

A propos de la didactique des mathématiques¹

Jean Brun
FPSE, Université de Genève

Si l'on veut bien attacher quelque importance à la variation des vocables utilisés pour désigner un champ d'activité, il n'est pas sans intérêt de noter le renouveau du terme «didactique» à propos des recherches sur l'enseignement des mathématiques. La didactique des mathématiques se définit à la fois par un terrain, l'école, et par une discipline en train de se constituer. Ainsi la création récente d'une revue spécialisée, «Recherches en Didactique des Mathématiques», témoigne de l'existence d'un secteur de recherche autonome, qui produit des travaux expérimentaux spécifiques dans ce domaine. G. Brousseau (1981) dit de la didactique qu'elle «oblige à réorganiser à la fois les mathématiques, la psychologie et la pédagogie, et se constitue en une activité et un domaine de connaissances propres dont aucune composante ne peut être exclue». Mon propos consistera à essayer de caractériser l'activité de recherche en didactique des mathématiques afin de permettre de la situer dans le découpage actuel des champs théoriques en sciences de l'éducation.

Sans vouloir faire une analyse de révolution du mot «didactique» dans l'histoire de la

pédagogie, en bref retour en arrière est toutefois nécessaire pour comprendre l'usage actuel qui en est fait. Dans son «Dictionnaire de la langue pédagogique» (1971), Foulquié lui donne les définitions suivantes :

- «qui concerne ou a pour but l'enseignement;
- technique ou art de l'enseignement;
- étude des méthodes d'enseignement».

On retrouve donc là le double aspect de pratiques d'enseignement et de recherche sur ces pratiques. Mais, après avoir distingué la didactique générale, indépendante des contenus d'enseignement, et la didactique spéciale, qui s'occupe des diverses disciplines enseignées, l'auteur inclut une citation de Debesse qui situe bien la connotation attribuée au terme «didactique» dans les années 60-70; «La pédagogie moderne considère la didactique tout au plus comme un pis-aller parce qu'elle s'appuie surtout sur les mécanismes d'enregistrement mnémique, au lieu de favoriser l'assimilation du savoir par le travail de découverte et de création». (M. Debesse, in *Traité de Psychologie Appliquée*). A didactique est donc associée une conception répétitive, associationniste de l'apprentissage, par opposition à ce qu'on appelle «la pédagogie moderne» censée valoriser la découverte et la création. Vouloir restaurer la didactique, de plus en mathématiques où des années viennent d'être consacrées à des innovations qui se veulent dans le droit, fil de la pédagogie moderne, nécessite assurément quelques explications et mises un point à défaut desquelles le renouveau d'une didactique des mathématiques risquerait d'être perçu comme un sérieux retour en arrière!...

L'analyse didactique se caractérise principalement par la mise en relation de trois éléments :

- les contenus de savoir;
- la situation didactique et ses différentes composantes;
- l'activité cognitive des élèves.

1. Article publié dans *Math-Ecole* no 100-101, novembre 1981, pp 14-20

Les contenus de savoir

Le renouveau du terme didactique en sciences de l'éducation contient une volonté de redonner de l'importance à l'analyse des contenus d'enseignement. Les courants pédagogiques innovateurs ont plutôt mis l'accent sur le développement de l'intelligence et de la personnalité des élèves, opposant même parfois cet objectif à celui de l'acquisition de connaissances, qui se voyait dévalorisé. Dans le cas de l'innovation dans l'enseignement des mathématiques, la réflexion sur les contenus à enseigner a bien été première, et le mouvement réformateur a bien marqué sa volonté d'innover tant à propos des contenus que des méthodes. Mais, avec le recul, il me semble que, si ces deux réflexions étaient bien simultanées dans le temps, elles sont tout de même restées relativement indépendantes sur le fonds. En effet la logique selon laquelle s'effectuait la réflexion sur les contenus à enseigner était fondamentalement celle d'une mise à jour des connaissances constituées, en substituant un découpage du savoir à un autre, sans changer la conception même de ce découpage. Celui-ci était livré d'emblée comme la nouvelle matière à enseigner, sur laquelle on appliquerait une pédagogie moderne, active, etc. En ce sens on peut parler de relative indépendance des contenus et des méthodes d'enseignement. Or, le projet de la didactique est de mener une réflexion qui articule l'aspect conceptuel avec les situations d'enseignement qui lui donnent une signification. Comment ?

Tout d'abord, en ne prenant pas tel quel, au premier degré, le découpage des contenus proposé, et en ne limitant pas l'analyse aux contenus des programmes, même de ceux les mieux modernisés. En effet, restreindre l'analyse des contenus d'enseignement à ce cadre c'est réduire sérieusement le champ d'expériences à partir duquel les élèves construisent leurs connaissances. Au nom de quoi pourrait-on affirmer que les contenus des programmes fixent les limites dans lesquelles les

élèves élaborent leurs représentations des concepts mathématiques ? Ce serait faire fi des expériences que ces élèves possèdent de la réalité, autres que leurs expériences de la salle de classe. Au plan des contenus, un des défis posés à la recherche en didactique consiste précisément à élargir le découpage canonique du discours mathématique pour y intégrer ce qu'on pourrait appeler le discours mathématique de l'élève. Face à la question de savoir quel est le découpage pertinent des contenus mathématiques pour une étude en didactique, j'adopterai le point de vue de G. Vergnaud (1980) pour qui « cet objet d'étude ne doit pas être trop petit, ni émietté en un ensemble non coordonné de savoirs et de savoir-faire, comme c'est malheureusement trop souvent le cas dans les études d'évaluation sur l'enseignement. Il serait vain par exemple d'étudier séparément l'acquisition des notions de fraction, de rapport, de division, de proportion, de fonction linéaire, ou bien dans un autre registre, celles de distance parcourue, de vitesse, de temps, de force et d'accélération. Dans l'étude des contenus une autre exigence consiste à prendre en considération ce que Y. Chevallard (1980) appelle « la transposition didactique ». Il la définit en ces termes : « Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets (enseignement. Le « travail » qui, d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique ».

Celle réflexion sur les contenus amène également à situer la place des mathématiques dans la formation des maîtres. Il est important que leur approche des mathématiques ne soit pas simplement le décalque du découpage imposé par le programme. Leur maîtrise des contenus à enseigner passe par une pratique des mathématiques qui déborde la préparation des activités et notions proposées dans les moyens d'enseignement, afin de prendre une distance avec les objectifs

parcellisés. Surtout c'est à partir d'une activité mathématique qui leur soit propre qu'ils pourront retrouver ce qui est derrière la forme donnée aux contenus d'enseignement et faire l'envers du parcours de la transposition didactique.

La situation didactique et ses composantes

Un des principaux problèmes de renseignement des mathématiques consiste à trouver des situations didactiques qui permettent de faire évoluer les procédures et les représentations des élèves. L'activité de résolution de problème est décisive dans cette évolution et elle est à considérer comme une fin en soi. L'analyse de cette activité prend alors une place centrale dans la recherche en didactique; elle consiste en la description des procédures de résolution et en leur catégorisation. Mais ceci ne suffit pas. Il faut surtout relier ces procédures aux processus qui les déterminent et l'analyse de la situation s'impose, comme condition de la compréhension des productions des élèves. On parlera de situation didactique avec G. Brousseau (1978) dès le moment où il y a «projet, le plus souvent social, de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution» (p. 24). Cette situation didactique au sens large consiste en un ensemble d'interactions entre le maître, les élèves, les contenus de savoir et le milieu. Par milieu, on peut concevoir le système éducatif en général, ou l'organisation très particulière d'une activité choisie par le maître. Cette organisation définit la situation didactique au sens strict, ou «situation-problème». G. Charrière (1980) précise encore davantage cette notion de situation et en fait un moyen didactique qu'il distingue d'autres moyens comme les problèmes, les exercices, les jeux, les centres d'intérêt, les ateliers. Il parle alors de «technique des situations». Avec les maîtres et les maîtresses de méthodologie du Centre Pédagogique de Geisendorf et du Service de la Recherche Pédagogique, à Genève, nous avons mené une série d'observations. dans

