LONGUEUR OU AIRE ?

Michel Brêchet

La résolution de problèmes relatifs à la mesure de longueurs, d'aires ou de volumes s'étend sur l'ensemble de la scolarité obligatoire. Dès les premiers degrés de l'école primaire, les élèves sont sensibilisés à la nécessité de choisir une unité pour comparer des lignes ou des surfaces, par exemple lorsqu'ils sont confrontés à des situations dans lesquelles une simple estimation est mise en défaut. Tour à tour, ils se servent de leur règle graduée, décomposent un objet en plusieurs parties afin de les utiliser pour tenter de constituer un autre objet, comparent deux surfaces par superposition directe, partagent un objet en plusieurs parties de grandeur connue avant de les dénombrer, mesurent par report d'une unité (conventionnelle ou non)... L'approche du calcul de la mesure d'une aire comme produit de mesures de longueurs intervient en cinquième année, dans le cas des rectangles, voire d'autres polygones aisément transformables en rectangles. Ce même procédé est revu en sixième année, notamment à propos du volume du cube et du parallélépipède rectangle. Mais auparavant, les élèves ont mesuré ou comparé des volumes par empilement d'unités ou par l'intermédiaire du remplissage de récipients gradués, en analogie au travail effectué pour les longueurs et les aires. A l'école secondaire, le développement de la perception de ces trois grandeurs géométriques se poursuit. Les élèves sont ainsi amenés à distinguer et à mesurer les grandeurs en jeu dans un problème, à déterminer les dimensions nécessaires à un calcul, à utiliser correctement une formule lors de l'étude d'un objet familier et à apprécier un résultat en référence à la réalité, à savoir à se prononcer sur la plausibilité de l'ordre de grandeur d'une mesure.

Malgré les nombreuses heures qu'ils ont consacrées durant la scolarité à l'étude des longueurs, aires et volumes, bien des élèves de 13-15 ans éprouvent encore de sérieuses difficultés à maîtriser ces grandeurs lors de la résolution d'un problème, notamment à se les représenter mentalement, à les distinguer les unes des autres et à prendre conscience de leurs variations respectives[1]. « *Plus l'aire d'une figure est grande, plus son périmètre est grand* », « *Deux surfaces de même périmètre ont même aire* », « *Deux solides de même volume ont même aire totale* », « *Deux cylindres (sans fond ni couvercle) fabriqués à partir de deux rectangles isométriques ont même volume* » sont des conceptions erronées qui émergent fréquemment. De même, la propriété selon laquelle l'aire (resp. le volume) de la réunion de deux figures (sans trou ni superposition) est égale à la somme des aires (resp. des volumes) de chaque figure est parfois étendue au périmètre ou à l'aire totale :

L'aire de ce losange est égale à la somme des aires des triangles qui le constituent. Mais le périmètre du losange n'est pas égal à la somme des périmètres des triangles.

Le volume de ce parallélépipède rectangle est égal à la somme des volumes des cubes qui le constituent. Mais l'aire totale du parallélépipède rectangle n'est pas égal à la somme des aires totales des cubes.

1. Bien évidemment, il ne s'agit pas ici de porter un regard critique sur la qualité du travail accompli à l'école obligatoire, mais bien de prendre en compte les obstacles à l'appropriation des grandeurs géométriques... et des autres (la masse et le temps par exemple).

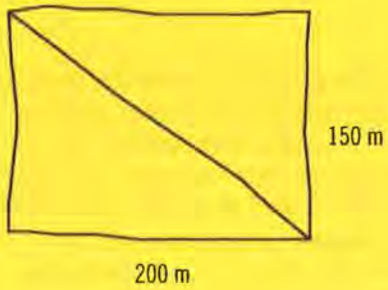
Regard sur quelques travaux d'élèves

Le problème suivant a été soumis à une centaine d'élèves des degrés 7, 8 et 9 ne connaissant pas la relation de Pythagore[2]. Chacun d'eux a eu 15 minutes pour le résoudre individuellement et pouvait utiliser son matériel de géométrie (règle, équerre, compas, rapporteur) et sa calculatrice.

Bill s'entraîne sur la piste rectangulaire et John sur l'une des pistes triangulaires, représentées ci-contre par un croquis.

Ils courent à la même vitesse et pendant la même durée.

