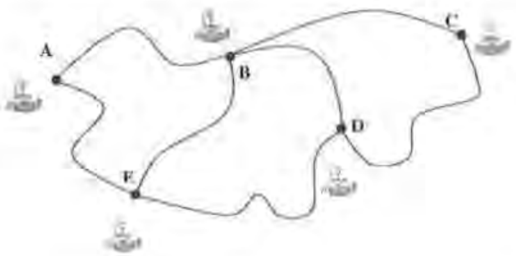
11e RMT, ÉPREUVE 1

Voici les problèmes de la première épreuve du 11e Rallye mathématique transalpin, sur lesquels 2000 classes des degrés 3 à 8 se sont affrontées en janvier et février 2003, dans 19 régions d'Italie, France, Luxembourg, Israël et Suisse (118 classes au Tessin et 228 en Suisse romande). Ces énoncés sont suivis de quelques commentaires et résultats de la Suisse romande.

1. FONTAINES (Cat. 3)

Chaque matin, Monsieur Amidezo passe boire un peu d'eau à chacune de ses cinq fontaines.

Il suit les chemins marqués sur le plan.



Il part toujours de la fontaine A, sans jamais passer deux fois par la même fontaine.

Combien Monsieur Amidezo peut-il faire de parcours différents pour passer par toutes ses fontaines? Décrivez vos parcours précisément.

2. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 3, 4)

La voiture d'Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu'un chiffre nouveau apparaît.

- Il fait « cric » à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait « crac » à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait « rrmt » à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd'hui Alphonse va faire une promenade en voiture. Il met son compteur à 0:

0	0	0

Voici le compteur après 13 km:
Il a déjà fait 14 bruits: 13 « cric » et 1 « crac ».

0	1	3

A son retour, le compteur marque 127 km.

1	2	7

Combien Alphonse a-t-il entendu de bruits en tout au cours de sa promenade?
Expliquez comment vous avez trouvé et dites combien de « cric », combien de « crac » et combien de « rrmt » il a entendu.

3. LES CHAMPIGNONS (Cat. 3, 4)

André, Robert, Daniel et François ont trouvé des champignons dans la forêt.

- François en a trouvé plus que Daniel.
- André en a moins que Daniel.
- André et Robert, les deux ensemble, ont autant de champignons que Daniel et François ensemble.

Qui a trouvé le plus de champignons? Qui en a trouvé le moins? Expliquez vos réponses.

4. CHEMINS (Cat. 3, 4)

Vous devez aller de la zone A à la zone B, puis revenir de B à A, en passant toujours d'un pavé à un pavé voisin. En allant, vous ne devez passer que sur sept pavés et la somme des nombres de ces sept pavés doit être la plus grande possible.

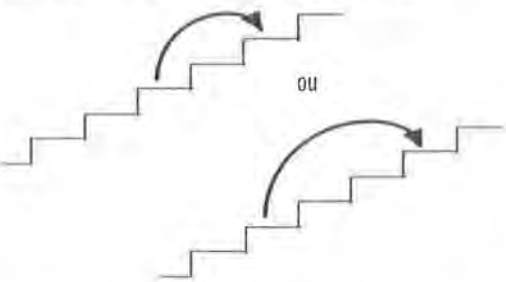
A					
4	10	14	8	10	14
8	13	10	4	14	9
7	7	6	5	11	7
12	16	5	12	9	8
7	9	2	3	12	14
12	6	10	10	4	9
8	9	4	6	11	10
B					

Au retour, vous pouvez passer sur plus de sept pavés, mais la somme des nombres de ces pavés doit être la plus petite possible.

Coloriez le chemin de A à B en sept pavés dont la somme est la plus grande et écrivez votre calcul. Coloriez d'une autre couleur le chemin de retour de B à A par des pavés dont la somme est la plus petite et écrivez votre calcul.

5. LES SAUTS DE FÉLIX (Cat. 3, 4, 5)

Pour garder sa forme physique, le chat Félix saute jusqu'en haut d'un escalier qui a 11 marches. A chaque saut, il monte 2 marches ou 3 marches à la fois.



Avec quelles séries de sauts Félix peut-il atteindre la 11e marche ? Ecrivez toutes les solutions différentes que vous avez trouvées.

6. PAUL ET PIERRE (Cat. 4, 5)

Paul est né quand son père, Pierre, avait 26 ans.

Aujourd'hui, si on additionne leurs deux âges, on obtient 60.

Quel est l'âge de Paul et de Pierre aujourd'hui ? Expliquez comment vous avez obtenu votre réponse.

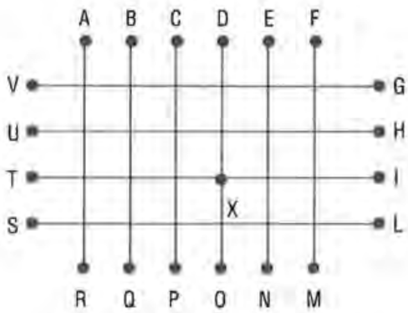
7. L'ARAIGNEE (Cat. 4, 5, 6)

Une araignée se déplace le long des fils d'un treillis.

Elle part d'un des points indiqués sur la figure par A, B, C, ... U, V et arrive au croisement X, où elle s'arrête pour construire sa toile.

Le long de son chemin elle se déplace ainsi :

- au premier croisement, elle passe tout droit ;
- au deuxième, elle tourne à gauche ;
- au troisième, elle tourne à gauche ;
- au quatrième, elle tourne à droite ;
- au cinquième, elle tourne à droite ;
- au sixième, elle passe tout droit ;
- au septième, elle tourne à droite ;
- au huitième croisement, elle s'arrête.



De quels points l'araignée a-t-elle pu partir ? Dessinez tous les parcours possibles de l'araignée.

8. LA CARAVANE (Cat. 5, 6)

Ali et Fatima regardent passer une caravane d'ânes et de chevaux.

Il y a aussi des hommes, qui sont tous sur des chevaux. Sur chaque cheval, il y a un seul homme, avec une caisse derrière lui.

Sur chaque âne, il y a deux caisses.
Ali compte les pattes des animaux, il en trouve 52.
Fatima compte les caisses, il y en a 21 en tout.

Combien y a-t-il d'hommes dans cette caravane ? Expliquez votre réponse.

9. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 5, 6)

La voiture d'Alphonse a un vieux compteur qui fait des bruits à chaque kilomètre, chaque fois qu'un chiffre nouveau apparaît.

- Il fait « cric » à chaque changement du premier chiffre, de droite.
- Il fait « crac » à chaque changement du chiffre du milieu.
- Il fait « rrmt » à chaque changement du chiffre de gauche.

Aujourd'hui Alphonse va faire une promenade

0	0	0

en voiture. Il met son compteur à 0 :

Voici le compteur après 13 km.

0	1	3

Il a déjà fait 14 bruits : 13 « cric » et 1 « crac ».

A la fin de sa promenade, Alphonse a entendu 140 bruits en tout.

Combien de kilomètres a parcouru Alphonse au cours de sa promenade ? Expliquez comment vous avez trouvé.

10. PROFESSEUR TOURNESOL (Cat. 5, 6, 7)

M. Tournesol se rend en voiture de sa maison à son bureau. C'est seulement lorsqu'il est exactement à mi-chemin qu'il se rend compte que la petite lampe du niveau d'essence clignote et que son réservoir est presque vide.

Il décide alors de faire demi-tour pour se rendre à la station d'essence qui se situe exactement au milieu du trajet déjà parcouru.

Après avoir fait le plein, il repart en direction de son bureau. Lorsqu'il y arrive, il constate que son compteur indique 24 km. Il l'avait remis à zéro le matin en partant de sa maison.

A quelle distance de la maison se trouve le bureau de M. Tournesol ?
Expliquez votre raisonnement.

11. JETS DE PIERRE (Cat. 5, 6, 7, 8)

André et Bruno ont trouvé un vieux cerceau de fer. Ils le suspendent à une branche d'arbre et jouent à lancer des pierres au travers. Ils décident alors de faire un concours dont les points sont attribués selon les règles suivantes :

- si le caillou passe à l'intérieur du cerceau, sans le toucher, c'est « centré » et l'on gagne 1 point ;
- si le caillou passe à l'extérieur du cerceau, c'est « manqué » et l'on perd 1/2 point ;
- si le caillou touche le cerceau, c'est « touché », on ne gagne rien, mais on ne perd rien non plus.

Après avoir lancé 12 pierres chacun, André et Bruno sont à égalité avec chacun 6 points. Ils ont tous les deux touché le cerceau, mais André l'a touché plus souvent que Bruno.

Combien de « centré » a obtenu André ? Et combien en a obtenu Bruno ?
Expliquez votre raisonnement.

12. L'ÉTENDAGE (Cat. 6, 7, 8)

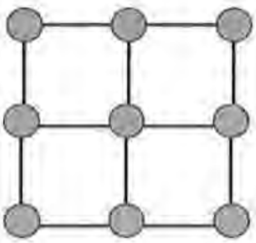
Mademoiselle Printemps veut étendre 9 mouchoirs carrés de 32 cm de côté sur un fil de 2,50 m de longueur. Elle commence à disposer les deux premiers mouchoirs en les recouvrant partiellement et en les fixant à l'aide d'une pince à linge

Mais, comme elle souhaite faire un travail très régulier et utiliser toute la longueur du fil, elle se demande :

De combien de centimètres deux mouchoirs voisins devront-ils se recouvrir ?
Expliquez votre raisonnement.

13. GRILLES (Cat. 6, 7, 8)

Pour construire cette grille de 2 x 2 carrés, Léo a utilisé 9 boulettes de pâte à modeler et 12 allumettes.



Pour faire une grille de 3 x 3 carrés, il lui faudra 16 boulettes et 24 allumettes.

Léo veut construire une grille carrée avec 289 boulettes de pâte à modeler.

De combien d'allumettes aura-t-il besoin ?
Expliquez votre raisonnement.

14. PERROQUETS COLORES (Cat. 7, 8)

Les oeufs pondus par le perroquet de Marc sont éclos. Chaque oisillon qui vient de naître est d'une seule couleur : jaune, rouge, vert ou bleu.

Marc observe que les nouveau-nés sont
- tous rouges sauf 15,
- tous jaunes sauf 12,
- tous verts sauf 14,
- tous bleus sauf 13.

Combien Marc a-t-il de petits perroquets ?
Et combien de chaque couleur ?
Expliquez votre raisonnement.

15. LA PLATE-BANDE FLEURIE (Cat. 7, 8)

Dans une plate-bande, il y a des oeillets et des tulipes ; on a planté exactement 5 oeillets pour 6 tulipes.

Un violent orage détruit 12 fleurs de chaque sorte.

Maintenant, dans la plate-bande, il ne reste plus que 3 oeillets pour 4 tulipes.

Combien d'œillets et combien de tulipes y avait-il dans la plate-bande avant l'orage ?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

16. LA POURSUITE (Cat. 7, 8)

Durant sa ronde de nuit, Sem le policier voit un voleur quitter en courant une bijouterie. Il se lance aussitôt à sa poursuite.

Au début de la poursuite, la distance entre Sem et le voleur équivaut à 18 pas du voleur.

Pendant que le voleur fait 8 pas, Sem en fait 5. Mais, en longueur, 2 pas de Sem valent 5 pas du voleur.

Combien de pas Sem devra-t-il faire pour attraper le voleur ? Expliquez votre raisonnement.

17. L'ENTRAINEMENT DE BASKET (Cat. 8)

Chaque fois que Jean va au basket, sa mère vient le rechercher en voiture. Elle part de la maison, ne s'arrête pas en chemin, arrive régulièrement au terrain à la fin de l'entraînement et rentre tout de suite avec son fils.

Mais aujourd'hui, l'entraînement s'est terminé beaucoup plus tôt que d'habitude. Sa mère n'étant pas encore arrivée, Jean est immédiatement parti à pied à sa rencontre. Ils sont ainsi arrivés à la maison 12 minutes plus tôt que les autres jours.

La mère roule en voiture toujours à la même vitesse, qui est 5 fois celle de Jean lorsqu'il marche.

Combien de temps Jean a-t-il marché à la rencontre de sa mère ?
Avec combien de minutes d'avance l'entraînement s'est-il terminé aujourd'hui ?

COMMENTAIRES ET SOLUTIONS

Nous donnons ici quelques extraits des « analyses a priori » des problèmes précédents, établies systématiquement pour chacun d'eux – par les concepteurs de l'épreuve, en coordination internationale – afin de s'assurer que les problèmes du RMT placent les élèves devant des tâches de résolution leur permettant de construire ou de mobiliser des savoirs mathématiques.

Ces analyses préalables de la tâche décrivent les procédures attendues, mais parfois, les groupes d'élèves qui résolvent les problèmes trouvent d'autres voies, qui apparaissent dans les analyses a posteriori, conduites après l'épreuve. Ces dernières sont exigeantes en temps et énergie, nous n'en publions encore que quelques esquisses pour trois problèmes.

Nous donnons aussi une indication sur la « réussite » de ces problèmes, par la moyenne des points attribués aux copies de Suisse romande par les équipes de correcteurs de l'épreuve. Ces jurys sont composés d'enseignants dont les classes participent au RMT et qui acceptent de consacrer du temps à la correction de toutes les réponses et explications des classes de la région pour un même problème. Cette attribution des points se fonde sur des critères bien précis élaborés lors de l'analyse a priori au niveau international, pour permettre de futures études comparatives entre degrés, entre régions et entre des systèmes scolaires différents. Les critères de correction ne sont pas reproduits ici mais proposent, en général, la répartition suivante :

4 points pour une réponse complète et juste, avec des explications ou justifications claires et détaillées ;

3 points pour une réponse complète et juste, avec des explications laissant à désirer ;

2 points pour la réponse sans aucune explication, juste ou avec une légère erreur de calcul, parfois incomplète selon les problèmes ;

1 point pour un début de recherche organisée, avec quelques tentatives cohérentes ;

0 point pour une procédure totalement inadaptée ou l'incompréhension du problème.

Cette « moyenne », M, est un nombre entre 0 et 4, noté ci-dessous pour chaque catégorie, en regard du titre du problème.

1. FONTAINES (Cat. 3 : M = 2.22)

Problème de parcours et de combinatoire bien réussi, seules quatre classes sur 18 n'ont pas compris la demande. Toutes les autres ont trouvé au moins 5 ou 6 parcours et les ont décrits correctement

Analyse de la tâche :

- Comprendre qu'un itinéraire complet des fontaines consiste, en partant de A, à passer une seule fois par toutes les autres fontaines, selon les chemins offerts.
- Essayer, par essais, d'effectuer un itinéraire et se rendre compte qu'il y a plusieurs possibilités.
- Comprendre la nécessité d'une méthode systématique pour déterminer tous les parcours possibles qui relient la fontaine A aux autres fontaines B, C, D, E.
- Utiliser un diagramme en arbre pour noter les divers parcours, ou les marquer de différentes couleurs ou les noter sur autant de copies du dessin.
- Déterminer les six parcours complets possibles : A-B-C-D-E, A-B-E-D-C, A-E-B-C-D, A-E-B-D-C, A-E-D-B-C, A-E-D-C-B. