

Des pistes de réflexion didactiques pour construire la droite numérique en équipe éducative

Pierre Stegen et Annick Sacré
Équipe de recherche collaborative en didactique des mathématiques
Université de Liège

[Indlr] Nous publions ici le troisième d'une série de quatre articles sur la droite numérique, de nos collègues de Liège. Les deux premiers concernaient les degrés 5 et 6 (élèves de 10 à 12 ans), celui-ci et le suivant sont consacrés, toujours sur le thème de la droite numérique, aux premiers degrés de

l'école primaire et accompagnés de nombreuses propositions d'activité. La « bande » numérique de nos moyens d'enseignement romands est ici la « bandelette » numérique. Mais, au-delà de la terminologie, la problématique reste la même. Il y a un saut énorme entre la bande et la droite des nombres : celui qui existe entre le discret et le continu. Cela vaut bien la peine qu'on y consacre quelques réflexions, dès les premiers degrés de l'école primaire. Merci à nos collègues belges de nous autoriser à reproduire ces articles, parus dans leur revue Ecole des années 2000.

Lors des deux dernières publications¹, nous avons analysé les difficultés rencontrées par les élèves du degré supérieur dans l'utilisation de la droite numérique. Cette analyse nous a conduits à réfléchir sur la manière dont le référent « droite numérique » était construit à l'école primaire. Cette réflexion, envisagée à l'échelle de l'école primaire, s'est faite au départ de questions et de réflexion qui nous paraissent utiles de rappeler ici :

Au cours de la troisième maternelle et en début de scolarité primaire, les élèves sont familiarisés avec le principe ordinal via des jeux de parcours qui préfigurent notamment une étude plus systématique au travers d'une bandelette numérique... Très vite, celle-ci est abandonnée au profit d'un référent « mathématiquement plus correct » qu'est la droite numérique. L'introduction de ce référent soulève, au vu des difficultés rencontrées par les élèves, de nombreuses questions :

- Comment l'enseignant de première année assure-t-il ce passage, cette rupture, entre deux supports fondamentalement différents : la bandelette numérique et la droite numérique ?
- Pourquoi introduire si tôt la droite numérique ? Est-elle vraiment indispensable ?
- À ce niveau, les élèves étudient essentiellement des nombres entiers... soit des quantités discrètes. La bandelette numérique n'est-elle pas un support plus adapté au niveau de compréhension des élèves de cet âge et au type de nombre rencontré ?
- Plutôt que de leur imposer comme tel, un support dont ils ne peuvent comprendre les principes de construction, ne faut-il pas privilégier d'autre support, comme la grille des 100 premiers nombres,

1. Voir *Math-Ecole* 202 et 203

qui va leur permettre de mieux appréhender les régularités des suites numériques et devenir un référent très appréciable pour affronter des opérations additives et soustractives ?

- Un référent comme la droite numérique apparaît, dans le développement des compétences numériques des élèves, très utile et compréhensible au moment où les élèves découvrent les nombres rationnels qui vont leur permettre d'aborder des quantités continues. Ne faut-il dès lors pas aborder la construction de ce référent, en fin de cycle 8/10, lorsqu'il apparaît que les nombres rationnels ne peuvent être situés sur des bandelettes numériques... que ce support doit être abandonné au profit d'un autre ?

Lors des deux précédentes publications, nous avons proposé des activités de remédiation aux enseignants du cycle 10/12. Il s'agissait à ce moment de répondre à la question: «*Comment aider les enseignants de 5e/6e primaires confrontés à des élèves en difficultés avec la droite numérique et ne disposant pas d'assez de temps pour effectuer un long et nécessaire retour en arrière ?*». Autrement dit, que pouvait apporter la recherche en didactique à des enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage révélées par l'analyse formative d'items d'une évaluation externe ?

Dans le cadre de cet article et de celui à venir, nous allons vous détailler les éléments didactiques que nous vous proposons en réponse à une seconde question de recherche tout aussi indispensable: «*Dans une perspective plus globale, quelles activités mettre en place pour permettre aux élèves de construire, en cycles d'apprentissage, des droites numériques ?*». Autrement dit, en quoi les erreurs commises par des élèves de 5e ou de 6e peuvent-elles intéresser les enseignants des autres cycles d'apprentissage? Que peut suggérer la recherche en didactique ?

