Une approche du langage algébrique

Michel Brêchet

Les élèves de Suisse romande rencontrent leurs premières écritures littérales au cours des derniers degrés de la scolarité primaire. A doses homéopathiques, elles se profilent en marge de la résolution d'un problème, au fil des pages d'un moyen d'enseignement ou par le biais de l'enseignant, par exemple lorsqu'il estime opportun de montrer le bien-fondé de leur emploi. Cette sensibilisation au langage algébrique se poursuit et s'intensifie durant le début de la scolarité secondaire. A ce moment, c'est essentiellement la généralisation de procédures de calcul qui conduit à utiliser des lettres, dans divers domaines:

- la mesures des grandeurs géométriques débouche naturellement sur des formules comme $p = 4 \cdot c$ (périmètre du carré), $A = \frac{b \cdot h}{2}$ (aire du triangle) ou $V = a^3$ (volume du cube);
- les fonctions sont un terrain propice à la traduction littérale d'expressions françaises (élever au carré peut se traduire par l'expression fonctionnelle $n \rightarrow n^2$, multiplier par 4 par $n \rightarrow 4 \cdot n$);
- les nombres et les opérations offrent de nombreuses occasions de «passer» à l'algèbre, par exemple pour exprimer la moyenne arithmétique de deux nombres ($\frac{a+b}{2}$), la somme des premiers nombres naturels ($\frac{n \cdot (n+1)}{2}$) ou encore la commutativité de l'addition ($a + b = b + a$).

Dans l'ensemble de ces cas, le langage algébrique est ainsi une manière d'exprimer les choses sans recourir à une liste d'exemples, mais bien sous une forme abstraite, en réponse à un besoin de généraliser l'expression de ces choses.

Quelques difficultés et erreurs dans l'apprentissage de l'algèbre

Plusieurs études[1] ont mis à jour les difficultés et les erreurs dans l'apprentissage de l'algèbre. Elles ont en outre tenté de déterminer quelques-unes de leurs origines. Elles ont consisté tour à tour à analyser des productions écrites d'élèves, à dialoguer avec des enseignants, à examiner des travaux de psychologie et surtout à questionner des élèves, notamment pour obtenir des informations sur leurs idées et les méthodes qu'ils emploient. Voici un aperçu de quelques obstacles à franchir pour progresser dans ce domaine abstrait.

La lettre en tant qu'objet

Dans les expressions littérales, les lettres sont souvent traitées comme des objets et non comme des «nombres inconnus» ou des «nombres généralisés». Ainsi, pour certains élèves, l'écriture $6a$ signifiera par exemple 6 arbres ou 6 ananas, car la lettre a représente un objet dont le nom commence par cette lettre. Ceci est compréhensible, dans la mesure ou des écritures du genre $A = b \cdot h$

1. BOOTH L.R. (1984), *Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire*, Journal pour les enseignants de Mathématiques et de sciences physiques du Premier Cycle de l'Enseignement Secondaire, no 5.
BATON B. et al., *L'initiation à l'algèbre*, collection «Documents du CREM» no 3, juin 1996 (dans ce document, les auteurs se réfèrent notamment à BEHR M. et al. (1976) et KIERAN C. (1981)).

sont souvent traduites par « Aire = base · hauteur », où ces trois mots évoquent prioritairement des objets (surface et segments) et non des nombres.

L'attribution d'une seule valeur à une lettre

Certains élèves considèrent qu'une lettre ne peut représenter qu'une seule valeur, et non un ensemble de valeurs. En conséquence, il est impossible que deux lettres différentes représentent un même nombre. Ainsi, pour eux, la valeur numérique de l'expression $x + y$ ne sera jamais égale à celle de $x + z$. Cette idée provient peut-être du fait qu'en arithmétique, on ne peut attribuer qu'une valeur à chaque symbole (chaque chiffre). Il n'y a pas de choix possible pour la valeur du symbole 5, par exemple. En outre, lorsque l'on présente une équation simple telle que $b + 7 = 10$ ou que l'on cherche à calculer la valeur numérique de l'expression $7x + y$ pour $x = 4$ et $y = 1$, les lettres ne prennent, dans chacun de ces cas, qu'une seule valeur.

