70

MATH ECOLE

1975 NOVEMBRE
14e ANNÉE

MATH ECOLE 70

14e ANNÉE NOVEMBRE 1975

Mathématique appliquée

Il est facile, malheureusement trop facile de ridiculiser les problèmes d'arithmétique classiques. N'ont-ils pas été imaginés dans le but louable d'apprendre aux enfants à utiliser les mathématiques ?
Cela dit, je me permettrai tout de même d'en faire ici la critique. «Un étang rectangulaire est long de 25 m et large de 10 m. Quelle distance doit parcourir Pierre pour en faire le tour ?» Un tel problème n'est pas de ceux qui se présentent réellement. Sa résolution ne peut apprendre aux élèves à appliquer les mathématiques à la réalité. En effet, la description verbale de la situation présentée dispense l'élève de se poser toute une série de questions qu'il devrait se poser dans un cas réel. Par exemple: cet étang peut-il être assimilé à un rectangle ? (Au fait: comment s'y prend-on pour s'assurer qu'une pièce est vraiment rectangulaire, au moment de commander un nouveau tapis de fond ?) Ou: à quelle distance du bord Pierre marche-t-il ? Le périmètre du rectangle donné est-il une bonne approximation du chemin vraiment parcouru par Pierre ?
Il faut se rendre à l'évidence. Un tel problème se réfère à un monde conventionnel. Tout se passe comme si l'on demandait aux élèves une réaction automatique aux mots «long», «large» et «tour», réaction qui consiste à se rappeler que le périmètre d'un rectangle s'obtient en additionnant deux fois sa longueur et deux fois sa largeur, puis à faire le calcul. Le réel lui-même n'intervient pas dans le raisonnement. En voici une autre illustration, citée il y a quelques années par C.F. Landry: «Ton papa te donne 2 lapins, et ton parrain t'en donne encore 3. Combien en as-tu maintenant ?» Dans l'esprit du maître cet énoncé était à peu de choses près l'ordre d'additionner 2 et 3. Mais l'élève a répondu «6»... car il en avait déjà un !
Je crois que l'apprentissage de l'application de la mathématique au monde réel est l'un des buts principaux de notre enseignement. On vient de voir que les problèmes qu'il pose n'ont pas été vraiment résolus dans le cadre de l'arithmétique traditionnelle. Le nouvel enseignement réussira-t-il mieux ?
Il semble bien qu'il faille encore beaucoup réfléchir à la question. Certains signes annoncent un progrès. De plus en plus, les petits élèves ont l'occasion de manipuler des objets. Dans les cas favorables, ils peuvent de la sorte exercer la démarche de base du travail scientifique: expérimenter, observer, émettre une hypothèse, en déduire des conclusions et les vérifier par l'expérience. On note une tendance à fournir des données graphiques, ce qui est déjà une façon d'éviter certains des inconvénients liés aux énoncés verbaux. On rencontre des données relativement vagues ou incomplètes, qui amènent les élèves à les discuter, à les préciser ou à se renseigner. Dans la méthodologie romande figurent des mesurages [1] qui, comme dans la réalité, donnent une «fourchette» et non pas un nombre bien déterminé.
Les nouveaux programmes tendent à munir les élèves d'outils de pensée particulièrement puissants, comme les notions de fonction, de relation d'équivalence, les divers types de représentations graphiques, le calcul bien sûr. Il ne s'agit pas seulement de faire étudier ces matières pour elles-mêmes, mais surtout d'exercer les élèves à les utiliser pour coder la réalité, en vue de la décrire et de faire des prévisions à son sujet.

Théo Bernet

[1] Le mot est dans le dictionnaire !

A propos de la mesure d'aire[1]

par Marie-Claire Andrès, Arlette Boget, Marcelle Goerg et Nadia Guillet

Sections selon une diagonale du parallépipède droit

L'activité relatée ci-dessous a été pratiquée dans une classe genevoise de deuxième année primaire. Un groupe de 13 enfants réunis autour d'une table y a participé et le travail a duré environ 60 minutes.
Cette séance a été précédée de deux autres, l'une permettant d'observer les enfants face à un problème de conservation de l'aire, l'autre laissant les enfants réagir à l'observation d'un parallélipipède droit et de ses sections selon un axe.

Matériel:
— 1 parallélipipède de 14 cm/9 cm/6 cm (bloc de bois)
— 2 sections selon la diagonale: 14 cm/9 cm/cm 16,64...
— des surfaces de carton rectangulaires (plusieurs de chaque espèce):

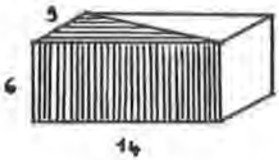
14 cm / 9 cm	*2 cm / 3 cm*
14 cm / 6 cm	*2 cm / 14 cm*
9 cm / 6 cm	

— la surface pouvant recouvrir la face diagonale n'est pas donnée.

Les enfants ont donc déjà examiné le parallélipipède droit au cours des deux premières séances (4.2.1975 et 21.2.1975).
Dès que la maîtresse dépose le solide et les surfaces correspondantes sur la table, les enfants se souviennent des activités antérieures, s'expriment spontanément à ce sujet et essaient de reformer une «boîte» susceptible de contenir le bloc.
La comparaison de la boîte et du solide fait prendre conscience des notions de vide, de plein, d'épais, de mince, notions exprimées dans le langage des enfants.

Déroulement proprement dit de la séance (14.3.1975):

La maîtresse demande aux enfants ce qui se passerait si un menuisier sciait le bloc de la façon suivante (le geste de la main en suivant la diagonale de la grande face):

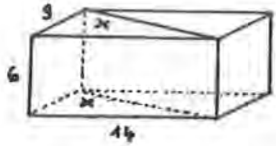


[1] Extrait d'une recherche dirigée par M. L. Pauli, professeur à la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation, Genève, octobre 1975.

M: — Est-ce que vous pouvez me dire ce que représente cette partie ?
E : — C'est la moitié.
E : — Et «*ils*» ont une forme de triangle.
M: — Partout ?
E : — Non, seulement cette partie (il montre la partie supérieure du parallélipipède).
E : — Oui, oui c'est un triangle.
M: — Combien de faces a ce triangle ?
E : — Une... deux...

(L'enfant montre la face supérieure et la face inférieure).

Là et dessous



M: — Et des autres faces du bloc, qu'en pensez-vous ?
E : — Elles resteront entières.
M: — Si je détache ce morceau, combien aura-t-il de faces ?
E : — 3, oui 3 (avis de plusieurs enfants).
E : — Mais un enfant:
1, 2, 3, et un quatrième dessous.
M: — Vous êtes d'accord avec votre camarade ?

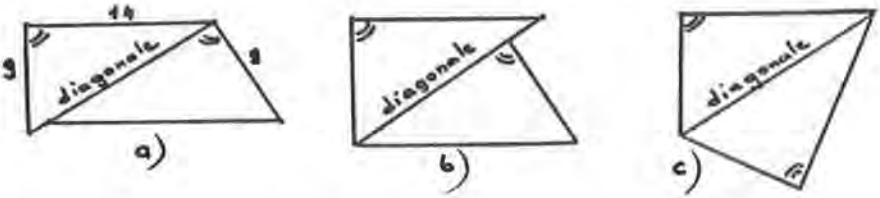
Les enfants vérifient et approuvent.

Signalons que les enfants ne sont pas encore en présence des deux sections du solide et que, par conséquent, ils raisonnent par anticipation. Il en est de même en ce qui concerne la discussion suivante qui s'établit entre les enfants.

M: — Le bloc entier, lui, combien de faces a-t-il ?
E : — Il a 6 faces.
E : — Moi, je crois 3 (la moitié de 6 c'est 3).
E : — Non, quand on coupe, ça fait encore une *face*.
E : — Il y a toujours 4 faces.
E : — 5.
M: — Explique-nous, ce que tu voulais dire quand tu disais: «quand on coupe, il y en aura une de plus» ?
E : — ...
M: — On va contrôler.

La maîtresse dépose devant les enfants les deux sections du solide.
Les enfants jouent avec et essaient de reformer le parallélipipède entier.

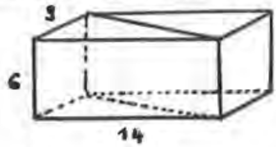
— tâtonnements —



Les enfants rient.

