moitié. C'est comme si c'était la pomme entière. (silence)*
Béatrice	*Ben ouais effectivement. Si on la coupe par la moitié, ça fait* ***11*** *pommes par jour, donc ça fait 11, + 11, + 11, + 11, + 11. (silence)*
Jean	*Il faut 22 élèves.*
Béatrice	*Oui, mais comme il est dit qu'il faut la* ***moitié*** *d'une pomme...*
Jean	*Alors si tous les élèves veulent une pomme, ça doit pas faire 11. Ça va faire 22. (...) Si c'est une demi-pomme, si c'est une moitié, ben ça va faire 1 élève, 1 élève, 1 élève, 1 élève, comme ça jusqu'à 22. Un jour, ils reçoivent une demi-pomme, le 2ème jour, encore une demi-pomme, le 3ème, le 4ème jusqu'à ...*

Une hypothèse possible est que Jean éprouve des difficultés à identifier une des deux mesures de la relation multiplicative, à savoir le nombre de pommes distribuées par jour. Jean reste centré sur la quantité d'élèves dans la classe, vue comme la valeur à réitérer pour atteindre 185. D'ailleurs plus tard, il demandera encore: «*Bon alors on fait combien pour aller jusqu'à 185? Combien de 22 pour aller jusqu'à 185?*».

Les arguments de Jean parviennent à déstabiliser Béatrice, bien qu'elle ne semble pas comprendre le raisonnement de son camarade. Elle propose une nouvelle interprétation:

Béatrice	*Mais c'est une pomme ? Une demi ? Ou la moitié d'une pomme ?*
Jean	*J'ai dit une **demi**-pomme.*
Béatrice	*Ça fait une pomme et puis la moitié.*
Jean	*Ben oui.*
Béatrice	*Ah ! Moi je croyais que c'était la **moitié** d'une pomme. C'était tout. (...) Alors là il faut calculer, à chaque élève, combien ils prennent de pommes. Alors là c'est un peu plus difficile. (...) Parce que tu fais plus un et demi. Donc plus un et demi, ça fait trois (silence) donc ça fait trois et demi de pommes.*

A partir de ce moment, Béatrice interprète «une demi-pomme» comme «une pomme et demi» et elle propose une résolution du problème qui implique une suite d'additions réitérées «1,5 + 1,5 + 1,5 ... = 185», mise en relation avec le nombre d'élèves. Jean essaie de comprendre la proposition de sa camarade: «*Euh, une pomme et demi pour chaque personne. Le calcul là tu fais + 2, ça fait déjà 3.*» Béatrice tente d'expliquer son raisonnement: «*3 pommes, ça fait 2 élèves. Ensuite il y a 4 élèves. Tu comprends? [...] Ce que j'essaie de dire, c'est qu'un élève, il a une pomme, plus la moitié d'une autre. Ensuite il reçoit une autre pomme, alors ça fait 3 pommes, parce que 2 moitiés ensemble ça fait une pomme en entier. Alors ça fait 3 pommes pour 2 élèves.*». Malgré ses tentatives de comprendre le raisonnement de Béatrice, Jean objecte: «*Ah ouais, 3 pommes pour 2 élèves. Mais en fait j'ai pas compris. Moi je dis que c'est pour un élève chacun. Quand la maîtresse coupe, elle donne à un élève et un autre, Elle ne coupe pas en 3*». On observe ici que Jean comprend un tiers de pomme et non pas trois fois une demi-pomme comme le suggère sa camarade. L'incompréhension entre les élèves s'accentue.

Béatrice va encore expliquer longuement son raisonnement. L'enseignant est présent lors des derniers échanges entre les élèves. Il n'intervient pas directement, mais il décide d'organiser la mise en commun.