Des propositions d'activités

1. Les jeux de parcours

On trouve des jeux de parcours dans le commerce, on peut également très facilement

adapter leur principe aux différents thèmes abordés ou aux projets menés au fil de l'année. Il faut veiller, au début du moins, à proposer des jeux de parcours simples, c'est-à-dire durant lesquels l'enfant n'a qu'une consigne à respecter: avancer du nombre de cases indiqué par le dé. Par la suite, on peut rendre ces jeux de parcours plus compliqués, en prévoyant certaines cases spéciales: l'enfant devra se conformer à la consigne donnée par la case, par exemple, cueillir un certain nombre de fruits sur les arbres du plan de jeu, rendre un certain nombre d'objets collectés au fil des tours précédents, reculer de X cases, progresser de X cases, passer son tour...

2. De la bandelette numérique à la grille des nombres

Activité 1: Construction d'une grille des nombres

Objectif:

Construire une grille des nombres qui permettra d'observer les régularités de la suite écrite des nombres.

Matériel:

Des feuilles sur lesquelles se trouvent les morceaux de bandelettes numériques suivantes:

Plateau de jeu

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29				
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	
55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	
78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	
69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	
92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104		

Organisation :

Travail des élèves par deux

- Fabrication d'une bande numérique à partir de morceaux : chaque enfant reçoit une feuille.
- En découpant et en collant les morceaux qui conviennent, les enfants doivent reconstituer une bande numérique régulière à partir de 0 et qui soit la plus longue possible.
- Coloriage des bandes ainsi obtenues selon des consignes telles que :
 - «On colorie en rouge toutes les cases où il y a un 5 et en vert toutes celles où il y a un 2»,
 - «On colorie en jaune toutes les cases qui contiennent un nombre qui se termine par 9»,
 - «On colorie de la même couleur (au choix) toutes les cases qui commencent par le même chiffre»...

- Ces coloriages sont l'occasion d'observations et de verbalisations.
- Réalisation de la grille des nombres : les bandes qui ont été coloriées par dizaines (exemple de consigne) sont découpées «chaque fois que l'on change de couleur». On découvre ainsi les différentes familles (les vingt, les trente...). Les morceaux sont ensuite collés sur une feuille de papier les uns sous les autres de manière à former la grille des nombres de 0 à 99.

Mise en commun :

Mise en évidence des régularités observées lors des phases de coloriage au départ de questions du type : combien de cases entre deux cases coloriées en vert, jaune, rouge...

Activité 2: Des applications autour de la grille des nombres

Objectif :

Apprendre à utiliser la régularité de la suite écrite des nombres.

Matériel :

Des grilles de nombres incomplètes ;
Des grilles de nombres en puzzle ;
Des extraits de grilles des nombres (page suivante).

Organisation :

Travail des élèves par deux

- 1) Des grilles des nombres à compléter :
On peut proposer aux enfants trois types de grilles à compléter :
 - ils doivent compléter les quelques cases vides ;
 - ils doivent compléter les cases entourées d'un bord foncé avec pour seuls

Plateau de jeu

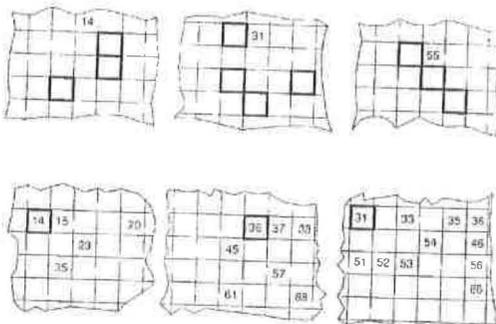
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10									
20									
30									
40									
50									
60									
70									
80									
90									

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99



indices les nombres de la première ligne et de la première colonne ;

- ils doivent compléter les cases entourées d'un bord foncé avec pour seuls indices les nombres de la première ligne.
- 2) Des puzzles :
La grille des nombres a été découpée en un certain nombre de pièces, suivant les

capacités des enfants. Ils doivent alors reconstituer le puzzle. Plus il y a de pièces et plus les découpes sont irrégulières, plus le puzzle est difficile à reconstituer.

- 3) Des extraits à compléter :
Seul un extrait du tableau est donné aux enfants qui doivent le compléter à partir d'une seule information (un seul nombre est donné sur l'extrait).

Activité 3 : une reprise de cette activité en 3e primaire

D'autres prolongements peuvent être envisagés avec des élèves de troisième, voire de quatrième année primaire. La grille des nombres est affichée au tableau, elle est constituée de cent cartons, portant chacun un des nombres de 0 à 99 (ou de 1 à 100). Grâce à ce matériel, une enseignante de 3e-4e primaire proposait quotidiennement l'activité suivante à ses élèves. Elle enlevait les cartons de la grille et chargeait les enfants, à tour de rôle, de la reconstituer. Elle pouvait ainsi observer les différentes stratégies mises en œuvre :

- un enfant ne commence à construire la grille que lorsqu'il a trouvé le nombre 1, il cherche ensuite le nombre 2, puis le nombre 3... jusqu'à atteindre le nombre 100 ;
- un autre commence par placer les cases de la première ligne (de 1 à 10), alors qu'un autre commence par les cases de la première colonne (1, 11, 21, 31, ..., 81, 91); ils placent alors les autres cases en se servant de ces repères ;
- un enfant prend les cartons comme ils viennent et les place dans les cases, il place ainsi des repères de plus en plus nombreux ;
- un autre enfin a pris conscience de certaines régularités de la grille (soit en ligne : + 1, soit en colonne : + 10, soit en diagonale : + 11) et les utilise pour replacer les cartons.

L'intérêt d'une telle activité réside non seulement dans sa répétition (c'est grâce à cela que peuvent apparaître les différentes stratégies), mais aussi dans la discussion qui la prolonge. C'est à ce moment que les enfants soit prennent conscience de ce que leurs condisciples ont découvert, soit clarifient leur pensée en exprimant et en expliquant leur découverte, soit sont encouragés à pousser plus loin leur réflexion grâce à une question posée par un autre enfant ou par l'enseignant.

3. Des déplacements sur la grille des nombres

Une fois que ce référent est parfaitement maîtrisé par les élèves, il peut être utilisé pour effectuer des opérations additives ou soustractives via des déplacements sur cette grille des nombres. Cela peut se faire au travers de l'activité suivante :

Objectif :

Utiliser des écritures additives ou soustractives pour représenter des déplacements sur une grille des nombres.

Matériel :

- Une grille des 100 premiers nombres.
- Des jetons de même couleur par joueur
- Une feuille de route par joueur
- Une feuille pour le secrétaire
- 30 cartons sur lesquels sont écrits des nombres inférieurs à 10 (en vert, pour avancer ; en rouge, pour reculer)

Feuille de route d'un joueur

Départ	30
--------	----

Feuille de secrétaire

	Joueur A	Joueur B
1er coup		
2e coup		
3e coup		
4e coup		
5e coup		

Organisation :

Les élèves sont groupés par trois : 2 joueurs et un secrétaire.

Déroulement :

Au début de la partie, chaque joueur place son pion sur la position 30 (par exemple). Le premier joueur tire alors une carte et déplace son pion selon les indications de celle-ci. Le deuxième joueur fait de même. A chaque tour, les joueurs notent la position atteinte après leur déplacement, tandis que le secrétaire note les déplacements effectués par les deux joueurs. A la fin de la partie (après 5 coups, par exemple), le gagnant est celui qui occupe la position la plus proche (ou la plus éloignée, selon ce qui a été décidé en début de partie) de 0.

Les différents groupes de trois élèves échangent les feuilles de notations. Chaque groupe met ainsi en relation les positions indiquées par les feuilles des joueurs et les déplacements indiqués par la feuille du secrétaire.

Mise en commun :

Une mise en commun suit cette phase de vérification. Elle permet aux différents groupes d'ex-

primer les incohérences qu'ils ont éventuellement pu observer. Elle permet également de constater les différentes notations utilisées par les secrétaires pour coder les déplacements :

en utilisant les couleurs

3 vert

8 bleu

en utilisant des mots

avancer de 3

reculer de 8

en utilisant des signes

+ 3

- 8

Lors de la vérification et de la mise en commun, on privilégie les écritures additives et soustractives ($30 + 3 = 33$; $33 - 8 = 25$).

4. De la bandelette des nombres vers la droite numérique

Activité 1

Objectifs :

Passer de la présentation d'une suite des nombres dans les cases d'une bande numérique vers une représentation de cette suite sur une droite numérique.

Utiliser la droite numérique comme outil mental ou dessiné de validation ou de résolution de problèmes

Organisation :

Travail en duo ou individuel

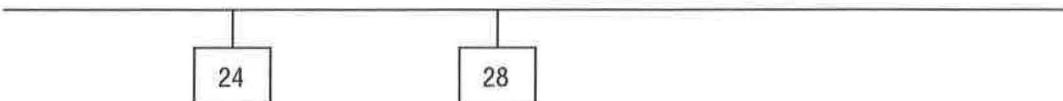
Donner aux élèves le défi suivant : en n'utilisant que les chiffres 1, 2, 3 et 4 former un nombre le plus proche possible de 28.

Exemples : 24 et 31.

Chaque élève écrit sur une étiquette sa proposition. Toutes les étiquettes sont collectées et regroupées au TN. On ne conserve que les propositions respectant la consigne de départ (utilisation des 4 chiffres).

L'enseignant demande alors aux élèves si, parmi les nombres proposés, il y a un nombre plus proche de 28 que les autres. Il dessine une droite au TN et place l'étiquette 28 au milieu de cette droite. Chaque étiquette est ensuite placée en respectant la convention : je place 24 à gauche de 28 car 24 est plus petit que 28.

L'enseignant demande aux élèves de positionner de la même manière tous les nombres trouvés. Après ce positionnement, on peut faire constater aux élèves que tous les nombres placés à gauche de 24 ou à droite de 31 sont plus éloignés. Ceux qui ont proposé 31 vont

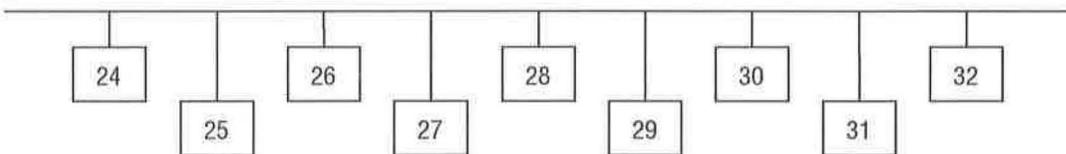


sans doute défendre leur nombre auprès de ceux qui ont proposé 24. L'enseignant peut faire rebondir le débat en interrogeant les élèves pour voir s'il n'y a pas encore des nombres qui sont plus proches. Il demandera alors de placer sur une étiquette, tous ces nombres qui se trouvent entre 24 et 28 d'une part et, d'autre part, entre 28 et 31.

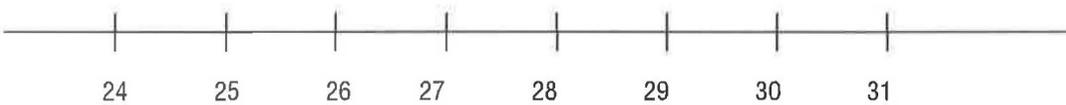
Cette demande est intéressante car elle conduit les élèves à ajuster leur positionnement de nombres.

Ainsi, un élève avait placé 24 tout à gauche de 28 et 31 de façon assez éloignée, à droite. Lorsqu'il s'est agi de placer les nombres intercalaires comme 25 ou 26, l'élève a constaté qu'il n'y avait pas assez de place. Cela l'a obligé à déplacer le 24 et de le situer plus à gauche de 28.

Au terme de ce travail, les élèves ont construit la droite numérique suivante :



Ou



Il faut noter, qu'à ce stade, les droites ne sont pas encore graduées... ce sont toujours des étiquettes placées les unes à côté des autres.

Au terme de cette activité, l'enseignant peut faire conclure que 31 est plus proche de 28 que 24. En effet, on peut compter les pas qui séparent 28 de 31, 28 de 24 pour conclure que c'est bien 31 qui est le plus proche de 28.

Cette activité peut être reprise deux ou trois fois au départ des interrogations suivantes :

Le plus proche de 53 avec les chiffres : 6, 4, 2, 3 (solution : 46)

Le plus proche de 55 avec les chiffres : 2, 4, 6, 8 (2 solutions : 48 et 62)

Le plus proche de 45 avec les chiffres : 1, 2, 3, 5 (solution : 51)

Après ces différentes recherches, la classe se sera constitué des morceaux de droite numérique (ou du moins des premières approximations de droite selon la régularité des graduations).

Activité 2

Objectifs :

Passer de la présentation d'une suite des nombres dans les cases d'une bande numérique vers une représentation de cette suite sur une droite numérique.

Utiliser la droite numérique comme outil mental ou dessiné de validation ou de résolution de problèmes

Matériel:

Une feuille contenant des droites numériques déjà graduées (une vingtaine de graduations) mais vierges de nombres.

Organisation:

Travail en duo ou individuel

Le maître dicte trois nombres aux élèves et leur demande de les placer sur la première droite numérique. Ces nombres sont 39, 23 et 28.

S'il constate des difficultés ou des erreurs de placement, il peut aider les

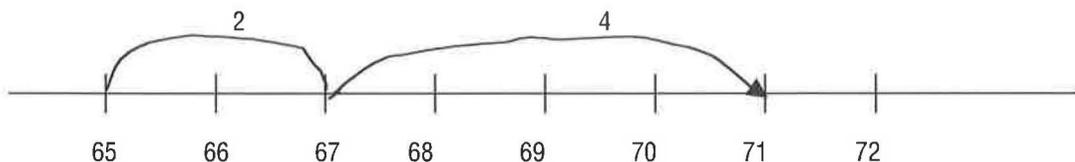
élèves en leur demandant quel est le plus petit ? Le plus grand ? et si nécessaire de compléter les graduations intermédiaires.

Il demande ensuite aux élèves de calculer l'écart entre le premier et le deuxième nombre (le nombre de pas pour aller du premier au second); ainsi que le nombre de pas entre le second et le troisième.

Mise en commun des procédures utilisées par les élèves:

Nouvelles séries de nombres à placer : 98, 89, 100 – 67, 71, 65 – 33, 40, 25 et 109, 95, 112

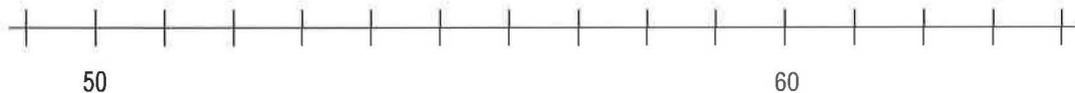
Même démarche et introduire progressivement la notation utilisant des arcs fléchés:



Prolongements

Proposer les activités d'entraînement suivantes :

1. placer les nombres 49, 52, 55 et 61 sur la droite numérique suivante :



2. Dans les exercices suivants, aucune graduation régulière n'est donnée :

- deux nombres sont donnés, par exemple 20 et 100, il faut placer tous

les nombres de deux chiffres que l'on peut former avec 1, 3, 5 et 6. La confrontation des propositions devrait sensibiliser les enfants à la plus grande proximité existant entre les nombres 31, 35 et 36... qu'entre

les nombres 51 et 36... sans pour autant aborder la proportionnalité de la longueur du segment entre deux nombres et de l'écart entre ces nombres. Ils seront amenés à remarquer que 31, 35 et 36 devront

être serrés; tout comme 51 et 53 et 63 et 65.

- Placer tous les nombres possibles sur cette droite



- Placer tous les nombres 50, 75, 57, 32, 87 sur cette droite :



Au cours de ce travail de mise en place de la droite numérique, il est nécessaire de varier les exercices pour que le positionnement approximatif des nombres sur la droite devienne un outil familier de mise en ordre et de comparaison.