M: — Qu'est-ce qui ne va pas ?

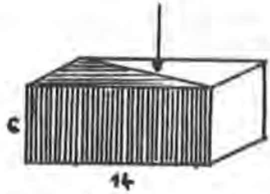
Un enfant s'empare des sections, les assemble pour reformer le parallélipi-



M: — Qu'est-ce qui vous a fait rire ?
E : — Ce n'était pas de la même grandeur (côté: 14 < diagonale de la section).
M: — Que pourrait-on dire de cette face ?
(La maîtresse montre la face de la diagonale).
E : — Elle n'est pas de la même grandeur que celle-ci (face: 6/14).

Il est intéressant de noter que c'est le tâtonnement par manipulation qui provoque la découverte fortuite que la face diagonale est plus longue que la plus grande dimension du parallélipipède (14 cm).

M: — Et si nous comptions les faces des morceaux ?
E : — Il y en a 10: 5 et 5.
E : *(Un autre)* — ... et là: 6 (il montre le parallélipipède entier).
M: — Quelle drôle d'histoire !
E : — Ça fait 4 de plus.
E : — Mais ça, c'est accroché ensemble ! (il montre la diagonale).



M: — Si je voulais recouvrir une de ces parties (elle désigne une section du parallélipipède)...
E : — Il faut 1 triangle, 1 petit machin (rectangle 6/9)...

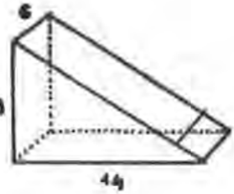
Les enfants s'emparent des blocs, les touchent, les retournent.

M: — Voilà des formes, des surfaces (rectangles 9/14; 6/14; 9/6), comment faire ?
E : — On va couper(il prend un rectangle 9/14), on doit couper là (il montre la diagonale du rectangle). (On fait un trait et on coupe).
M: — Comment appeler la partie que tu veux couper ?
E : — Un demi-triangle.
E : — Non, un demi-rectangle.

La maîtresse tend un autre rectangle 6/14:

M: — Et ce morceau, comment l'appelez-vous ?
E : — Un rectangle.

(L'enfant le prend, le place sur la diagonale de la section du parallélipipède).



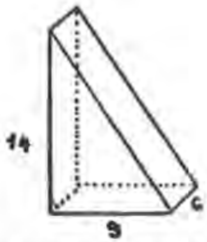
E : — Il est trop petit.
E : — Parce que ça (la diagonale de la section du parallélipipède) c'est *penché*, alors c'est plus long que tous les autres côtés.

Les enfants semblent avoir oublié la découverte faite précédemment lors de la manipulation, découverte qui les avait surpris.

Les enfants essaient de trouver un autre rectangle qui pourrait peut-être recouvrir cette partie.

E : — On pourrait mettre 2 morceaux comme ça (9/6), suggère l'un d'eux.

Ils prennent la section, placent sur une feuille de papier la partie 9/6 et dessinent la forme en tournant autour puis une seconde qu'ils font en tournant autour du rectangle découpé.



E : — Si on n'a pas essayé, on ne peut pas savoir.
E : — Si on tourne autour (du plot), ça va faire plus grand.
E : — Il faudrait faire un *trou* dedans et ça ferait plus petit.

Puis, les enfants essaient les 2 morceaux obtenus et constatent en les plaçant sur la diagonale de la section du parallélipipède que ça ne va pas.

E : — Moi, je *fais* le rectangle (diagonale). (Puisqu'il n'existe pas). J'en fais 2 aussi.

Les autres, en chœur: ce n'est pas la peine.
Il prend la section du parallélipipède et place la diagonale sur le papier pour obtenir la forme exacte de cette face, dessine et découpe.

M: — Est-ce qu'on a maintenant tous les morceaux ?
E : — Non, ça manque encore dessous.

On cherche la surface correspondante et on la place.

M: — Voilà la boîte, combien de côtés a-t-elle ?
E : — 5.
Dans cette précédente phase, les enfants ont fait tout ce qui était nécessaire pour vérifier le nombre des faces de la section.
Nous résumons la phase suivante ainsi:
Etant donné qu'auparavant la différence entre le nombre des faces des 2 sections (10) et celui des faces du solide entier (6) a surpris les enfants, il est essentiel de clarifier deux points:
- *lorsqu'on veut recouvrir le solide entier à l'aide des surfaces des sections, les faces diagonales sont en supplément (plus on sectionne un solide, plus la surface totale augmente);*
- *il intervient la notion d'équivalence qui, à 2 triangles, fait correspondre un rectangle (face 9 cm/14 cm).*

La suite de l'activité est une approche de la mesure.

M: — Pourrait-on recouvrir toutes les faces du bloc entier avec une seule et même forme ?

Un enfant prend le plus petit rectangle 9/6 et le pose sur le plot en cherchant à l'utiliser partout pour recouvrir celui-ci.

E : — Non, c'est impossible.
E : — Moi, je dis non aussi.

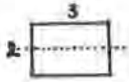
Il est à remarquer que les enfants, ayant à disposition des surfaces de 9cm/14 cm, 6 cm/14 cm et 9 cm/6 cm, utilisent spontanément la plus petite d'entre elles et déduisent qu'il est inutile d'essayer avec les plus grandes.

La maîtresse sort d'une enveloppe des bandelettes de 2/14.

M: — Et avec ça ?
E : — Non.
E : — Il faut découper en bandelettes ce rectangle 9/6.

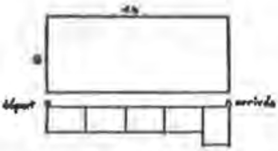
La maîtresse sort d'une enveloppe des bandelettes (2/3).

M: — Moi, j'ai coupé des bandelettes, peuvent-elles être utilisées ?
E : — Oh oui.
E : — On pourrait les couper comme ça.
(pour obtenir 1/3).



M: — Oui, mais ces bandelettes peuvent-elles vous servir pour recouvrir toutes les faces du plot ?
E : — Oui.
E : — Peut-être ?
E : — Pas sûr, on a déjà fait des *ratés*.
E : — Moi, je dis comme ci, comme ça !

Un enfant essaie de les aligner sur la table en projetant les points de départ et d'arrivée des bandelettes d'après le plot. Il ne tient compte que de la longueur.



Les 2 plans (vertical et horizontal) gênent les enfants.

E : — Non, ça ne va pas.
M: — On pourrait les mettre sur le plot.

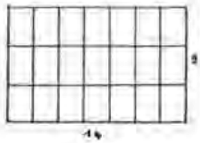
Les enfants font basculer le plot pour que la partie 6/14 soit horizontale.
On essaie.

E : — Oui, ça va aller.
E : — Si ça réussit, c'était la même chose avant (voir ci-dessus).
E : — C'est *obligé*, mais oui ça réussit.
Mais si ça joue, on peut, ça doit aussi jouer avec les autres «moyens».
(Il doit penser aux bandelettes 2/14 présentées par la maîtresse).
M: — Avec ces mêmes morceaux, peut-on recouvrir les autres faces ?

Les enfants prennent des rectangles (2/3) et essaient de recouvrir la face (9/14).

E : — Il en manquera, 3 peut-être ?
E : — En tout, il y en a 24.

Les pièces sont disposées ainsi:



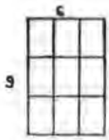
E : — Tu les a comptées ?

Et l'enfant montre qu'on peut compter chaque rectangle du bout du doigt: 1, 2...

E : — Non, pas comme ça (et il montre les 7 rangées de 2/3), ça fait 7 lignes et 3 fois 7 ça fait 24.
E : — Non, 21.
E : — 7 + 7 ... 14
14 + 7 ... 21.
M: — Alors pour recouvrir cette partie, il faut 21 pièces et pour celle-ci... (elle désigne la partie (6/14) déjà mesurée avec les petits rectangles mis dans l'autre sens).
E : — Pour cette face, il faudra une ligne de 7 de moins.

Il contrôle en prenant un rectangle de carton de 6/14 qu'il dépose sur les bandelettes alignées et montre à ses camarades que 7 rectangles (1 ligne) dépassent. Il les regarde et dit:

E : — Donc 7 et 7 ça fait 14.
E : — Oui, il en faut 14 approuve une autre enfant.
M: — Et pour cette face ? 9/6.
E : — Il en faut 9.
parce que
3 et 3 et 3,
ça fait 9;
6 + 3 ça fait
aussi 9.