ce contexte de la technique des situations conçue par G. Charrière. L'observation en classe est une méthode essentielle de recherche en didactique, principalement pour l'analyse des composantes des situations. Pour que l'observation puisse être fructueuse, il faut avoir effectué une première analyse préalable de la situation et ainsi disposer d'un cadre interprétatif pour observer les conduites des élèves. En nous appuyant sur des travaux menés en psychologie du travail (Leplat, 1976) nous avons adopté une méthode de description des situations afin de mettre de l'ordre dans le grand nombre de variables en jeu, qui frappe tout observateur en didactique. Nous avons choisi quelques éléments-clefs pour caractériser les conditions que les élèves doivent intérioriser pour avancer dans la résolution du problème posé par la situation. Ce sont: la consigne, les règles du jeu, le dispositif matériel, la relance du maître, les modes d'échange entre élèves. La mise au point de ces éléments, l'anticipation, puis la vérification, de la manière dont ils s'articulent lors du déroulement de la situation constituent, selon nous, les principales conditions de la gestion de la situation par le maître et de la compréhension de ce que font les élèves. Cette phase de description fournit, en plus de l'analyse conceptuelle de la tâche, les leviers maîtrisables de la situation avec lesquels on pense pouvoir comprendre les procédures des élèves et intervenir pour les faire évoluer.

A titre d'exemple, prenons la situation suivante: «trouver le nombre de dominos qu'il y a dans une boîte de dominos, sans l'ouvrir.» Dans cet énoncé, seule la consigne est explicite. Les «règles du jeu», elles, sont implicites. Une première décision didactique concerne la place à donner à la recherche, par les élèves, de l'information pertinente. Une autre décision aurait été d'explicitier d'emblée les règles du jeu, à savoir qu'un domino est formé de deux parties et que sur chacune d'elles se trouve un chiffre compris entre 0 et 6. Une observation effectuée en

sixième année a montré l'intérêt de laisser ces règles du jeu implicites à condition qu'une première étape de l'animation soit consacrée à dégager, lors d'échanges oraux dans la classe, les informations utiles et pertinentes. C'était en l'occurrence une manière de permettre à chaque élève de s'approprier les données du problème, de meilleure façon que par un simple énoncé. Cette description de la situation est à compléter ensuite par l'analyse de l'activité cognitive des élèves. En retour on obtient une meilleure compréhension de la situation et du rôle joué par les éléments qu'on a décrits.

L'activité cognitive des élèves

A cette phase de l'analyse didactique, le but est de voir comment les éléments de la situation qu'on a décrits fonctionnent comme composantes de l'activité cognitive. Celle-ci est constituée par l'interaction entre la situation et les élèves : l'analyse de la situation et celle de l'activité des élèves sont interdépendantes. En effet la situation est conçue comme le lieu où l'élève actualise ses connaissances par l'intermédiaire des représentations dont il dispose. Il met alors en œuvre des procédures d'action ainsi que de symbolisation. En même temps, il s'approprie de nouvelles représentations à partir des exigences de la situation. Ainsi il enchaîne des procédures soumises à une adaptation constante. Actualiser est donc à comprendre au double sens de rendre manifeste et de réviser, ou mettre à jour ces représentations, et ces connaissances, à partir des données de la situation. Il ne faut pas entendre par actualisation que tout est déjà là dans la tête des élèves et que la situation n'est qu'un révélateur : bien au contraire, elle offre une confrontation à leurs « modèles implicites » et par là-même peut entraîner leur évolution. Dans cette analyse de l'activité cognitive, le déroulement temporel de la situation constitue un aspect primordial. La question n'est plus celle des schémas ou invariants opéra-

toires que l'on cherche à dégager de l'analyse des conduites observées à travers une situation expérimentale. En didactique, la question devient celle du rapport entre les caractéristiques d'une situation construite pour enseigner quelque chose et l'actualisation des représentations des élèves tout au long de la résolution de la situation-problème. Dans ce rapport s'effectue l'appropriation des connaissances mathématiques.

