VOYAGE AU PAYS DES FORMULES D'AIRES ET DE VOLUMES

Michel Criton
président de la FFJM, Paris

Une belle formule

Il existe une belle formule assez connue permettant d'exprimer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des trois côtés de ce triangle. Cette formule est connue sous le nom de *formule de Héron*[1]

Si a, b et c désignent les longueurs des trois côtés, et p le demi-périmètre du triangle, toutes ces longueurs étant exprimées dans une certaine unité, alors l'aire *A* du triangle, exprimée dans l'unité d'aire correspondante, est donnée par la formule :

$$A = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Qu'en est-il des quadrilatères ?

Existe-t-il une formule analogue pour les quadrilatères plans ? Ici, il faut remarquer que l'aire d'un triangle est entièrement déterminée par la longueur de ses trois côtés, alors que ceci n'est pas vrai pour l'aire d'un quadrilatère. Pourquoi ? Tout simplement parce que, contrairement à un triangle, un quadrilatère dont les côtés sont fixés peut être déformé, dans le plan et même hors du plan (voir figure 1).

1. Héron d'Alexandrie, mathématicien grec de la fin du 1er siècle de notre ère

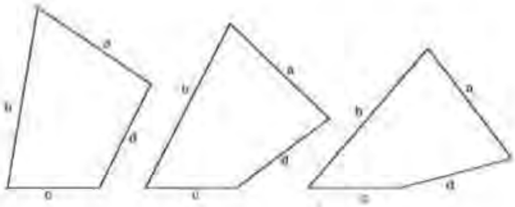

Figure 1
Trois quadrilatères non superposables mais ayant les mêmes mesures des côtés a, b, c, d

Même si deux quadrilatères ont les mêmes longueurs de côtés dans le même ordre et si l'on fixe l'un des angles de ces deux quadrilatères, ils peuvent ne pas être supersosables : l'un peut être convexe et l'autre non convexe (voir figure 2).

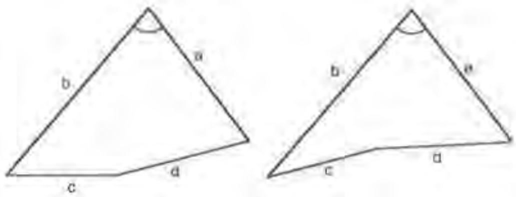

Figure 2
Deux quadrilatères ayant les mêmes mesures des côtés a, b, c, d, et la même mesure de l'angle entre a et b, l'un convexe et l'autre non convexe

Par contre, si l'on fixe les quatre côtés et un angle entre deux de ces quatre côtés et si l'on impose la convexité (ou la non-convexité), alors on obtient un quadrilatère plan unique, à condition bien sûr que les quatre longueurs et l'angle donnés en permettent l'existence. On peut alors penser qu'il existe une formule donnant l'aire A de ce quadrilatère en fonction des grandeurs données. Une telle formule existe et est connue sous le nom de *formule de Brahmagupta*[2] :

2. mathématicien et astronome indien, 598-environ 660

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\ \cos^2\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)}$$

où $\widehat{A}$ désigne la mesure de l'angle situé entre les côtés de longueurs a et d, et $\widehat{B}$ celle de l'angle situé entre les côtés de longueurs b et c.

Notre but n'est pas ici de démontrer cette formule, mais le lecteur courageux pourra s'atteler à la tâche.

On remarque que l'expression sous le radical est maximale lorsque les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont supplémentaires, c'est-à-dire lorsque *le quadrilatère est inscriptible dans un cercle.* On obtient alors la *formule de Brahmagupta pour un quadrilatère inscriptible.*

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

On admirera la beauté intrinsèque de cette formule. On pourra ensuite vérifier quelques cas particulières comme celui du rectangle, en posant a = c et b = d par exemple.
Un autre cas particulier intéressant : si l'on choisit d = 0, le quadrilatère perd un côté et devient un triangle... et on retrouve la formule de Héron.

Cette formule peut rendre bien des services. Les lecteurs de *Math-Ecole* qui ont peiné, voire souffert sur la résolution du problème 18 des quarts de finales individuels du 17e *Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques* pourront reprendre cette résolution à l'aide de cette formule et constater qu'elle s'en trouve grandement facilitée !

18. L'ÉTANG D'ARES (coefficient 18)

L'étang d'Ares est un quadrilatère dont les côtés ont pour longueurs des nombres entiers de mètres tous différents, inférieurs à 100 m et non multiples de 5.

Chaque côté de cet étang est également le côté d'un terrain carré. Les quatre propriétaires de ces terrains, Matthieu, Mathurin, Mathilde et Mathias doivent les partager en parcelles de 100 m². Ils constatent qu'il leur reste à chacun la même surface inutilisée.

Quelle est, au maximum, l'aire de l'étang d'Ares ?
On donnera la réponse en m², arrondie au centième.

Il existe une autre formule donnant l'aire d'un quadrilatère convexe en fonction des longueurs des quatre côtés a, b, c, d du quadrilatère et de ses deux diagonales p et q.

Il s'agit de la *formule de Bretschneider*[3] :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)}$$

3. Carl Anton Bretschneider, 1808-1878, professeur de mathématiques au Gymnasium de Gotha, Allemagne, auteur de *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides : ein historischer Versuch.* BG Teubner, Leipzig, 1870.

Le cas des solides

On peut légitimement se demander s'il existe des formules analogues pour les volumes des solides. Prenons le cas du solide le plus simple : le tétraèdre. Un tétraèdre est entièrement déterminé par la donnée des six longueurs de ses arêtes, ces mesures étant associées par paires correspondant à des arrêtes opposées. Existe-t-il une formule donnant la mesure du volume d'un tétraèdre dont les arêtes ont pour mesures a, b, c, d, e et f (a étant opposée à e, c à d et b à f)? La réponse est oui. Cette formule était connue d'Euler[4].

La voici :

$$\begin{aligned}12^2 V^2 = {} & (a^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \\ & - 2\,[a^2e^2(a^2 + e^2) + b^2f^2(b^2 + f^2) + c^2d^2(c^2 + d^2)] \\ & - (a^2b^2d^2 + a^2c^2f^2 + b^2c^2e^2 + d^2e^2f^2).\end{aligned}$$

On ne peut qu'admirer la puissance de travail légendaire du grand Leonhard Euler qui lui a permis de trouver cette formule à une époque où, rappelons-le, les seuls outils du mathématicien étaient le papier et la plume !

On peut alors se poser la question suivante : existe-t-il une formule permettant de calculer la mesure du volume d'un pentaèdre inscriptible dans une sphère à partir des mesures de ses arêtes, et dont la formule d'Euler serait un cas particulier, en réduisant une face à zéro ?

La même question peut être posée pour un hexaèdre. Il faudrait bien sûr préciser la nature précise de l'hexaèdre : celui-ci peut posséder une face pentagonale et cinq faces triangulaires (pyramide à base pentagonale), ou six faces triangulaires (bi-pyramide à base triangulaire) ou encore six faces quadrilatérales (voir figure 3).

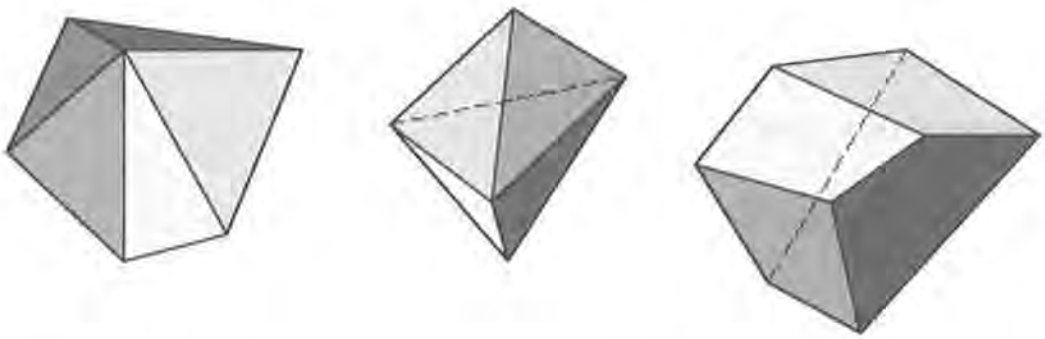

Figure 3.
Les différents types de solides cités dans le texte

Le problème est, semble-t-il, ouvert, à moins qu'un lecteur ne connaisse des formules pour de tels volumes (et leur origine).

4. mathématicien suisse, 1707-1783