L'enfant prend le rectangle 2/3 et dit:

E : — Pour le plot entier, il en faut... 66, non 85...
M: — Pourquoi ?
E : — Parce que 21 et 21... 42.

(Il désigne les 2 faces 6/14: dessus et dessous. 14 et 14... 28.
(Il désigne les 2 faces 9/14) 42 et 28 ça fait 70 et là (faces 9/6): 9 et 9... 18
70 + 18... 88.

E : — Peut-être 89, parce que 9 c'est pas 10. murmure un autre élève.
Un autre s'écrie:
Pour les deux plots cela ferait: 176.

Tout compte fait, on ne calcule pas trop mal ! D'autant plus que les enfants ne disposent pas des surfaces en quantité suffisante pour pouvoir recouvrir complètement et simultanément toutes les faces du solide.

M: — Si je prends tous ces morceaux...
E : — Les 88 :
M: — ... pensez-vous que je pourrai recouvrir les 2 parties de ce plot (parallélipipède sectionné).
E : — Ah, je ne crois pas.
E : — Il en faudra plus.

Entre temps, un enfant prend les 2 parties dans ses mains et les assemble diagonale contre diagonale, après avoir retourné une des sections du parallélipipède ce qui donne:

Il regarde la figure obtenues avec étonnement.

M: — S'il vous faut 68 morceaux pour recouvrir le plot entier, combien vous en faudra-t-il pour recouvrir la moitié du plot.
E : — Il en faudrait 46...

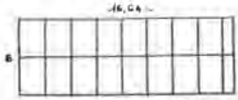
L'enfant qui observe depuis un moment la figure ci-dessus qu'il avait composée dit: oui, mais il faudrait des *pointus.*

On constate ici que, dans une exploration pratiquée en groupe, la maîtresse ne peut pas tirer parti immédiatement de toutes les remarques faites par les enfants. celles-ci peuvent constituer des pistes de travail à reprendre plus tard.

La maîtresse prend une des parties sectionnée et montre la face «diagonale», qui n'a pas encore été recouverte par les enfants.

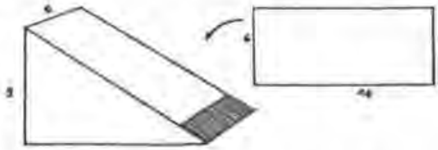
M: — Avec vos 46 rectangles (44 !), pouvez-vous vraiment recouvrir toutes les faces, y compris celle-ci ?
E : — Il en faudra un peu plus. 72 peut-être ?

Les enfants essaient de recouvrir avec les rectangles 2/3, la face de la diagonale.



E : — 2 fois 8... et un peu plus.
M: — Donc les 46 rectangles sont-ils suffistnts pour recouvrir le bloc entier ?
E : — Il en faut *plus* que 46 en tout.
E : — Il en faut 14, comme pour l'autre (surface 6/14).

La faute de calcul l'amène à la comparaison suivante:

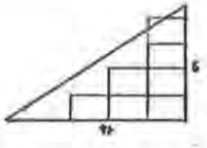


Les enfants constatent que la diagonale est plus longue, qu'il faudra plus de rectangles.

Au niveau de la manipulation, cette constatation est suffisante.

En manipulant les sections du bloc ils mettent la partie sectionnée du rectangle 9/14 dans une autre position, ce qui les surprend. Ils décident de la recouvrir aussi.

Ils prennent des morceaux (2/3) et essaient de les placer.



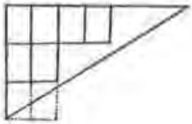
6 rectangles sont placés correctement mais le 7e ne convient pas.

E : — Il faut couper le morceau.
E : — Mais, ce grand triangle, c'est le rectangle coupé !

Cet enfant a l'intuition qu'on pourrait trouver la solution plus simplement, c'est-à-dire en prenant la moitié de la mesure du rectangle de 9 cm/14 cm, soit la moitié de 21. En troisième année, lors d'une recherche analogue, les élèves conduiront ce raisonnement jusqu'au bout et trouveront le nombre 10 ½.

Les autres continuent le travail.

E : — On peut de moins en moins en mettre d'entiers, il faut couper.
E : — Si on les mettait dans l'autre sens ?



E : — Ça fait un escalier.
E : — C'est chaque fois un petit truc de moins.
M: — Un truc ?
E : — Un petit triangle de moins.

En effet la moitié des 21 morceaux du rectangle 9/14 pose un problème au niveau de la manipulation.
De petits morceaux en petits morceaux, on trouve qu'on pourra utiliser 10 rectangles et un morceau d'un autre.

Réflexions suscitées par cette activité:

Un tel travail répond aux objectifs de l'enseignement de la mathématique moderne énoncé par R. Hutin dans son ouvrage «L'enseignement de la mathématique», p. 39:

- *— Le développement du raisonnement logico-mathématique*
- *— La construction d'un mode d'appréhension et d'organisation du réel.*
- *— Le développement des capacités d'adaptation à des situations nouvelles, des aptitudes à la découverte de stratégies.*
- *— L'encouragement à l'activité, à la curiosité, à l'autonomie.*
- *— L'acquisition d'un nombre restreint de connaissances de base.*

Nous pouvons constater qu'effectivement la découverte provient des enfants eux-mêmes qui, motivés, prennent l'initiative de la transmettre avec leur propre langage. Cette émulation entre élèves permet une progression naturelle à la mesure de chacun et en accord avec le groupe.

Cette organisation offre plusieurs avantages. Chaque élève a la possibilité de participer pleinement au travail du groupe. Au sein d'une petite équipe, l'enfant ose donner son idée, manipuler, contredire, interroger, progresser à son rythme, régresser si c'est nécessaire, réagir spontanément au gré de l'évolution de la situation du moment. Le raisonnement des enfants évolue précisément parce qu'ils ont le pouvoir de confronter entre elles différentes possibilités d'actions et leurs résultats.

D'autre part, la disposition des élèves en cercle autour du matériel provoque des conflits dus à la perception différente selon les points de vue. D'une façon générale, cette méthode de travail accepte les conflits pour autant que le niveau de développement de l'enfant permette de les surmonter.

Notre objectif était de provoquer la découverte d'une unité de mesure d'aire non conventionnelle. Nous n'avons jamais proposé de moyen de mesure.

Comme le montre le protocole, les enfants, devant l'absence de mesures conventionnelles adéquates, sont amenés à inventer leurs moyens: estimation, comparaison par superposition, par recouvrement, faisant preuve de raisonnement par récurrence.

Par le jeu de la communication au sein d'un groupe fermé, il est possible d'utiliser n'importe quel moyen parce qu'admis par tous. Ce n'est que devant la nécessité de transmettre le message à un autre milieu qu'intervient l'obligation d'avoir recours à une unité conventionnelle.

Lorsque les enfants ne formulent pas spontanément leurs hypothèses, le maître les met en situation d'anticiper.

Par cette démarche, ils ressentent constamment le besoin de vérifier et progressent dans leur construction d'une manière rigoureuse. Ceci est possible lorsque les enfants sont en mesure de s'appuyer sur la conservation de l'aire. Sans cela, il est difficile d'envisager un type de programme qui vise la compréhension. De plus, si la mesure est la synthèse de la partition et du déplacement (Piaget), nous retrouvons ces deux conditions qui entendent implicitement la conservation et la transitivité propre aux communes mesures.

Jeu de Nim (pour deux joueurs)

Placer 15 allumettes devant vous. Chaque joueur, à son tour, enlève une, deux ou trois allumettes, à son choix.
L'objet du jeu est de faire en sorte que votre adversaire doive prendre la dernière allumette.
Existe-t-il une stratégie constamment victorieuse ?