Bill fait douze tours de piste. Et John ?

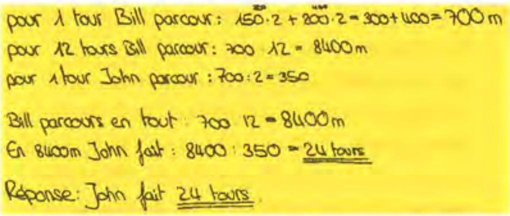


La recherche de la solution passe par plusieurs stades, dont ceux-ci :

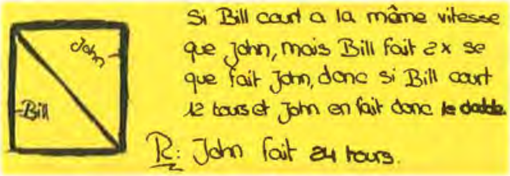
- repérer, sans la nommer explicitement, la grandeur à prendre en considération (le périmètre de chaque figure). Comme elle n'est pas mentionnée en toutes lettres dans l'énoncé, l'élève aura à l'identifier et à la discerner de l'aire, grandeur sur laquelle il pourrait être tenté d'opérer ;
- déterminer, à partir d'un dessin à l'échelle et donc approximativement, la mesure de la diagonale du rectangle (250 m) ;
- identifier le trajet de chaque coureur et calculer la longueur de chaque piste (600 m et 700 m) ;
- déduire de l'information « ils courent à la même vitesse et pendant la même durée » que Bill et John parcourent la même distance (cette étape peut s'appuyer sur un vécu extrascolaire ou sur des connaissances intuitives à propos du mouvement d'un corps ; elle ne nécessite pas à tout prix l'utilisation formelle de la relation *distance* = *vitesse* x *durée*) ;
- calculer la longueur totale parcourue par Bill (8400 m) puis le nombre de tours effectués par John (14).

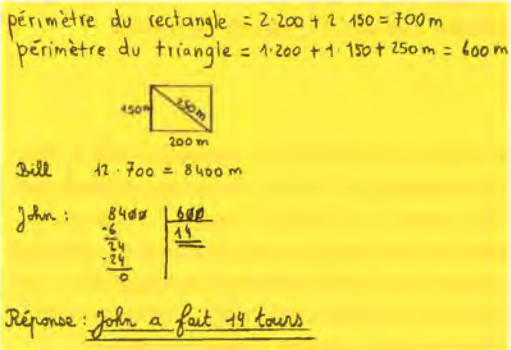
Les travaux présentés illustrent la plupart des difficultés rencontrées par les élèves. Ils fournissent par là même de précieux renseignements sur leurs connaissances. On peut les classer en cinq catégories :

2. Plus précisément : 12 élèves de 7e C, 23 élèves de 7e A, 31 élèves de 8e B, 17 élèves de 8e A et 11 élèves de 9e C. Dans le canton du Jura, pour chacune des disciplines français, allemand et mathématiques, il existe trois niveaux d'enseignement à l'école secondaire. Le niveau A est celui où les exigences sont les plus élevées.

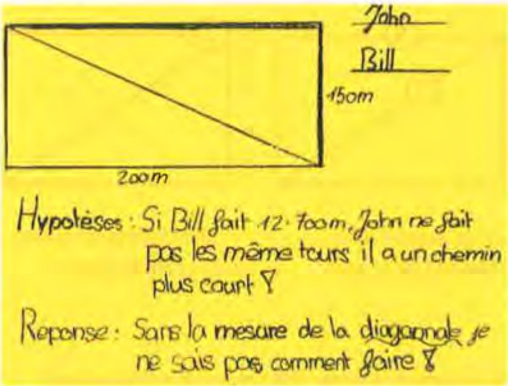


1) 45 % des élèves répondent que John fait 24 tours (ou 6 tours), en argumentant que la longueur de la piste rectangulaire est le double de celle de la piste triangulaire. Cette réponse est parfois donnée à la suite du calcul du trajet de Bill. Dans d'autres cas, aucun calcul n'accompagne l'argumentation. Fait révélateur, cette erreur est commise par des élèves de tous degrés et de tous niveaux, dans des proportions proches les unes des autres.