Début de la résolution de Jean et Béatrice

? x 22 = 185	Accord entre les élèves	
22 : 2 = 11	Accord initial, puis désaccord entre les élèves	
Jean	Béatrice	Les élèves ne parviennent pas à comprendre leur raisonnement respectif.
? x 22 = 185	1,5 + 1,5 + 1,5 + … = 185 ? x 1,5 = 185	
	Nb de pommes 3 3 3 …185	
	Nb d'élèves 2 2 2 …	

Malgré les efforts des deux élèves pour élaborer une solution conjointe, ils ne parviennent pas à développer une base commune de compréhension, notamment concernant l'interprétation des données relatives à la demi-pomme distribuée à chaque élève. Dans la mesure où cette opération est fondamentale pour la résolution du problème et que les élèves ne parviennent pas à surmonter cette difficulté, Jean et Béatrice paraissent peu avancés dans la résolution au début de la mise en commun, comparativement aux autres dyades. Mais il est à souligner que les échanges entre Jean et Béatrice ont été nourris, avec peu de dispersion de leur part sur des éléments hors de la tâche. La trace écrite des élèves, peu élaborée, n'est en ce sens pas représentative de leur engagement dans l'activité.

4. Phase de mise en commun

Une analyse du type d'activité des élèves et de l'enseignant a permis d'identifier les différentes phases du déroulement de la mise en commun.

Déroulement de la mise en commun

TdP	Phases	Paroles de l'enseignant
1 - 26	Enumération des variables de l'énoncé du problème	*Qu'est-ce que vous pouvez me dire sur les consignes ? Qu'est-ce qui est écrit dans le problème ? Qu'est-ce que vous avez remarqué ?*
27 - 85	Explication des différentes procédures de résolution projetées par les dyades	*Alors j'aimerais que vous puissiez expliquer en deux mots comment vous allez vous y prendre pour résoudre ce problème ? Vous n'avez pas nécessairement tous la même solution.*
85 - 103	Résumé des propositions des élèves	*Alors si on résume les différentes manières que vous avez de faire...*

On observe que la majeure partie des interactions porte sur l'explication des procédures de résolution projetées par les quatre dyades réunies. Suite à l'énumération des différentes variables de l'énoncé du problème, les élèves sont amenés à expliquer leur raisonnement. A noter que l'enseignant ne demande pas une explication complète et détaillée, mais seulement d'énoncer les grandes lignes. Le premier élève à prendre la parole est Jean qui soumet au groupe l'interprétation faite du problème avec sa camarade:

Jean *On sait déjà que dans le carton il y a 185 pommes, et puis qu'il y a 22 élèves, et puis qu'ils reçoivent une demi-pomme par jour. (...) Ben quand ils reçoivent une demi-pomme, elle partage et puis elle en donne un à un élève et puis à un autre. Comme si la pomme était entière. Ben après on peut faire plus 3.*

Enseignant *Alors qu'est-ce que vous en pensez les autres ?* (3 sec)

Thierry *Ben j'ai pas tout compris.*

Jean *C'est comme si t'as, par exemple, t'as le maître qui prend la pomme. Ben il la partage et après il donne a chacun à deux élèves. Si t'avais deux pommes, si tu partageais la pomme comme ça, ben ça peut faire 3.*

Thierry *Ça fait pas 3, ça fait quatre !*

Jean obtempère.

Il est intéressant de relever que Jean est le porte-parole d'une partie du raisonnement de Béatrice, bien qu'il ne semblait pas d'accord avec sa camarade lors du travail en dyade. Béatrice, quant à elle, n'interviendra à aucun moment de la mise en commun pour rendre public son interprétation.

Sylvie est la suivante à expliquer son raisonnement. Elle le fait en un seul tour de parole: «*Ça fait la moitié de 22, parce que chaque élève ne reçoit pas une pomme entière. Et puis ensuite ça fait 11, la moitié de 22. Et puis combien de fois il y a dans une semaine. 11 fois 5*». «*Bien, OK*» répond l'enseignant qui valide ainsi rapidement la proposition de Sylvie. Puis, sans autres commentaires, il donne la parole au troisième groupe. Anna n'interviendra jamais pour expliquer le travail de son groupe.