La division

par Charles Burdet

Introduction

«La division est mal aisée à pratiquer et à concevoir, et l'expérience fait voir que parmi les quatre règles générales, celle-ci est la plus difficile, qu'elle est la dernière qu'on apprend et la première qu'on oublie, si on ne la pratique pas souvent, et qu'il faut presqu'autant de temps pour celle-ci, qu'il en faut pour apprendre les trois autres.» Cette phrase tirée de l'ouvrage «L'arithmétique de Barrême», édition de 1781, attire notre attention sur un point qui ne peut être passé sous silence, même à notre époque, celui de la difficulté que présente la division du point de vue de l'algorithme, c'est-à-dire de celui de la règle de calcul qui permet de déterminer le résultat. Le souci de présenter, dès le début de l'apprentissage, une forme simple a souvent été à l'origine de cette difficulté. La forme la plus simple, dans ce cas, est aussi la plus élaborée. Si l'on met, dès le début, l'élève en présence d'un produit fini, on l'empêche de comprendre les différentes étapes de la démarche. Dans ces conditions, l'enfant ne peut qu'imiter un modèle, appliquer une règle qui est vite oubliée lorsque les occasions de la mettre en pratique sont rares.
Dans l'enseignement actuel de la mathématique, les problèmes posés par l'apprentissage des algorithmes de calcul, ne doivent sous aucun prétexte être écartés. C'est en laissant aux élèves, en partie du moins, l'initiative de construire leur modèle, de l'améliorer progressivement, de l'affiner toujours plus, que l'on parvient à des résultats qui peuvent être jugés satisfaisants. Dans cette optique, le travail se fait certes au détriment d'une mécanisation rapide mais il présente l'immense avantage de doter les élèves d'un outil qu'ils peuvent ensuite utiliser avec aisance et sûreté. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.
Des difficultés diverses et fort différentes de celles de l'agorithme se rencontrent lorsqu'on étudie la division [1].

«Division de partage» et «division de contenance»

Les enseignants qui ont l'expérience de l'arithmétique dite traditionnelle pensent certainement aux efforts qu'ils ont souvent déployés pour que les élèves de l'enseignement élémentaire saisissent la différence entre la «division de partage» et la «division de contenance». Ici, l'adulte n'a-t-il pas voulu faire partager par ses élèves son souci de respecter ce qui, à son avis, était une cer-

[1] A propos de l'étude de la division, voir l'article de Raymond Hutin, *De l'idée d'échange à la notion de division*, paru dans Math-Ecole 52, mars 1972.

taine rigueur, rigueur à laquelle ceux-ci n'ont généralemen pas été sensibles ? Par ailleurs, il ne faut pas oublier qu'une opération est définie dans un ensemble de nombres: nombres entiers naturels (**N**) ou nombres entiers relatifs (**Z**) ou nombres rationnels (**Q**), etc. Une opération arithmétique n'est jamais définie dans un ensemble d'objets tels que des boutons, des pommes ou des francs. Les problèmes: «Comment partager dix-huit pommes en trois parts égales ?» et «Combien de fois trois pommes dans dix-huit pommes ?» reviennent à poser une seule et même écriture, celle qui fait correspondre aux nombres dix-huit et trois, le nombre six. L'opération est effectuée dans l'ensemble des entiers naturels et non dans un ensemble de pommes ! Ecrire dans les calculs le mot «pommes» à côté des nombres correspond à une habitude que l'on rencontre parfois dans la vie courante. Cette pratique peut rendre service; il n'est donc pas possible de l'ignorer complètement. Toutefois, dans l'enseignement élémentaire, lorsqu'elle est employée systématiquement ou sans précautions, cette pratique devient source de malentendus. Dans le cas de la division, l'écriture des nombres sans la notion des objets auxquels ils se rapportent (pommes, francs, etc.) n'évite évidemment pas tous les obstacles. Elle permet cependant d'éliminer un certain nombre de difficultés. On comprend dès lors pourquoi, dans les programmes dits modernes de mathématique, la «division de partage» et la «division de contenance» ne font plus l'objet d'une étude spécifique. Nous venons de voir qu'il y a au moins deux bonnes raisons à cela. L'une est d'ordre pédagogique, l'autre mathématique.

On ne peut toutefois conclure pour autant que les concepts de partage et de contenance peuvent être ignorés de l'enseignant. Ils existent bel et bien, même si l'on ne sort pas des ensembles de nombres, celui des entiers naturels par exemple. Pour le maître la question est différente. Dans l'apprentissage de la technique de la division, il constate qu'il peut faire appel tantôt au concept de partage, tantôt à celui de contenance. Il remarque aussi que lorsque cette opération est considérée comme une série de soustractions successives, c'est le concept de contenance uniquement qui est sous-jacent.
Le problème est d'une toute autre nature quand on fait la distinction entre la division exacte et la division euclidienne. Avant d'aborder ce point, il est peut-être utile de préciser la définition que nous donnerons à la notion d'opération interne.

Opération interne

Si l'on prend un ensemble A, il est possible de former l'ensemble-produit, noté $A \times A$, de tous les couples dont la première et la seconde projection sont des éléments de A. Lorsque A est un ensemble fini comprenant peu d'éléments, on peut écrire en extension l'ensemble $A \times A$. Par exemple, si $A = \{0; 1; 2\}$, alors $A \times A = \{(0; 0); (0; 1); (0; 2); (1; 0); (1; 1); (1; 2); (2; 0); (2; 1); (2; 2)\}$. Lorsque A est l'ensemble des entiers naturels, ensemble **N**, il est formé d'une infinité d'éléments et l'ensemble-produit, noté $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, en comprend aussi une infinité.

M A T H - E C O L E

Index analytique

Numéros 61/62 à 70 (janvier-mars 1974 à novembre 1975)

Les titres des périodiques sont en caractères gras. Les titres des ouvrages cités sont entre guillemets. Les noms propres sont en capitales. Les mots-clés sont en minuscules.

Les nombres en chiffres gras indiquent le numéro du bulletin; ils sont suivis de l'indication de la page (chiffres maigres).

Nous disons qu'une *opération interne* dans A est une application de $A \times A$ dans A. En d'autres termes, c'est une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble-produit $A \times A$ et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble A. Une opération interne dans A permet donc de faire correspondre à tout couple de $A \times A$, un et un seul élément de A.
L'*addition* est une opération interne dans **N**. En effet, à tout couple (x; y) d'entiers naturels, on peut faire correspondre un nombre naturel unique nommé somme de x et de y. Nous pouvons donc écrire, par exemple, à l'aide de la notation employée pour les applications, que l'addition fait correspondre aux entiers naturels 7 et 15, le nombre 22:

$$+ : (7; 15) \longmapsto 22$$

Le nombre 22, noté aussi $7 + 15$, est l'image du couple (7; 15).
La *multiplication* est également une opération interne dans **N**. Il est possible de faire correspondre à tout couple (x; y) d'entiers naturels un nombre naturel unique appelé produit de x et de y. Par exemple, on peut écrire que la multiplication fait correspondre aux entiers naturels 7 et 15, le nombre 105:

$$\times : (7; 15) \longmapsto 105$$

Le nombre 105, noté également 7×15 ou $7 \cdot 15$, est l'image du couple (7; 15).
La *soustraction* n'est pas une application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans **N**. On constate en effet que seuls les couples dont la première projection est supérieure ou égale à la seconde ont une image dans **N**; tous les autres n'en ont pas. Le couple (15; 7) a pour image l'entier naturel 8; le couple (7; 15) n'a pas d'image dans **N**. En d'autres termes, dans l'ensemble des entiers naturels, l'équation $15 - 7 = ...$ peut être résolue, mais l'écriture $7 - 15 = ...$ n'a pas de signification. La soustraction n'est pas une opération interne dans **N**.
Une remarque analogue peut être faite à propos de la *division* dans **N**: Le couple (21; 7) a pour image l'entier naturel 3; le couple (15; 7) n'a pas d'image dans **N**. Dans l'ensemble des entiers naturels, il est possible de résoudre l'équation $21 : 7 = ...$ mais l'écriture $15 : 7 = ...$ n'a pas de signification. Nous venons d'envisager un type de division, il s'agit de la division exacte.

Division exacte

L'expression «division exacte» peut prêter à confusion. Elle laisse croire parfois qu'il existe une division qui est inexacte. Nous verrons que ce n'est pas le cas.
Nous disons que la division exacte est l'opération inverse de la multiplication. Les écritures suivantes sont donc équivalentes:

a) $6 \times 7 = 42$; $7 \times 6 = 49$; $42 : 6 = 7$; $42 : 7 = 6$.
b) $5 \times 8 = 40$; $8 \times 5 = 40$; $40 : 5 = 8$; $40 : 8 = 5$.
etc.

Pour chaque ligne, les quatre écritures proposées peuvent rendre compte de la même situation.
Trouver le résultat d'une division exacte, équivaut à résoudre une équation dans laquelle on a une multiplication seule. Par exemple, le calcul de y dans l'équation $a : b = y$ correspond à la résolution d'une équation telle que $b \times y = a$. Si l'on substitue des valeurs numériques, on voit en effet que rechercher le résultat de $54 : 9 = ...$, c'est résoudre une équation de la forme $9 \times ... = 54$.
Dans la division exacte, on fait correspondre à deux nombres (le dividende et le diviseur), un seul nombre (le quotient). Il n'est donc jamais question de reste. Dans l'ensemble des entiers naturels, la division exacte n'a pas le statut d'une opération interne au sens que nous lui avons donné. En effet, une partie seulement des couples de l'ensemble-produit $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, ont une image dans **N**. On a affaire néanmoins à une application dont l'ensemble de départ est un ensemble de couples et l'ensemble d'arrivée est l'ensemble **N**. C'est une des raisons qui nous autorise à dire, et sans restrictions, que la division exacte est une opération.

Dans l'ensemble des nombres rationnels différents de zéro (**Q***), la division exacte est alors une opération interne. Dans cet ensemble, il est toujours possible de trouver y dans l'équation $b \times y = a$, car l'équation de la forme $b \times y = a$ a toujours une solution. Dans certains cas, on se contente évidemment d'un résultat approché; c'est ce qui se produit souvent lorsque l'on veut exprimer le quotient par un code à virgule. Dans $50 : 9 = ...$, le quotient 5,55 peut donner, en bien des circonstances,un résultat suffisamment précis; la réponse exacte n'apporte parfois qu'une complication de l'écriture.

Les signes

Il est intéressant de noter que l'emploi du signe le plus connu actuellement pour la division (:) est relativement récent. Il tire son origine d'une erreur typographique survenue en Angleterre où un imprimeur a oublié les quatre points (: :) qui étaient utilisés alors pour noter un rapport et les a remplacés par les deux points. D'autres signes, plus récents encore, sont utilisés. Ce sont la barre oblique (/) et la barre horizontale accompagnée de deux points (÷). Ces signes présentent l'avantage, lorsque des confusions sont à craindre, de faire la distinction entre la division exacte et la division euclidienne. Pour la division exacte, on emploie soit le signe :, soit le signe /. On note par exemple $45 : 9 = 5$ ou $45 / 9 = 5$. Pour la division euclidienne, on peut avoir recours au signe ÷. Il est aussi possible de renoncer à son emploi en cherchant d'autres écritures, par exemple la notation multiplicative, qui peuvent fort bien rendre compte d'une situation dans laquelle intervient ce type de division. Notons encore que l'on sépare par un trait vertical et par des traits horizontaux le dividende, le diviseur et les autres nombres qui sont calculés successivement lorsqu'une division nécessite l'emploi d'un algorithme de calcul. On écrit par exemple: $453 \,\big|\, \underline{\;9\;\;\;\;}$.

Dans ce cas, les deux traits ne constituent pas, à proprement parler, le signe d'une division.

Jusqu'à une époque très récente, on renonçait à la vieille habitude d'écrire les codes fractionnaires à l'aide d'une barre oblique. Afin de présenter avec plus de clarté les calculs écrits à la main, on utilisait presque systématiquement, à l'école primaire en tout cas, la barre horizontale. La fraction trois quarts se notait donc $\frac{3}{4}$ et non $3/4$. Il est intéressant de constater qu'à l'heure actuelle, dans les milieux scientifiques en premier lieu, on revient à l'emploi de la barre oblique. Ce signe s'impose par la nécessité de noter sur une seule ligne, sur un seul «étage», les termes qui apparaissent dans les divers langages utilisés en informatique.

Propriété d'Archimède

Une des propriétés fondamentales de l'ensemble des entiers naturels est la propriété d'Archimède:

Etant donnés deux entiers naturels quelconques a et b, b différent de 0, il est toujours possible de trouver un entier naturel q tel que:

$$b \times q \leqslant a < b \times (q + 1)$$

Pour fixer les idées, prenons trois exemples numériques:

1) $a = 128$ et $b = 20$
   Dans ce cas, le nombre q est 6;
   en effet: $20 \times 6 \leqslant 128 < 20 \times (6 + 1)$
2) $a = 12$ et $b = 30$
   Dans ce cas, le nombre q est 0;
   en effet: $30 \times 0 \leqslant 12 < 30 \times (0 + 1)$
3) $a = 84$ et $6 = 12$
   Dans ce cas, le nombre q est 7;
   en effet: $12 \times 7 \leqslant 84 < 12 \times (7 + 1)$

On constate que la propriété d'Archimède peut être énoncée d'une manière un peu moins précise mais plus facile à comprendre:

Si l'on considère deux entiers naturels quelconques a et b, b étant différent de 0, on peut toujours trouver deux muliples successifs de b tels que le nombre a est compris entre ces multiples ou est égal à l'un d'eux.

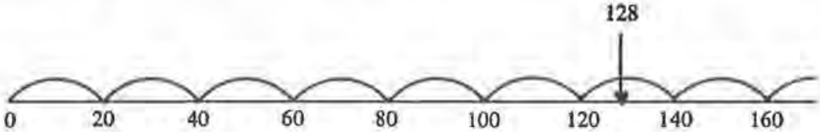
Les multiples de b sont:

$$b \times 0; b \times 1; b \times 2; \dots; b \times q; b \times (q + 1); \dots$$

Dans l'exemple (1), les multiples de 20 ($b = 20$) sont:

$$0; 20; 40; 60; \dots; 120; 140; \dots$$

et le nombre 128 ($a = 128$) est bien compris entre deux de ces multiples successifs, 120 et 140, c'est-à-dire 6×20 et 7×20.
Cet exemple peut encore être illustré simplement:



Division euclidienne

La double inégalité

$$b \times q \leqslant a < b \times (q + 1)$$

nous montre qu'il est encore possible de trouver un entier naturel r, appelé reste de la division euclidienne, tel que:

$$a = b \times q + r \qquad \text{et} \qquad r < b$$

Nous dirons qu'effectuer la division euclidienne de a par b, c'est trouver d'abord le nombre q qui est appelé quotient euclidien, c'est ensuite trouver le reste r.
Le quotient euclidien de 128 par 20 est 6 le reste est 8;
le quotient euclidien de 12 par 30 est 0; le reste est 12;
le quotient euclidien de 84 par 12 est 7; le reste est 0.
Notons au passage que l'on emploie dans certains ouvrages l'expression «quotient entier». Nous avons défini la division euclidienne dans l'ensemble des entiers naturels, par conséquent le quotient euclidien est obligatoirement un quotient entier. La réciproque n'est pas vraie. Certains quotients entiers ne sont pas des quotients euclidiens. Par exemple, dans l'ensemble des nombres rationnels, la division (exacte) de 15,6 par 5,2 donne un quotient entier (le nombre 3); celui-ci n'est pas euclidien.
Effectuer une division euclidienne revient à faire correspondre à deux entiers naturels (le dividende et le diviseur) deux autres entiers naturels (le quotient et le reste). Il s'agit d'une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble-produit $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et dont l'ensemble d'arrivée est le même ensemble-produit. En utilisant la notation employée pour les applications, nous pouvons écrire

que la division euclidienne fait correspondre, par exemple, aux entiers 128 et 20, les nombres entiers 6 et 8:

$$\div : (128; 20) \longmapsto (6; 8)$$

On remarque que le statut de la division euclidienne est fort différent de celui de la multiplication, de celui de l'addition ou même de celui de la division exacte. Le résultat est constitué non pas d'un seul nombre mais d'un couple de nombres: le quotient et le reste. C'est ce qui fait dire souvent que ce type de division est une pseudo-opération. Il n'en demeure pas moins que, dans les questions pratiques, c'est à cette division que l'on fait appel le plus souvent.
Lorsque le dividende est multiple du diviseur, le reste de la division euclidienne est le nombre 0. Par exemple, aux nombres 84 (dividende) et 12 (diviseur), la division euclidienne fait correspondre les nombres 7 (quotient) et 0 (reste). Si l'on reprend la notation des applications, on peut écrire:

$$\div : (84; 12) \longmapsto (7; 0)$$

Le nombre 0 est un entier naturel au même titre que les autres nombres de cet ensemble. Il n'y a donc pas de raison à le supprimer. La division est euclidienne parce que l'on a cherché les nombres (quotient et reste) qui correspondaient à un dividende et un diviseur donnés. Les résultats obtenus ne peuvent pas modifier a posteriori les intentions du départ. Dans ce cas particulier, nous constatons simplement que le codage, dans l'ensemble des entiers naturels, peut aussi être fait à l'aide de la division exacte: aux nombres 84 et 12, il est possible de faire correspondre un seul nombre, le nombre 7, tel que $7 \times 12 = 84$.

On étend parfois la notion de division euclidienne à l'ensemble des nombres rationnels. On dit simplement que cette division fait correspondre à deux nombres (entiers ou rationnels), deux autres nombres qui sont le quotient et le reste. Cette extension présente l'inconvénient de donner la possibilité d'avoir plusieurs réponses pour un dividende et un diviseur choisis. Prenons par exemple 17,6 et 7:

— le quotient peut être 2 et le reste 3,6;
— le quotient peut aussi être 2,5 et le reste 0,1;
— le quotient peut encore être 2,51 et le reste 0,03;
— etc.

On constate qu'il n'est plus question d'une application, car à un couple de nombres (dividende et diviseur) correspondent plusieurs images. Il est dès lors aisé de comprendre pourquoi, dans l'ensemble des rationnels, il est généralement préférable de parler de valeurs approchées du quotient. L'erreur commise est fournie par la valeur du reste.

Notation de la division euclidienne

Des notations fort diverses sont employées pour indiquer le quotient et le reste d'une division euclidienne.
Prenons pour exemple un dividende égal à 58 et un diviseur égal à 9. Nous avons vu, lorsque nous avons abordé la division exacte, que la notation $59 : 9 = ...$ n'a pas de signification dans l'ensemble des entiers naturels. En d'autres termes, il n'est pas possible de résoudre cette opération car l'équation $... \times 9 = 58$ ne peut pas être résolue non plus.
Nous nous souvenons que le signe «:» a une signification précise et qu'il indique l'opération inverse de la multiplication.
Dès lors, on constate qu'une ancienne habitude qui consistait à écrire:

$$58 : 9 = 6, \text{ reste } 4$$

conduit à une confusion regrettable.
Remarquons d'abord qu'une telle notation est hybride; notons ensuite que le signe «=» est employé d'une manière abusive, en tout cas si le signe de l'opération (:) est le même pour la division exacte que pour la division euclidienne.
Les raisons qui nous incitent à abandonner cette habitude sont suffisamment nombreuses. Nous utiliserons donc des notations cohérentes; elles seront du même coup correctes.
Revenons à notre exemple.
Chercher le quotient et le reste d'une division dont le dividende est 58 et le diviseur est 9, c'est résoudre une équation à deux inconnues de ce type:

$$59 = (9 \times ...) + ...$$

Il est évidemment nécessaire de poser une condition sur le dernier terme à chercher: il doit être inférieur à 9, c'est-à-dire au diviseur.
Sans cette dernière condition, l'équation peut être résolue de différentes manières, par exemple:

$$58 = (9 \times 1) + 49$$
$$58 = (9 \times 5) + 13$$
$$58 = (9 \times 0) + 58$$
$$58 = (9 \times 6) + 4$$

Dans le cas de la division euclidienne, nous retiendrons le dernier résultat. Pour cet exemple, nous pouvons encore dire qu'effectuer la division, c'est chercher les nombres q et r dans l'équation

$$58 = (9 \times q) + r$$

tels que r soit inférieur à 9.

Si l'on tient à employer le signe habituel de la division, il est alors nécessaire d'écrire:

$$(58 - 4) : 9 = 6$$

Remarquons que les diverses techniques de calcul par lesquelles les nombres sont disposés en colonnes sont les mêmes pour la division exacte dans l'ensemble des entiers naturels, pour la division euclidienne et pour la division dans l'ensemble des rationnels où l'on cherche une approximation du quotient. Dans chacun de ces cas, les traits qui séparent le dividende du diviseur ainsi que les autres nombres sont placés de la même manière. Cette idendité de présentation pour des opérations qui, formellement, sont absolument différentes est de nature à entretenir une certaine confusion.
D'ailleurs, pour beaucoup de personnes, la division n'est-elle pas uniquement une technique fort compliquée ?

Technique de la division

«J'ose dire qu'une grande division est un petit labyrinthe en losange et si par mécompte on s'est une fois égaré, il n'y pas moyen de revenir par où on a commencé, à moins que de recommencer une nouvelle règle».
Il s'agit d'un avertissement qui figure dans «L'arithmétique de Barrême» en tête du chapitre où il est question des multiples algorithmes de la division dont les cinq principaux sont:

la division à la «françoise»,
la division à l'italienne,
la division à l'espagnole,
la division à la portugaise,
la division à la persienne ou à l'indienne.

Dans chacun des cas, on constate que la technique est trop élaborée pour que la démarche qui a conduit à la manière proposée de poser les chiffres puisse être comprise facilement.
Qu'on en juge par un seul exemple. Il s'agit de la division à la «françoise» qui était la plus commune et la plus connue en France.
Cherchons le quotient et le reste de $872 \,\big|\, \underline{6}$

Première étape
On écrit le dividende 872;
on écrit le diviseur 6 sous le chiffre des centaines;
on cherche en 8 combien de fois 6;
on écrit au quotient le chiffre des centaines obtenu, soit 1;
on note le reste partiel, soit 2;
on biffe le 6 et le 8.

$$\begin{array}{l} 2 \\ \underline{\cancel{8}\ 7\ 2}\ \ (\ 1 \\ \cancel{6} \end{array}$$

Deuxième étape
On écrit le diviseur 6 sous le chiffre des dizaines;
on cherche en 27 combien de fois 6;
on écrit au quotient le chiffre des dizaines obtenu, soit 4;
on note le reste partiel, soit 3;
on biffe le 6, le 7 et le 2

$$\begin{array}{lll} \cancel{2} & 3 & \\ \underline{\cancel{8}} & \underline{\cancel{7}} & \underline{2} \quad (\; 1 \; 4 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \end{array}$$

Troisième étape
On écrit le diviseur 6 sous le chiffre des unités;
on cherche en 32 combien de fois 6;
on écrit au quotient le chiffre des unités obtenu, soit 5;
on note le reste final, soit 2;
on biffe le 6, le 2 du dividende et le 3.

$$\begin{array}{lll} \cancel{2} & \cancel{3} & 2 \\ \underline{\cancel{8}} & \underline{\cancel{7}} & \underline{\cancel{2}} \quad (\; 1 \; 4 \; 5 \\ \cancel{6} & \cancel{6} & \cancel{6} \end{array}$$

Il est aisé d'imaginer la complexité de l'écriture lorsque le diviseur est un nombre de plusieurs chiffres...

D'une manière générale, on peut distinguer d'une part les techniques élaborées comme celle que nous venons de voir ou comme celle que nous utilisons, disons la méthode classique, d'autre part la technique dite des soustractions successives.
Plus la méthode est élaborée, plus l'utilisateur doit faire preuve de maîtrise dans les calculs et mieux il doit être capable de faire une évaluation correcte du produit de deux nombres.
La technique dite des soustractions successives est évidemment la plus longue, la moins économique. Elle présente cependant l'avantage d'être assez souple et de pouvoir être progressivement perfectionnée, affinée. Elle conduit finalement, lorsque les notions d'échange sont bien comprises, à la méthode classique.
Dans une division comme celle-ci $138 \;\big|\; \underline{41 \quad}$,
par la méthode des soustractions successives, il est possible de chercher à soustraire successivement le nombre 41 et d'écrire:

$$\begin{array}{rr|r} & 138 & \underline{41} \\ - & 41 & 1 \\ \hline & 97 & \\ - & 41 & 1 \\ \hline & 58 & \\ - & 41 & \underline{1} \\ \hline & 17 & 3 \end{array}$$

L'élève constate rapidement qu'il a avantage de calculer des multiples de 41 plus grands.

