Quelques regards sur un problème et sa résolution: le tunnel

Denis Odiet
Collège de Delémont

Dans le n° 201 de la revue *Math-Ecole*, Lucia Grugnetti proposait un article consacré aux niveaux de référence en mathématiques pour des élèves de 16 ans, en Europe.

Pour mener à bien cette étude, une liste de 65 questions a été rédigée. Parmi celles-ci, le problème du tunnel a retenu plus particulièrement mon attention. Pour mémoire, voici son énoncé:

EMS Question de référence N° 018 **Le tunnel**

Quatre personnes s'apprêtent à traverser un tunnel étroit et sombre.
Elles disposent d'une lampe de poche qui a une durée de fonctionnement limitée à 18 minutes.
Il leur faut, respectivement, 1, 2, 5, et 10 minutes pour traverser le tunnel.
Sans lampe, elles ne peuvent le faire.
Le tunnel est si étroit que deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble.

Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser le tunnel?

Il est loin d'être inintéressant d'étudier quelques résolutions élaborées par des élèves de 14 ans, non seulement afin d'en dégager certains aspects liés à la compréhension même de l'énoncé et à la signification vouée à certains des termes utilisés dans la donnée mais également afin d'essayer d'en établir une version tendant à supprimer toute équivoque, débouchant en conséquence vers une interprétation unique.

On peut raisonnablement penser que le(s) concepteur(s) du problème s'attendai(en)t à ce que les élèves imaginent deux personnes traversant le tunnel l'une derrière l'autre («*un tunnel étroit*»). Pourtant rien n'empêche, à mon sens, qu'elles puissent s'y engager côte à côte, comme le suggère la solution ci-dessous, tout empreinte de bon sens. Difficile de savoir si elle est à rejeter, car on peut discuter longtemps du sens à donner à l'expression «*deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble*». Il vaudrait mieux préciser dans la donnée que seules deux personnes au maximum peuvent se trouver au même moment à l'intérieur du tunnel. Selon cette nouvelle formulation, il n'y aurait plus de doute: les quatre personnes ne pourraient s'y trouver simultanément.

1ère possibilité:

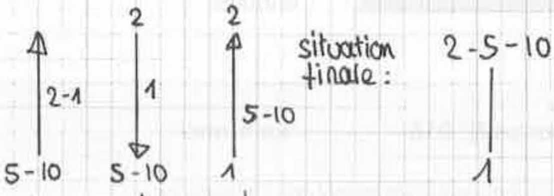
Les quatre personnes traversent le tunnel par rangs de 2, et un des 2 premiers tient la lampe :

donc, ils mettent 10 minutes

La deuxième solution proposée ci-dessous, tout à fait acceptable et nullement en contradiction avec l'énoncé, est plus subtile.

2ème possibilité :

Si, pour une raison quelquonque, la 1ère possibilité est impossible, ils peuvent se déplacer ainsi :



2' + 1' + 10' = 13 minutes

Ici, l'élève joue sur le mot «*traverser*» et le sens qu'on lui attribue généralement : traverser un tunnel, c'est à coup sûr, au bout d'un certain temps, se retrouver à son autre extrémité.

Or, une analyse un peu poussée de cette production montre que les quatre personnes ont bel et bien traversé le tunnel : il se trouve que «1» l'a traversé deux fois, alors que «2», «5» et «10» l'ont traversé une seule fois. Elle n'est donc pas à rejeter. Pour éviter une telle interprétation, ne faudrait-il pas simplement remplacer «*traverser le tunnel*» par «*se retrouver ensemble de l'autre côté du tunnel*» ?