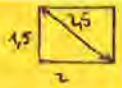
2) 17 % des élèves, majoritairement de niveau A, fournissent une réponse juste, explications à l'appui.



3) 17 % des élèves calculent la longueur du trajet de Bill. Ils échouent ensuite lors de la recherche de la mesure de la diagonale.

4) 15% des élèves mettent en place un raisonnement erroné fondé sur des calculs d'aires, de longueurs ou de durées.

Bill= sur la piste rectangulaire
nombre de tour= 12
John= sur la piste triangulaire
nbr. de tour= ?



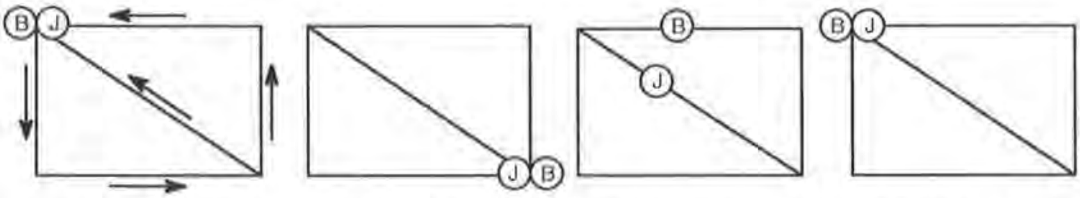
John court 600 m
Bill court 700 m
Bill court 100 m de plus que John

5) 6 % des élèves calculent successivement les longueurs de la piste rectangulaire (ou du trajet total parcouru par Bill), de la diagonale du rectangle et de la piste triangulaire. Ils donnent alors une réponse erronée (à la suite d'une erreur de raisonnement ou de calcul) ou ne fournissent aucune réponse.

En regard de cet état des lieux, le rôle de l'enseignant est d'organiser la relance sans dévoiler la procédure qui mène à la solution. Cette phase est très délicate à conduire si l'on veut que la recherche conserve son intérêt et que les élèves assument la plus grande partie de la tâche restante. A titre d'exemple, décrivons la démarche qui a été appliquée avec une des classes de 8e année.

Phase de relance

Deux élèves (appelés ci-après Bill et John) sont invités à mimer la situation le long de trajets, triangulaire pour l'un et rectangulaire pour l'autre, tracés sur le sol de la salle. Lors du premier mime, ils effectuent tout d'abord la moitié du périmètre du rectangle côte à côte, en se tenant par la main, puisque les deux sportifs courent à la même vitesse. Bill parcourt ensuite une largeur et une longueur du rectangle pendant que John parcourt sa diagonale. Les coureurs se retrouvent donc au même moment à leur point de départ, après un tour :



Bill et John au départ — Après un demi-tour de rectangle — Juste avant d'avoir fait un tour chacun — Bill et John se retrouvent au point de départ

La réaction de plusieurs élèves ne se fait pas attendre : *« Bill est allé plus vite sur la deuxième moitié de son tronçon. John doit faire deux tours pendant que Bill en fait un »*. Logique, puisque pour beaucoup d'élèves, John fait 24 tours et Bill en fait 12. Au cours du deuxième mime, les coureurs (deux autres élèves) effectuent dans un premier temps un demi-tour de rectangle côte à côte, à l'instar du premier mime. Bill termine ensuite son trajet pendant que John parcourt la diagonale du rectangle et un tour complet du triangle ! Les coureurs se retrouvent ainsi à nouveau au même moment au point de départ, et John a fait deux tours de piste triangulaire pendant que Bill a fait un tour de piste rectangulaire. Intervention immédiate des élèves : *« Impossible. Ils doivent courir à la même vitesse »*.

Suit un échange collectif, qui met en exergue diverses conceptions erronées à propos de la longueur de la diagonale du rectangle :

- elle est égale à la moitié du périmètre du rectangle ;
- elle est égale à la moitié de la moitié du périmètre du rectangle ;
- elle est égale au double de la longueur du grand côté du rectangle ;
- elle est égale à la moitié du produit de la longueur du rectangle par sa largeur.

Un troisième mime s'impose alors. Bill et John (un nouveau couple d'élèves) débutent comme précédemment. Bill parcourt ensuite une largeur et la moitié d'une longueur du rectangle pendant que John parcourt entièrement sa diagonale. D'où la réaction : *« Pourquoi Bill est-il exactement au milieu du grand côté lorsque John a accompli un tour complet »* ? Se dégage finalement l'interrogation suivante : *« Comment connaître la longueur de la diagonale du rectangle »* ? Réponse d'un élève : *« Faire un dessin en vrai, changer les mètres en centimètres, et mesurer »*. Suite à cette phase de relance d'une durée de 15 minutes environ, la grande majorité des élèves résout correctement le problème, individuellement toujours, et sans bénéficier d'indications supplémentaires[3]. Pour clore la leçon, la question du calcul de la valeur exacte de la longueur de la diagonale est posée par l'enseignant. Non pas pour étudier dans l'immédiat le théorème de Pythagore, mais bien pour préciser que cette longueur a été trouvée par mesurage (donc par un procédé pragmatique) alors qu'elle peut être obtenue par une formule mathématique (donc par un procédé intellectuel), car elle découle des autres données.

A qui la faute ?

Bien des élèves ont une tendance naturelle à généraliser abusivement certaines propriétés, méthodes, techniques ou relations, c'est-à-dire à les mettre en œuvre dans des situations où elles ne s'appliquent pas. C'est un fait bien connu des enseignants. Par exemple, la distributivité de la multiplication sur l'addition, constatée dès l'âge de 10 ans, est exercée à maintes reprises par la suite. Du coup, pas mal d'élèves de 14-15 ans pensent implicitement, à tort, que l'élévation à une puissance (opération proche de la multiplication) est distributive sur l'addition et donc que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Dans le même ordre d'idée, l'algorithme d'addition en colonnes est parfois utilisé pour multiplier deux nombres, le théorème de Pythagore est appliqué dans le cas de triangles ne possédant pas d'angle droit et les propriétés de la linéarité sont utilisées dans des situations non linéaires.
Par ailleurs, ces erreurs sont d'autant plus fréquentes lorsque les élèves passent trop hâtivement à des écritures symboliques et à des procédures systématiques, car la vigueur et l'appel du formel est alors plus forte que la base de sens.

Dans le problème qui nous intéresse, une partie des élèves ayant considéré que la longueur du trajet triangulaire était la moitié de celle du trajet rectangulaire ont sans doute été influencés par le fait que l'aire du triangle est la moitié de celle du rectangle. Ils n'ont donc pas discerné les propriétés respectives des deux grandeurs en jeu, voire les deux grandeurs elles-mêmes : un périmètre n'est pas une aire. Alors, à qui la faute ? Aux élèves,

3. Dans les autres classes, après des relances différentes (« matérialiser » le périmètre du rectangle et du triangle par une ficelle, effectuer un « voyage imaginaire » le long de chaque piste...), la plupart des élèves réussissent également à trouver la solution. Une exception toutefois : les élèves de 7e C échouent en grand nombre lorsqu'il s'agit de représenter les pistes à l'échelle. La complexité du problème est donc trop élevée pour eux.

parce qu'ils manquent de bonne volonté pour intégrer les connaissances nouvelles? Ou parce qu'ils manquent d'attention lorsqu'on leur donne des explications? Aux enseignants, parce qu'ils passent comme chat sur braises sur les réelles difficultés des élèves à comprendre les concepts de longueur et d'aire? Ou parce qu'ils se contentent trop rapidement de situations stéréotypées dans lesquelles il suffit d'appliquer les formules usuelles de calculs de périmètre et d'aire?
A l'énoncé du problème, parce qu'il demande un important travail de reconstruction mentale (assimiler les parcours à des figures géométriques exactes, faire comme si la vitesse des coureurs était constante)? Ou parce que, dans la réalité, il n'a pas de solution exacte? Aux moyens d'enseignement, parce qu'ils n'offrent pas suffisamment de problèmes qui obligent les élèves à se poser de bonnes questions? Ou parce qu'ils ne tiennent pas suffisamment compte des stades de développement intellectuel des enfants? Peut-être bien ni aux personnes ni aux outils. Mais tout simplement... au temps, qui n'a pas encore achevé ses effets, et dont l'importance dans les apprentissages est primordial. D'ailleurs, à y regarder de près, les élèves ne manquent pas de nous le rappeler chaque jour, à leur façon certes.
En confondant longueur et aire, par exemple.