Dans la division $1380 \;\underline{\big|\; 41}$,

on pourra donc obtenir:

$$\begin{array}{r|l} 1380 & \underline{41} \\ -\quad \underline{410} & 10 \\ 970 & \\ -\quad \underline{820} & 20 \\ 150 & \\ -\quad \underline{123} & \underline{\;\;3} \\ 27 & 33 \end{array}$$

Nous pouvons remarquer qu'il n'est pas nécessaire de chercher un ordre d'écriture des quotients partiels.
Après avoir fait de nombreuses expériences, les élèves prennent conscience que le résultat est obtenu plus rapidement s'ils cherchent en premier lieu les multiples les plus grands.
En fin de compte, ils indiqueront successivement le nombre de centaines, puis le nombre de dizaines, puis le nombre d'unités.

Conclusion

Lorsqu'on étudie la division, on constate que nombreuses sont les difficultés qui sont propres à cette opération, difficultés que l'on ne rencontre dans aucune des autres opérations courantes de l'arithmétique.
Nous avons abordé principalement les difficultés:
— du point de vue mathématique,
— du point de vue de l'algorithme.
Nous n'avons certainement pas abordé tous les problèmes que pose la division. Du point de vue des situations, par exemple, il ne s'agit pas seulement de reconnaître celles qui conduisent à la division mais encore il faut savoir comment interpréter les résultats.
Prenons les questions:

«Avec 400 caramels, combien peut-on remplir de boîtes de 35 caramels ?»
«Pour transporter 400 personnes, combien faut-il commander de cars de 35 places ?».

Une seule division (euclidienne) rend compte de ces deux situations et pourtant, à la première question la réponse est 11, à la seconde question, la réponse est 12.
Un aperçu, même partiel comme celui que nous avons présenté, des difficultés que présente la division nous rend attentifs aux efforts que doit fournir l'enfant au moment de l'apprentissage de cette opération. Il nous montre aussi la patience qui sera nécessaire au maître s'il veut fournir à ses élèves un outil valable.

Bibliographie

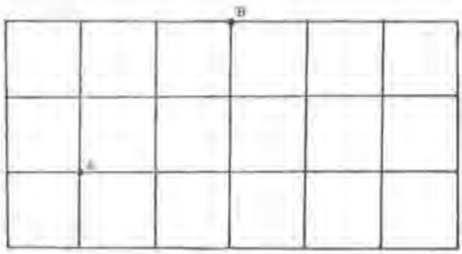
ADDOR, POST, SCHNEIDER et VANEY. 1943. *Arithmétique I*, Payot, Lausanne.
BARREME. 1781. *L'arithmétique*, Antoine Ferrand, Rouen.
CALAME, A. 1971. *Introduction aux mathématiques modernes*, Griffon, Neuchâtel.
DONEDDU, A. 1967. *Les structures fondamentales*, Dunod, Paris.
FELIX, L. 1965. *Mathématiques modernes - enseignement élémentaire*, A. Blanchard, Paris.
GROSGURIN, L. 1922. *Méthodologie de l'enseignement de l'arithmétique*, Payot, Genève et Lausanne.
LELONG-FERRAND, J. 1964. *Les notions de mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, A. Colin, Paris.
TATON, R. 1961. *Histoire du calcul*, PUF, Paris
TOUYAROT, M.-A. et C. HAMEAU. 1970. *Itinéraire mathématique*, tome I, Nathan, Paris.
THIRIOUX et autres. 1972. *Mathématique contemporaine*, Magnard, Paris.

Bulletins de l'association des professeurs de mathématique de l'enseignement public, numéro 282, février 1972 et numéro 298, avril 1975.

Quelques noisettes de plus...

par Catherine Rübner

1. Voici un réseau:



Si l'on prend comme unité de mesure la longueur d'un côté des carrés qui forment le réseau:

a) déterminez la longueur du chemin le plus court menant de A à B.
Ce chemin est-il unique ? Sinon, nous considérerons comme équivalents tous les chemins de même longueur. Quel est le cardinal de la classe des chemins les plus courts ?

b) Combien y a-t-il de classes d'équivalence pour se rendre de A en B ?

2. **A qui appartient le zèbre ?**

a) Il y a cinq maisons.
b) L'Anglais vit dans la maison rouge.
c) Le chien appartient à l'Espagnol.
d) Dans la maison verte, on boit du café.
e) L'Ukrainien boit du thé.
f) La maison verte se trouve immédiatement à la droite de la maison blanche.
g) Les escargots appartiennent au fumeur de «Kent».
h) On fume des «Gauloise» dans la maison jaune.
i) On boit du lait dans la maison du milieu.
j) Le Norvégien habite dans la première maison.
k) Le fumeur de «Marlboro» habite à côté du possesseur du renard.
l) On fume des «Gauloises» dans la maison voisine de celle où se trouve le cheval.
m) Le fumeur de «Dunhill» boit du jus d'orange.
n) Le Norvégien habite la maison voisine de la maison bleue.

Qui boit de l'eau ?

A qui appartient le zèbre ?

Rappelez-vous que les cinq maisons sont peintes de couleurs différentes et que leurs occupants sont de nationalités différentes, qu'ils possèdent des animaux différents, boivent des boissons différentes et qu'ils fument des cigarettes différentes.

Une chose encore, dans la donnée f), «à la droite de» s'entend par rapport au lecteur. IRDP/R 24.1.75 CR

Quelle technique de la soustraction enseigner ?[1]

par Catherine Rübner

La technique de la soustraction a été enseignée en Suisse romande avant la réforme de l'enseignement de la mathématique, pendant une dizaine d'années, par la méthode dite de la compensation. Cette méthode est basée sur le fait que la différence de deux nombres reste constante si l'on ajoute à chacun le même nombre.

Le renouvellement de l'enseignement de la mathématique a amené dans ce domaine un retour en arrière vers la méthode dite de l'échange (ou, abusivement, de l'emprunt) que la méthode de la compensation avait supplantée. Elle consiste, si la soustraction ne peut pas se faire au niveau des groupements d'un ordre donné, à échanger un groupement d'ordre immédiatement supérieur en un nombre égal à la base de groupements de l'ordre considéré. Les maîtres, avec raison, se demandent quels sont les avantages et les inconvénients de chacune de ces deux techniques et laquelle est préférable. La réponse à cette dernière question varie selon les objectifs qu'on s'est donnés. C'est ce qui explique qu'on revient à une méthode qu'à un moment donné on a jugé préférable d'abandonner.

En classe de troisième, après deux ans d'exercices de codage et de décodage dans différentes bases, de groupements d'objets de toutes sortes (matériel multibases, entre autres), de jeux d'échange variés, les enfants comprennent très rapidement le principe de la technique de l'échange. Elle s'inscrit dans la suite logique non seulement des activités qu'ils ont longuement pratiquées, mais encore de la technique de l'addition qu'ils connaissent déjà et de celle des opérations (multiplication et division) qu'ils apprendront plus tard. Le principe de la compensation introduirait dans ce contexte un point de vue entièrement nouveau et dont l'expérience a montré qu'il n'est que rarement compris à fond. Or un des buts premiers de la réforme est de promouvoir une meilleure compréhension des algorithmes («savoir ce qu'on fait»). Les automatismes du calcul ne doivent s'acquérir qu'ensuite et progressivement.

Les tenants de la méthode de la compensation estiment qu'elle rend service lors de la division, car elle permet plus facilement de ne pas écrire les produits partiels. Cela est certainement vrai et c'est ce qui l'a fait préférer à un moment où la rapidité d'exécution des opérations arithmétiques avait son importance. Aujourd'hui où celui qui a un grand nombre d'opérations à effectuer a généralement une machine à disposition, on préfère mettre l'accent sur la compréhension et la sécurité du calcul: il est plus facile de retrouver une éventuelle faute dans une division si on a écrit les produits partiels. Quant à la rapidité d'exécution des soustractions elles-mêmes, il ne semble pas qu'il y ait une différence entre les personnes pratiquant régulièrement l'une ou l'autre des méthodes.

Le comité de rédaction des ouvrages romands de mathématique pour les quatre premières années primaires, après de longues discussions sur les différents points que nous avons soulevés a pris la décision de présenter la technique de l'échange pour la soustraction, et cette technique seulement. Par la même occasion, il a opté pour faire toujours écrire les produits partiels dans les divisions.

Une dernière remarque: il se présente certaines difficultés d'écriture lors de soustractions dans des bases autres que dix. En effet, si en base trois, j'échange un groupement de première espèce, je ne peux pas noter le nombre d'unités obtenu par «3» qui n'existe pas dans cette base, mais je dois écrire «10», ce qui ne manque pas de gêner les enfants. Exemple [2]:

$$\begin{array}{rccc} & & 10 & 10 \\ & \overline{2} & \overline{1} & 1 \\ - & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

On a donc renoncé à ce genre d'exercice au niveau de l'écriture, mais on l'a gardé dans le stade préliminaire, à savoir celui de la manipulation.

[1] Ce texte constitue une réponse de C. R. à un abonné de France à Math-Ecole.

[2] Les traits surlignant le chiffre 1 (groupement de trois) et le chiffre 2 (groupements de neuf) rappellent qu'un échange a été effectué. On peut aussi, simplement, biffer le chiffre 1, puis biffer le chiffre 2 et le remplacer par un chiffre 1 (un groupement de neuf a été échangé contre trois groupements de trois et il «reste» 1 groupement de neuf).

Lu pour vous

● Mathématique de notre temps à l'usage du corps enseignant

2. Numération, structures et quelques notions de topologie, Ch. Burdet, Lausanne, Payot, 1975.

Dans son numéro 53, Math-Ecole présentait, en 1972, l'ouvrage de Ch. Burdet «Mathématique de notre temps à l'usage du corps enseignant», tome 1: ensembles, relations et quelques notions de logique.
Le tome 2 vient de paraître; il traite de la numération, des structures et donne quelques notions de topologie. Cette seconde partie, longuement attendue, complète de façon heureuse la présentation claire des principales notions mathématiques à la base du nouveau programme romand entreprise dans le premier ouvrage.
Le premier chapitre, après un rappel historique fort judicieux, décrit toutes les démarches qui conduisent aux techniques des quatre opérations. Les nombreuses remarques destinées aux enseignants et les exemples tirés de la pratique scolaire font de cette partie une solide référence, d'accès facile, sur laquelle pourront s'appuyer les maîtres qui souhaitent parfaire leur formation.
La seconde partie, consacrée aux structures, semble un peu plus abstraite: «l'objet pris pour lui-même s'estompe, et c'est ce qui l'unit à d'autres objets qui prend le plus d'importance». L'assimilation de la structure de groupe, des propriétés des opérations, de la distributivité, est indispensable à une compréhension globale du nouveau programme; comment pourrait-on en éclairer les priorités, y relever les lignes directrices sans une bonne connaissance des structures ? Par exemple: la structure de groupe est un des liens entre les chapitres DE (Découverte de l'espace) et OP (Opérations), car elle est à la base de nombreuses activités de ces deux avenues. Un autre exemple: l'emploi correct des parenthèses est lié aux propriétés d'associativité et de distributivité des opérations (Les écritures 54 : 6 : 3 ou 12 — 4 — 1 sont ambiguës, mais pourtant on les rencontre dans certaines fiches pour élèves !).
La troisième partie, extrêmement plaisante, donne quelques bases bienvenues en «topologie». On y trouve un domaine riche en situations de recherche et d'anticipation, favorables à une bonne structuration de la pensée mathématique.
L'aspect didactique de l'ouvrage de Ch. Burdet est intéressant. Un choix d'exercices est proposé à la fin de chaque thème. Le lecteur est invité à s'y arrêter et ensuite à se référer aux corrigés donnés en fin de volume.
Il y a donc de la matière dans ce livre, un intérêt étroitement lié au nouveau programme romand, une référence solide à l'usage des enseignants, voire des parents.

François Jaquet, IRDP

● Initiation mathématique

par Jean et Suzanne Daniau. Activités mathématiques des enfants de 5 à 6 ans. Suggestions à l'usage des maîtres. (CEDIC, Lyon, 1975).

Il est agréable de consulter des ouvrages de pédagogie dont le plan est clair, le style parfaitement accessible, la matière intéressante et très voisine de ce que nous traitons en Suisse romande dans le cadre du nouveau programme de mathématiques. L'ouvrage de J. et S. Daniau appartient à cette catégorie. Il décrit successivement les stades par lesquels passe l'enfant de 5 à 6 ans, sans négliger ce qui vient avant, ni les prolongements.

— Une première partie est consacrée à la prise de conscience de l'espace (intérieur-extérieur, droite-gauche, etc.), au repérage et à la perception des formes géométriques.
— Dans une seconde partie, les auteurs cherchent à montrer comment l'enfant apprend à désigner des objets, des ensembles, c'est-à-dire comment se développe la fonction symbolique.
— Le troisième chapitre, essentiel, traite de la pensée logique et relationnelle: Quand l'enfant reconnaît-il les propriétés des objets, comment s'organise l'information, quand apparaissent les notions d'équivalence et d'ordre ? Toutes ces questions sont accompagnées de rappels théoriques et d'indications pédagogiques pertinentes.
— La quatrième partie est consacrée aux grandeurs physiques et à leur mesure. La progression, de la perception de la grandeur à sa conservation, à la sériation et finalement à la mesure est bien mise en évidence. Il faut noter également dans ce chapitre que la «durée» n'est pas oubliée dans les grandeurs physiques.
— Une dernière partie décrit les étapes de l'approche de la notion de nombre et donne en raccourci les prolongements vers la comparaison, puis l'addition de deux nombres.

Cet ouvrage, destiné aux enseignants, suggère des directions de recherche et des thèmes d'activité. Sa lecture ne devrait pas représenter une surcharge ni une accumulation de renseignements inutiles; au contraire, elle s'intègre parfaitement dans le travail de réflexion sur les avenues ER et DE du programme romand. C'est à ce titre que nous le recommandons aux enseignants des premières années primaires.

F. Jaquet, IRDP

● La résolution de problèmes

par Anne-Sylvie Visseur. Analyse d'une épreuve passée en sixième année primaire. (Service de la recherche pédagogique, Genève, 1975).

Cet ouvrage décrit un test genevois, présenté en 1973, conçu pour comparer les résultats de deux populations d'élèves de sixième primaire ayant reçu, l'une un enseignement traditionnel, l'autre un enseignement moderne de mathématique.
Ceux qui chercheraient dans ce travail une conclusion en faveur de l'un ou de l'autre des enseignements de la mathématique seraient déçus. Les différences qui apparaissent entre les deux populations ne sont pas significatives.
Que chercher alors dans cet ouvrage ?
On y trouvera tout d'abord les différentes étapes de l'élaboration d'un test: le choix des items, leur analyse et classification, les premiers sondages, l'administration du test, l'analyse et la discussion critique du test et des résultats. Tout ceci est fait scientifiquement, avec beaucoup d'honnêteté. Un oubli rend toutefois la lecture malaisée dans les chapitres consacrés aux choix et à la classification des items: les annexes I et III mentionnées dans le texte ne figurent pas dans l'édition définitive.[1]
On y trouvera également, et c'est là que se situe l'aspect principal de cet ouvrage, une multitude de questions sur le «problème des problèmes». Anne-Sylvie Visseur ne prétend pas du tout y répondre. Le simple fait de les poser et d'en parler est déjà méritoire: Qu'est-ce qu'un problème ? Quel rôle lui attribue-t-on dans l'enseignement ? Pourquoi les élèves échouent-ils si souvent ? Quelles sont les variables et comment influencent-elles la résolution d'un problème ? Des hypothèses intéressantes sont faites au niveau linguistique, au niveau du type des quantités, au niveau du nombre d'éléments dans le raisonnement. Une suite à cette première étape est nécessaire.
Ce travail constitue un premier pas dans l'analyse fort complexe de l'activité de résolution de problèmes. Il suggère des idées, explore des domaines jusqu'ici ignorés par de nombreux enseignants et pédagogues.

Doc. IRDP 6669, François Jaquet

[1] Ces annexes peuvent être demandées au SRP ou à l'IRDP.

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

TABLE DES MATIERES

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311