Le double aspect des expressions algébriques

Beaucoup d'élèves considèrent qu'une écriture contenant un signe opératoire apparent, telle que $4m + 1$, est incomplète. Ils y voient une procédure, quelque chose à faire, et ont tendance à la compléter en écrivant une égalité comme « $4m + 1 =$ la réponse » ou « $4m + 1 = n$ ». Cette vision des choses ne devrait pas nous surprendre, car en mathématiques, la réussite consiste souvent à trouver un nombre unique, et une réponse donnée sous la forme $2 + 7$ (par exemple) est rarement acceptée. En fait, l'écriture $a + b$ indique à la fois une procédure (additionner a et b) et un résultat (somme de a et b). C'est bien cette clarification-là qu'il s'agit d'effectuer. Cette conception procédurale peut encore conduire à remplacer $4 + 7x$ par $11x$, étant donné que dans ce cas, il y a certainement lieu de faire disparaître le signe opératoire apparent « + ».

La compréhension des notations et des conventions

Chez les débutants en algèbre, le fait de savoir décrire verbalement une procédure ne conduit pas toujours à l'écrire correctement sous forme symbolique. Relevons deux erreurs courantes :

- ajouter a et b est traduit par ab ;
- multiplier 7 et $f + 3$ devient $7 \cdot f + 3$.

La première erreur témoigne sans doute de la conception selon laquelle une addition correspond à un assemblage de collections. Quant à l'origine de la seconde, elle est à chercher du côté du calcul numérique. Lors de l'étude de ce domaine, les élèves ne perçoivent pas toujours la nécessité d'utiliser des parenthèses. Ils pensent que les opérations doivent s'effectuer de gauche à droite, ou alors, suivant le contexte, savent quelle opération doit être effectuée en premier. Malgré le fait qu'ils n'utilisent pas de parenthèses, ils aboutissent souvent à des réponses correctes, ce qui n'est pas le cas en algèbre, où l'oubli des parenthèses amène fréquemment à des résultats erronés.

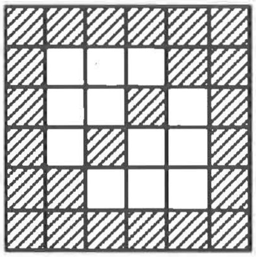
L'algèbre comme outil de communication

L'activité que nous décrivons ici s'inscrit dans un contexte d'approche de l'algèbre. Elle figure sous une forme proche, dans l'excellent ouvrage *Les débuts de l'algèbre au collège*[2], édité par l'Institut National de Recherche Pédagogique.

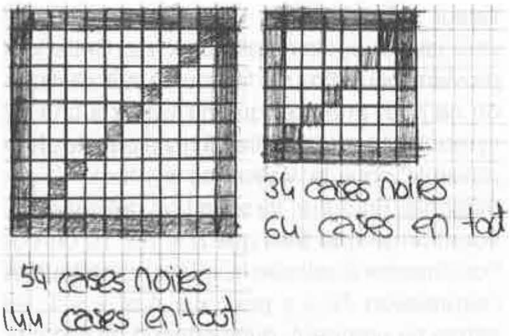
2. COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A. *Les débuts de l'algèbre au collège*, INRP, 1996

Ce carré est formé de petits carreaux isométriques.
Ceux des bords et ceux d'une diagonale ont été hachurés.

Comment calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur ce même modèle?



L'intention poursuivie est de faire prendre conscience aux élèves de la fonction généralisatrice de l'algèbre et de l'économie d'écriture découlant de l'utilisation du langage algébrique. Voici un scénario possible pour la gestion de la classe[3]. Les travaux présentés sont ceux d'élèves de 7e et 8e années. Leur but premier est d'illustrer la multiplicité des niveaux de langage et non pas de refléter les difficultés et erreurs décrites précédemment.



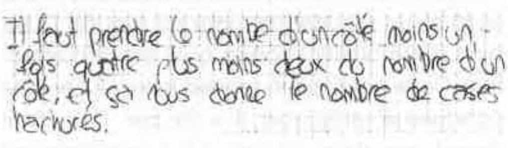
Phase d'appropriation, individuellement

Cette phase a pour but de permettre aux élèves de saisir les caractéristiques de la figure présentée. Elle pourra être laissée à leur charge, notamment s'ils ont déjà rencontré des problèmes proches de celui-ci. Dans le cas contraire, il s'agira probablement de leur suggérer de dessiner quelques carrés de dimensions différentes et de chercher le nombre de petits carreaux hachurés de chacun d'eux.

3. Cette activité est de type « recherche guidée », avec des phases d'autonomie entrecoupées de mises en commun ou incitations du maître. Malgré certaines ressemblances avec les phases d'une situation-problème, elle n'en est pas une, tout simplement parce qu'il n'est pas pensable que les élèves élaborent spontanément des règles et conventions d'écriture que les mathématiciens ont mis des millénaires à adopter. Le langage algébrique s'enseigne plus qu'il ne se construit.

Phase de formulation, par petits groupes

Les élèves sont alors appelés par l'enseignant à élaborer une ou plusieurs méthodes de calcul conduisant au nombre de petits carreaux hachurés de chaque figure construite sur le modèle proposé, puis à la (les) rédiger à leur manière (en français, en langage algébrique…). Pour certains d'entre eux, la tâche paraît au premier abord impossible. Il n'est donc pas rare d'entendre des réactions comme « Oh mais moi, j'en aurai trois pages », « Ce sera tout un poème » ou « Je n'y arriverai jamais ». Les travaux suivants illustrent ce moment clé de l'activité:



On fait le côté du carré fois 4 plus le côté du carré moins 6 = 4x+(x-6)

formule: 4(a-1)+a-2
(a = longueur d'un coté)

il faut faire 5 · nbre de côtés dans un côté – 6 carrés

(nbre □ 1 côté)^2 – (nbre □ 1 côté -2)(nbre □ 1 côté -3)
= nbre □ hachurés

il faut faire : (x-4) · 5 + 14

En général ont fait le nombre de ▨ du bord fois quatre.
La diagonale est formée du même nombre de ▨ que le bord, moins deux ▨ parce qu'ils sont déjà comptés dans le bord. Moins quatre ▨ des coins.

Le passage aux formulations écrites ne peut s'effectuer que si des stratégies de calcul ont été imaginées. Au cours de la phase d'appropriation, il est possible que certains élèves se soient contentés de compter les petits carreaux hachurés des figures qu'ils ont dessinées. Il est alors nécessaire de les inciter à dépasser ce stade en leur demandant de calculer le nombre de carreaux hachurés de carrés de «grandes» dimensions, de sorte que toute représentation par des dessins devienne fastidieuse[4].

4. Si on voulait faire naître la nécessité d'utiliser une formule généralisable, il faudrait donner un problème du genre «Léonie a dessiné une figure construite sur ce modèle. Elle y compte moins de 2002 carrés hachurés. Noémie en a dessiné une autre. Elle y trouve plus de 2002 carreaux hachurés et 15 carreaux de plus que dans celle de Léonie. Quelles pourraient bien être les dimensions des figures dessinées par ces deux élèves ?» Un tel problème peut être résolu par l'écriture de suites fastidieuses de nombres ou par l'application d'une loi générale, qui allège sensiblement la tâche. D'où l'intérêt et l'utilité de cette deuxième méthode.

Phase de mise en commun, collectivement

Durant cette phase, chaque groupe présente sa (ses) méthode(s) à l'ensemble de la classe (au tableau, au rétroprojecteur, sur des affiches...). Le débat qui s'installe alors est généralement très nourri et peut déboucher sur:

- la prise de conscience de l'existence de diverses méthodes;
- la validation ou le rejet de certaines formulations;
- des propositions de réécritures de certaines d'entre elles;
- des demandes concernant la signification de la ou des lettre (s) utilisée(s);
- des questions relatives aux règles d'écriture mathématique;
- la vérification, par le biais du calcul numérique, de l'exactitude des expressions littérales;

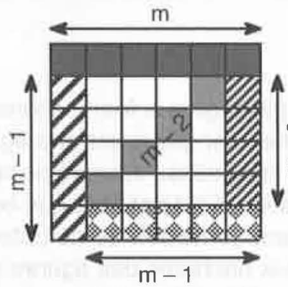
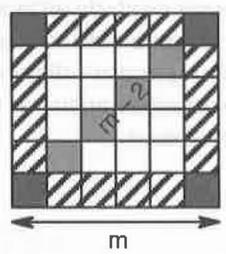
- la mise en évidence de la difficulté d'exprimer une méthode de calcul avec les mots de la langue française (phrases imprécises, lourdeur des expressions, non-dits, vocabulaire équivoque...) ;

- le fait qu'une écriture algébrique permet de communiquer un résultat;

- ...

Phase de recherche d'une nouvelle formulation, par petits groupes

Le cas échéant, les élèves traduisent chaque expression verbale présentée par une formule mathématique. S'ils emploient plusieurs lettres dans une même formule, ce qui est fréquent lorsqu'ils débutent en algèbre, le maître leur demandera de réécrire chacune d'elles en n'utilisant qu'une seule lettre, ce qui conduit par exemple à des écritures du genre:

Avec plusieurs lettres	Avec une seule lettre (suite à la demande de l'enseignant)	Représentation sous-jacente (après discussion avec l'élève)
$m+T+T+d+d$ donne le nombre de carreaux hachurés $m-1=T$ $T-1=d$	$m+(m-1)+(m-1)+(m-2)+(m-2)$	
$m \cdot 4 = B$ $B-4=L$ $L+(m-2)=$	$(m \cdot 4)-4+(m-2)$	

Phase d'institutionnalisation, collectivement

Plusieurs aspects liés à l'écriture d'une formule mathématique pourront alors être institutionnalisés:

- une lettre peut être remplacée par n'importe quel nombre d'un ensemble donné (ici, l'ensemble des nombres naturels);

- le choix des lettres est arbitraire;

- il est nécessaire de préciser ce que représente chacune des lettres utilisées;
- plusieurs formules permettent d'exprimer un même résultat.

Pour conclure

La construction d'une ou plusieurs expressions algébriques généralisant une situation géométrique donnée nécessite d'établir des liens entre un contexte concret et un langage abstrait. Elle permet aux élèves de donner du sens aux lettres et aux signes opératoires qu'ils emploient. Ces symboles interviennent en réponse à l'intention d'exprimer les choses. Dès le moment où il y a accord sur leur interprétation, les élèves ressentent qu'ils disent les choses d'une manière succincte mais exacte. La finalité et l'efficacité de ce type d'écriture, de ces conventions et de cette manière de procéder apparaît ainsi au grand jour. Ce genre d'activité, non formelle et non technique, est primordial dans l'apprentissage de l'algèbre.

(Voir pages 13 à 15)

Solutions des qualifications régionales valaisannes

17e championnat des jeux mathématiques et logiques
13 novembre 2002

N	Solution
1	2, 11, 23
2	8 boîtes
3	14 oeufs
4	13 filles
5	9 h 15
6	58 secondes
7	8 coups
8	15 juin
9	Rosita: tennis, Bernadette: volley, Michèle: basket
10	4 et 7 pièces
11	1, 3, 9 et 27 kg
12	6160 fr.
13	20000 fr.
14	long, long, bref, long, bref