La plupart des solutions proposées par les élèves soulignent l'impossibilité d'accomplir la tâche incombant aux quatre personnes. Leur argumentation repose essentiellement sur le choix de l'accompagnant pour chaque traversée, à savoir la personne la plus rapide. Par exemple :

Premièrement, le 1 entame la traversée avec le 2 ; comme il doit se mettre au rythme du 2, il leur faudra 2mn. Arrivé au bout du tunnel, le 1 doit repartir pour aller donner la lampe = 1mn, puis, il repart avec le 3 et de nouveau il se met au rythme de celui-ci : il leur faudra 5mn Le 1 revient à nouveau = 1mn. et enfin, il repart avec le 4 et il leur faudra 10 mn. Si l'on additionne les temps (2 + 1 + 5 + 1 + 10 mn.) cela donne 19 minutes et il leur manquera 1 minute, donc c'est impossible ! Le 1 a été pris parce qu'il était le plus rapide !

Finalement, il est tout de même possible de réaliser la traversée:

Pour commencer :

1, 2, 5 et 10 correspondent aux temps de chaque personne

$1,2,5,10 \xmapsto{1,2} 1,2 \rightarrow$ 2 minutes A

$1,5,10 \xleftarrow{1} 2 \rightarrow$ 1 minute B

$1 \xmapsto{5,10} 2,5,10 \rightarrow$ 10 minutes C

$1,2 \xleftarrow{2} 5,10 \rightarrow$ 2 minutes D

$\longmapsto 1,2,5,10 \rightarrow$ 2 minutes E

17 minutes

A: 1,2 font un aller pour assurer le retour du voyage de 5 et 10.

B: 1 retourne apporter la lampe.

C: 5, 10 font un aller ensemble pour gagner un maximum de temps.

D: 2 retourne chercher 1

E: 1,2 font le dernier voyage.

Total: 17 minutes

Il est par ailleurs symptomatique de constater que certains élèves ne sont pas totalement convaincus de la véracité de leur réponse…

Appréciation : Je suis sûr à 85%

17 minutes
au
total

surtout pour ceux chez qui l'affectif y met aussi du sien:

Conclusion: Mathématiquement possible
Mais comme 1 va plus vite que 2
s'il ne l'attend pas?

En conclusion, les traces écrites d'élèves prennent une place fondamentale dans l'enseignement des mathématiques:

- pour le concepteur des problèmes, afin que celui-ci puisse remédier à d'éventuelles ambiguïtés liées à l'énoncé;
- pour le maître, de manière à ce qu'il puisse se rendre compte de ce qui se passe réellement dans la tête de ses élèves,
- pour les élèves enfin, de sorte qu'ils puissent améliorer la qualité de leurs comptes rendus et progresser dans leurs apprentissages.

À propos du problème «Le tunnel»
François Jaquet

En tant que membre du groupe qui, en 2000, à Besançon, a choisi «Le tunnel» comme l'une des «questions de référence» de l'EMS (European Mathematical Society); je me permets d'apporter quelques remarques à propos de ce problème et de son énoncé qui, selon l'article précédent pourrait receler certaines ambiguïtés.

Ce problème a été proposé, en anglais, par Sandor Dobos, de Hongrie. Sa résolution, au sein de notre groupe de travail n'a pas été immédiate, loin de là! Il nous a fallu une bonne dizaine de minutes pour le résoudre et cette durée aurait encore pu être plus longue si notre collègue hongrois ne nous avait assurés que, chaque fois qu'il donne ce problème à ses étudiants de l'Université de Budapest, il s'écoule bien du temps avant que la solution n'apparaisse.

Cette relance a permis de remettre en selle tous ceux qui pensaient à un attrape-nigauds. Dès lors, chacun a compris que la partie se jouait dans sa tête et non pas sur les mots de l'énoncé: la condition «deux personnes au maximum peuvent s'y engager ensemble» excluant les groupes de trois ou de quatre, indépendamment des positions relatives de ceux qui les composent; la phrase «Est-ce possible que chacune des quatre personnes puisse traverser...» étant comprise implicitement comme «se retrouvant toutes de l'autre côté du tunnel», puisqu'elles s'apprêtaient à le traverser.

On pourrait certes utiliser d'autres termes pour la traduction, mais sans être certain que celle-ci y gagne en clarté. (Par exemple, je