Les élèves des deux dernières dyades s'expriment à leur tour. Ils expliquent des procédures non abouties, qui toutes deux ne demandent pas de diviser 22 par 2. En effet, les élèves choisissent de raisonner en considérant 22 fois une demi-pomme, ce qui implique de doubler le nombre total de pommes.

En fin de mise en commun, l'enseignant reformule les procédures des groupes. Une série de questions-réponses entre l'enseignant et les élèves permet de se mettre d'accord sur la valeur correspondant à 1 de la relation multiplicative: 11 si l'on raisonne en terme de pommes entières ou 22 si l'on raisonne en nombre de demi-pommes, mais qui stipule que le nombre total de parts soit doublé.

5. Phase de reprise de l'activité

5.1 Dyade de Sylvie et Anna

Après la mise en commun, les élèves interviennent auprès de l'enseignant pour lui rappeler qu'elles ont trouvé la réponse. L'enseignant leur demande de reprendre le travail, avec la consigne qu'Anna soit capable d'expliquer à Sylvie l'entier de la procédure déployée. Notons ici l'inversion des rôles, alors que dans la phase initiale de recherche, c'est essentiellement Sylvie qui, au fil de la résolution du problème, a expliqué la démarche à Anna. La consigne de l'enseignant montre que celui-ci est conscient non seulement de la part prise par Sylvie dans la résolution du problème, mais également de la faible participation d'Anna dans la mise en commun[7]. Les élèves s'exécutent:

Anna	*Alors d'abord, on a pris 5 jours, parce que chaque semaine, il y a 5 jours d'école.*
Sylvie	*Oui.*
Anna	*Et puis, comme il y a 22 élèves, on doit diviser 22 élèves par 2.*
Sylvie	*Pourquoi on doit diviser par 2 ?*
Anna	*Ben parce qu'il y a chaque élève qui reçoit une demi-pomme par jour. (...) Et puis après, on fait 5 x 11. Ça fait 55. Et puis après on fait ...*
Sylvie	*Mais pourquoi on a fait 5 x 11 ?*

7. Supposition confirmée au cours de l'entretien avec l'enseignant.

Anna	*Ben parce qu'il y a 5 jours dans la semaine.*
Sylvie	*Ouais.*
Anna	*Alors on a divisé 22 par 2. Ça fait 11. Alors on fait 5 x 11. Ça fait 55. Puis après on essaie de faire combien de fois 55 égale 185.*
Sylvie	*OK et puis on est arrivé à la conclusion que c'est quel jour qu'il y aura plus de pommes dans le carton ?*
Anna	*Ça serait le mardi, je crois, de la 4ème semaine.*
Sylvie	*Oui. Alors écris.*

Cet extrait montre que Sylvie joue quasiment le rôle de l'enseignant qui pose des questions et valide les réponses. Anna ne s'en offusque pas, un signe peut-être que cela correspond à l'attente qu'elle a du rôle de Sylvie (Cobb, 1995). Dans les explications fournies par Anna, on observe que la dernière étape qui consiste à interpréter «(3 x 55) + 11 + 9 = 185» pour trouver le jour final de la distribution des pommes n'est pas explicitée.

Après cet échange, les deux élèves sollicitent l'enseignant qui demande à Anna de lui expliquer la procédure de résolution du groupe. L'enseignant ne se satisfait pas de l'explication fournie à propos de l'étape qui permet d'identifier le mardi de la quatrième semaine. Les élèves retournent à leur place et, toujours sur le même mode d'interaction, Anna et Sylvie revoient ensemble cette dernière étape.

5.2 Dyade de Jean et Béatrice

D'entrée, Béatrice propose une résolution par des additions successives de 11. La question de la demi-pomme et de son interprétation n'est plus abordée par les élèves ; une question qui avait été centrale dans la première phase de résolution. Rappelons que dans la mise en commun, Sylvie, la «bonne» élève en mathématiques, a publiquement énoncé une résolution fondée sur la valeur pour un jour 11 ; une proposition rapidement validée par l'enseignant. En ce sens, on peut postuler que le choix de Jean et Béatrice de résoudre le problème par des additions itérées de 11 est un effet de régulation des interactions semi-collectives de la mise en commun (Allal, 1988 ; Mottier Lopez, 1999).

En réponse à la proposition de Béatrice, Jean suggère de multiplier pour des raisons de rapidité. Béatrice accepte et formule la proposition «11 x 11»[8]. S'en suit un long épisode dans lequel les élèves tentent de s'accorder sur le produit de la multiplication. Finalement, ils s'accordent sur 121.

Béatrice poursuit la résolution en interprétant le multiplicateur de 11 en terme de semaines : «*Déjà, on commence un lundi. Alors on fait + 5. On a fini la semaine. Ensuite + 5. On a fini la semaine. + 1, on recommence un lundi. Compris ?*». Autrement dit 11 x 11 = (5 x 11) + (5 x 11) + (1 x 11). Jean approuve et suggère de continuer en additionnant successivement 5. Il est

8. Il est difficile d'inférer les motifs qui poussent Béatrice à suggérer de multiplier 11 par 11.

difficile de savoir ici si Jean interprète 5 comme la quantité de pommes consommées en une semaine «5 x 11» ou s'il interprète 5 comme la quantité à réitérer pour atteindre 185. Béatrice ne tient pas compte de la proposition de Jean et poursuit en suggérant: *«On a fait 121. Ensuite on fait + 11 + 11 + 11 + 11 + 11. Compris? T'as des questions?»*. *«Oui, une question»*, répond Jean qui propose d'ajouter un multiple de 11 à 121, autrement dit: «121 + (3 x 11) = 144». Cette proposition semble déstabiliser Béatrice qui dit ne pas savoir.

Les deux élèves choisissent finalement d'ajouter successivement 11 à 121, en calculant les sommes intermédiaires jusqu'à 165. Béatrice affirme soudainement: *«Il y a un problème. On a dû faire une erreur de calcul»*. La suite des échanges montre qu'elle a anticipé les deux additions successives suivantes et qu'elle a réalisé qu'ils n'atteindront pas 185. Jean contrôle et admet. S'en suit un long épisode dans lequel les élèves contrôlent la multiplication «11 x 11» dont le calcul du produit avait causé initialement des difficultés. Les élèves ont de la peine à s'entendre pour trouver la réponse. Le ton commence à monter. Jean tempère et propose de reprendre en additionnant systématiquement le terme 11. Béatrice collabore à la proposition. Quelque peu dépité, Jean constate qu'ils parviennent toujours à 121: *«Ça ne va pas marcher [...] Tu ne peux pas aller jusqu'à 185»*.

Un échange avec l'enseignant a lieu. Celui-ci constate que les élèves ont choisi l'addition successive de la valeur 11 comme procédure de résolution. Il demande si les sommes intermédiaires calculées sont *«justes ou fausses»*. Jean et Béatrice ne parviennent pas à se prononcer. L'enseignant leur propose de «jouer la calculette» et annonce que les sommes obtenues sont correctes. Cette validation permet aux élèves de cesser de contrôler les résultats intermédiaires. Jean tente alors d'expliquer que 185 ne sera pas atteint. En réponse à cette objection, l'enseignant choisit de relancer de façon très ouverte: *«Alors discutez-en»* et il s'éloigne.

Béatrice suggère: *«On peut rajouter un petit nombre [...] Alors on a dit qu'il* (l'enseignant de l'énoncé du problème) *ne pouvait pas encore donner une moitié à chacun [...] Alors il donne la moitié de la moitié qu'on leur donne»*. On note ici que Béatrice propose une distribution d'un quart de pomme, ce qui permet effectivement d'ajouter un plus petit nombre à 176, le dernier multiple de 11 plus petit que 185. Jean ne comprend pas le raisonnement de sa camarade et sollicite une explication. Béatrice reformule en proposant de diviser 11 par 2. Jean pense que c'est incorrect. Il n'argumente pas, mais il tente une nouvelle interprétation des calculs déjà effectués. L'enseignant annonce la fin de la leçon. Jean conclut: *«Ben ça ne fait rien, au moins on a trouvé quelque chose»*.

Procédure de résolution de Jean et Béatrice

11 x 11 = 121	Interprétation des élèves : cela représente deux semaines et un jour [(5x11) + (5x11) + (1x11)] autrement dit un lundi.
121 + 11 = 132 132 + 11 = 143 143 + 11 = 154 154 + 11 = 165 165 + 11 = 176 176 + 11 = 187	Addition successive de la valeur d'un jour de distribution de pommes. Les élèves n'interprètent pas ces additions en terme de jours supplémentaires. Ils sont bloqués par le fait que 185 n'est pas un multiple de 11 ; la notion de reste fait obstacle.

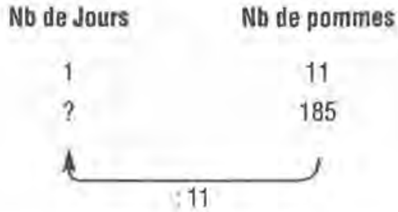
La procédure de résolution est centrée sur la notion d'opérateur scalaire («nombre de fois»): les élèves effectuent des opérations, afin de trouver «combien de fois 11 pommes dans 185 pommes». La notion de reste fait obstacle, autrement dit les élèves n'envisagent pas qu'il puisse rester une quantité de pommes plus petite qu'un jour de distribution. Cela les empêche de poursuivre leur raisonnement relativement à la mesure «nombre de jours», un raisonnement qui avait été entrepris pour l'opération «11 x 11».

D'une façon générale, il semble que Jean éprouve des difficultés à identifier les mesures pertinentes pour la relation multiplicative, dans la situation proposée. Il est par contre très actif lorsqu'il s'agit de formuler des opérations et de trouver des résultats. Globalement, on observe que, chez les deux élèves, la résolution du problème s'appuie sur une conception additive. La multiplication sert essentiellement à compter le nombre d'itérations.

6. Commentaires conclusifs

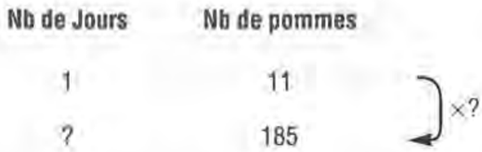
6.1 Procédures de résolution et raisonnement mathématique

Dans la mesure où les deux dyades ont, initialement, énoncé oralement la division euclidienne «185 : 11», on peut postuler que les élèves ont identifié la situation de partage.



Ce raisonnement est centré sur la notion d'opérateur fonction qui fait passer de l'espace de mesures «nombre de pommes» à l'espace de mesures «nombre de jours».

Toutefois, immédiatement après avoir énoncé la division «185 : 11», les élèves choisissent une procédure de résolution «verticale» (par isomorphisme de mesures, en reproduisant dans une colonne les opérations effectuées dans l'autre) plus ou moins sophistiquée, qui sur le plan conceptuel est plus facile pour de jeunes élèves qu'une procédure fonction (Vergnaud, 1981 ; Nunès, 1991).



Ce constat met en évidence une certaine unité dans le type de démarche conceptuelle mobilisée par les quatre élèves, malgré le niveau d'élaboration différent des procédures mathématiques déployées, ainsi qu'une plus ou moins grande facilité à interpréter les données du problème et à concevoir une résolution pertinente.

Bien qu'il soit évidemment impossible d'énoncer ici des conclusions, les analyses effectuées mettent en évidence quelques éléments qui distinguent les élèves. Par exemple, on note que Sylvie prend systématiquement en compte l'ensemble des contraintes imposées dans l'énoncé du problème lorsqu'elle conçoit les opérations successives amenant à la résolution du problème. Elle effectue régulièrement une interprétation entre les données «empiriques» du problème et les opérations mathématiques conçues. Béatrice et Jean semblent éprouver davantage de difficulté à considérer l'ensemble des variables de la situation. Jean interprète parfois le problème en prenant pour référence les conditions du contexte de la vie courante :

Jean	*Les élèves reçoivent une demi-pomme. Ben on ne sait pas s'il y en a qui n'en veulent pas. On ne sait pas.*
Béatrice	*Mais on nous dit ça : **tout** le monde est obligé. Ben parce que ça irait pas, hein, pour calculer.*

Ce constat montre le contraste qui existe entre les formes de raisonnement dans des situations quotidiennes et les formes de raisonnement dans des situations scolaires[9] (Resnick, 1987). Béatrice sait qu'il faut interpréter le problème en terme d'opérations arithmétiques, indépendamment de la logique de la situation réelle. Jean, quant à lui, semble avoir moins bien décrypté les «règles du jeu» inhérentes aux situations scolaires.

Enfin, il est plus difficile d'inférer le mode d'interprétation et de raisonnement d'Anna, mise sous la tutelle de Sylvie perçue comme l'autorité mathématique du groupe.

6.2 Relations entre processus sociaux et processus individuels

Le critère de choix des élèves à observer était une participation contrastée dans les temps collectifs et des niveaux scolaires différents. Bien que la présence du chercheur et de l'enregistreur aient pu produire des effets sur les conduites des élèves, un constat est que ces derniers ont été capables de s'engager dans des activités mathématiques de façon intensive.

L'interprétation et le raisonnement mathématiques tels que décrits plus haut se sont co-construits au sein des interactions dyadiques et au cours de l'interaction collective. La narration faite de la progression de la résolution du problème entre les deux élèves montre combien la dynamique interactive (Gilly, Fraisse & Roux, 1988) peut varier d'un groupe à l'autre, mais toutes deux soutenant ici une co-résolution de la tâche. On observe, par exemple, que les interactions entre Sylvie et Anna sont caractérisées par une relation de tutelle, mais sans pour autant que cela induise une attitude passive d'Anna qui tente de donner sens aux suggestions et explications de sa camarade. Quant aux interactions entre Béatrice et Jean, elles se distinguent essentiellement par des interactions de co-construction ponctuées de brefs échanges relevant de confrontations plus ou moins argumentées. On peut postuler que ces différentes dynamiques interactives résultent de la construction interactive entre les élèves de leur relation amenant à la définition des rôles de chacun (Cobb, 1995), qui par exemple confère à Sylvie son statut d'autorité mathématique non remise en question par Anna. Se

9. Y compris lorsque le problème scolaire prend appui sur un contexte de la vie courante comme c'est le cas avec *Une pomme pour la récré*.

pose évidemment la question de l'efficacité de chacune des formes d'interaction quant à produire des opportunités d'apprentissage pour chacun des élèves.

Il est finalement possible de relever l'importance de la construction d'une base partagée de communication entre les élèves pour une compréhension de l'activité mathématique du partenaire; une base de communication qui parfois a été problématique chez Béatrice et Jean. Mais tous ces constats amènent une question plus générale à mon sens: Comment concevoir la relation entre l'activité cognitive de l'élève – interprétation et raisonnement mathématiques – et les processus sociaux dans lesquels cette activité cognitive s'est construite?

Dans la lignée des travaux néo-piagétiens, les interactions sociales sont vues comme pouvant stimuler le développement cognitif individuel. Il a été observé que certaines formes d'interaction, telle que celles qui relèvent par exemple d'un conflit socio-cognitif entre les élèves, favorisent tout particulièrement les apprentissages (Doise & Mugny, 1981; Perret-Clermont, 1979). Dans la conception vygotskienne, la tendance est de subordonner la cognition individuelle aux relations interpersonnelles et sociales, notamment dans le cadre de relations asymétriques. Un courant de recherche nord-américain et nord-européen (par ex. Cobb, 1995; Cobb, Perlwitz, Underwood, 1994; Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain, & Whitenack, 1997) tente, quant à lui, de théoriser les aspects cognitifs et sociaux dans une relation de réflexivité, avec notamment la question suivante: Dans quelle mesure les processus sociaux contraignent-ils et, tout à la fois, rendent-ils possible l'activité cognitive des élèves et, réciproquement, dans quelle mesure l'activité cognitive contraint-elle et permet-elle le développement des processus sociaux? Une question qui stipule que les dimensions individuelles et collectives de l'activité mathématique se constituent mutuellement et qu'elles ne peuvent exister l'une sans l'autre. Une question qui ouvre, à mon sens, des perspectives intéressantes à explorer.

Remerciements: Je tiens à remercier Lucia Grugnetti et François Jaquet pour leurs commentaires et suggestions sur la version initiale de l'article.

Références bibliographiques:

Allal, L. (1988). Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise: processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In M. Huberman (Ed.), *Assurer la réussite des apprentissages scolaires? Les propositions de la pédagogie de maîtrise* (pp. 86-126). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interactions: four case studies. In P. Cobb & H. Bauersfeld, *The emergence of mathematical meaning* (pp. 25-130). Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cobb, P., Perlwitz, M. & Underwood, D. (1994). Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 10, 41-61.

Cobb, P., Gravemeijer, K., Yackel, E., McClain, K. & Whitenack, J. (1997). Mathematizing and symbolizing: The emergence of chains of signification in one first-grade classroom. In D. Kirshner & J. A. Whitson (Ed.), *Situated cognition, social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 151-233). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Danalet, C., Dumas, J.P., Studer, C. & Villars-Kneubühler, F. (1998). *Mathématiques 3P: livre de l'élève.* Neuchâtel: COROME; Berne: Editions scolaires.

Doise, W. & Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence.* Paris: Interéditions.

Gilly, M, Fraisse, J. & Roux, J.-P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans: dynamiques interactives et socio-cognitives. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Ed.), *Interagir et connaître, enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif* (pp. 73-92). Cousset Fribourg: Editions DelVal.

Mottier Lopez, L. (1999). *Evaluation formative des apprentissages en mathématiques à l'école primaire.* Mémoire de licence, Université de Genève, Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation.

Mottier Lopez, L. (avec la collaboration de Tièche Christinat, C.) (2001). *Les enseignants 1P/2P donnent leur avis sur l'enseignement des mathématiques.* Neuchâtel: Institut de recherche et de documentation pédagogique (01.1004).

Nunès, T. (1991). Systèmes alternatifs de connaissances selon différents environnements. In C. Garnier, N. Bednarz & I. Ulanovskaya (Eds.), *Après Vygotsky et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Ecoles russe et occidentale* (pp. 117-128). Bruxelles: De Boeck université.

Perret-Clermont, A-N. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale.* Berne: Editions Peter Lang SA.

Resnick, L. B. (1987). The 1987 Presidential Address, Learning In school and Out. *Educational Researcher*, 16 (9), 13-20.

Tièche Christinat, C. (1999). Analogie entre innovation et évaluation: l'exemple de l'enseignement des mathématiques en Suisse romande. In C. Depover & B. Noël (Ed.), *Approches plurielles de l'évaluation des compétences et des processus cognitifs: actes du 12ème colloque de l'ADMEE 1998* (pp. 151-160). Mons: Université de Mons-Hainaut, Facultés universitaires catholiques de Mons.

Vergnaud, G. (1981). *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates.

Voigt, J. (1994). Negociation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 275-298.