Reprenons l'exemple de la situation du nombre de dominos à trouver sans qu'on les voie. Nous avons observé, sur une heure de temps les modifications processives des procédures des élèves en fonction des relances maître et des échanges qui ont eu lieu à l'intérieur du petit groupe. Un élève a tout d'abord identifié le problème à une « combinaison » et a effectué le produit $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7 \times 0$. Un autre a déclaré : « il faut faire un arbre ». Mais lequel ? Un troisième a débuté avec un tableau cartésien. La procédure du produit donnant comme résultat un très grand nombre (la multiplication par zéro reste encore un mystère !), elle a été abandonnée la première. Celle de l'arbre, malgré son insuccès, car l'arbre factoriel avait été choisi, est restée très solide, bien que remise en question devant les contradictions qui apparaissent entre la construction de l'arbre et sa lecture. Elle a même résisté au succès obtenu par l'élève qui utilise la procédure du tableau cartésien et qui expliqua comment on parvenait au résultat. Très souvent nos observations nous ont révélé ce phénomène important : la résistance d'une procédure, qui chemine selon sa propre logique. Les élèves engagés dans la recherche d'une solution, ne se satisfont pas des modèles des autres ni de celui du maître, même s'ils peuvent les conduire à la réussite lorsqu'ils ne se les sont pas véritablement appropriés. Les exigences de la situation nécessitent qu'ils investissent leurs propres représentations du problème. Lorsqu'il y a échange ou emprunt de procédures c'est suite à des discussions qui relèvent d'un processus de preuve plutôt que de simple

copie. Les composantes de la situation sont décisives dans la mise en œuvre de ce processus.

Dans l'analyse de l'activité des élèves une attention particulière doit être portée aux représentations symboliques. En effet l'introduction de nombreux diagrammes, schémas ou « écritures symboliques » selon le terme de C. Laborde, peut entraîner des confusions sur le statut de ces symbolismes et sur leur place dans l'activité mathématique. G. Vergnaud (1981) précise bien : « Faute de faire suffisamment la distinction entre le concept et sa représentation, c'est-à-dire entre le signifié et le signifiant, il arrive fréquemment qu'on prenne les symboles et les opérations sur ces symboles pour l'essentiel de la connaissance et de l'activité mathématique, alors que cette connaissance et cette activité se situent principalement au plan conceptuel ». Une fois précisée la place des représentations symboliques, leur étude reste une question didactique importante car la construction des concepts mathématiques s'explique et s'effectue par des formulations caractéristiques, qui combinent le langage naturel et les « écritures symboliques ». La formulation d'une connaissance mathématique n'est pas la simple expression, comme allant de soi, d'une conceptualisation déjà formée. Elle a ses propres règles d'élaboration, en liaison avec la construction conceptuelle. Trop souvent la question didactique est posée en des termes tels que « le passage au symbolisme », et considérée comme découlant naturellement de la maîtrise des notions par simple association des symboles adéquats. Or la question n'est pas si simple, et les maîtres le savent bien. Trois aspects sont à considérer :

- l'aspect cognitif : l'activité de symbolisation est liée au sens attribué aux exigences cognitives de la situation et à l'identification que l'élève est à même de faire de la connaissance en jeu. Ainsi utiliser l'arbre dans la situation des dominos nécessite qu'on se détache du modèle de l'arbre factoriel ;

- l'aspect culturel : C. Laborde (1980) a bien montré l'importance de l'analyse historique des systèmes de signes et de leur syntaxe. L'élève qui s'y voit confronté s'en fait sa propre représentation, en fonction de ce qu'il est à même d'y investir et de la situation dans laquelle il se trouve. Il ne peut se l'approprier d'emblée. Ainsi, reconnaître les signes $+$, $-$, $=$ ne suffit pas. Par exemple l'élève n'admettra pas que le signe $=$ soit mis au début d'une équation parce que pour lui il veut dire : à la fin. Ou encore il ne pourra accepter $3 + 5$ comme équivalent à $5 + 3$ parce que dans le premier cas il estime que le signe $+$ n'est pas correct car, dit-il « 3 n'est pas plus que 5 » ;
- l'aspect social des échanges inter-individuels. Dans un contexte où il y a confrontation des points de vue avec d'autres élèves, la mise au point des codes appropriés se développe (Schubauer-Leoni. Perret-Clermont. 1980). Ainsi cherchons-nous des situations où sont réalisées différentes conditions d'interaction et de communication entre enfants pour favoriser la production et révolution d'écritures arithmétiques.

Je terminerai cet inventaire de quelques caractéristique de la recherche en didactique des mathématiques par une remarque sur les méthodes utilisées J'ai fait principalement allusion à l'observation et l'expérimentation en classe. C'est une méthode indispensable, mais elle comporte aussi des limites. Comme l'indique G. Vergnaud (1981b) « L'expérimentation en classe n'est pas pour autant la voie royale de la recherche, d'une part parce qu'elle ne permet pas, même avec de bons moyens d'enregistrement, d'analyser dans le détail tous les processus en jeu, d'autre part parce qu'elle est d'autant meilleure qu'elle peut s'appuyer sur les résultats obtenus par d'autres méthodes (entretiens individuels, expériences planifiées). En retour elle permet de déceler des phénomènes qu'il serait intéressant de regarder avec la loupe des entretiens individuels. En tout cas on ne voit pas

comment la recherche en didactique pourrait faire l'économie de l'expérimentation en classe». Ces observations doivent être préparées par l'analyse de la situation et la mise au point des questions et des anticipations qu'on peut faire à propos des conduites des élèves. Cette préparation est capitale, faute de quoi l'observation reste anecdotique. Nos efforts en méthodologie de la recherche en didactique

des mathématiques doivent tendre à la fois à développer l'observation et l'expérimentation en classe en même temps qu'à utiliser des méthodes diverses et complémentaires, en particulier les entretiens individuels. Une seule méthode ne saurait à elle seule répondre aux exigences que réclame cet objet d'étude extrêmement complexe qu'est l'appropriation des connaissances mathématiques.

Références

BROUSSEAU G. 1978. *L'observation des activités didactiques. Enseignement élémentaire des mathématiques*. IREM Bordeaux 18, 22-43.

– 1981 *Suggestions pour un programme de didactique pour la formation initiale des professeurs de mathématiques du second cycle du second degré*. Bulletin APM 453-462.

CHARRIERE G. 1980. *Exposé sur la technique des situations*. FPSE.

CHAVALLARD Y. 1980. *Cours sur la transposition didactique. Première école d'été de didactique des mathématiques*. Chamrousse.

CONNE F. 1981 *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse de doctorat. FPSE, Université de Genève.

FOULQUIE P. 1971. *Dictionnaire de la langue pédagogique*. PUF, Paris.

LABORDE C 1980. *Communication au IVe Congrès ICME*. Berkeley.

LEPLAT J. 1976 *Analyse du travail et genèse des conduites*. *Revue internationale de psychologie appliquée*. 25.1, 2-14.

SCHUBAUER-LEONI, M.-L. et PERRET-CLERMONT, A.-N. 1980. *Interactions sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs*. *Recherche en didactique des mathématiques*, 1, 3. 297-343.

VERGNAUD G., DURAND C. 1976. *Structures additives et complexité psychogénétique*. *Revue française de Pédagogie* 36, 28-43.

VERGNAUD G., ROUCHIER A. et al. 1979. *Acquisition des structures multiplicatives dans le premier cycle du second degré*. IREM d'Orléans.

VERGNAUD G. 1980. *Didactique des mathématiques et psychologie. Problèmes et méthodes*. Actes des Journées sur l'Education Scientifique II. Chamonix, 183-198.

– 1981a. *L'enfant, la mathématique et la réalité*. P. Lang, Berne.

– 1981b. *Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques*. Conférence in Actes du Colloque PME. Grenoble, 7-17.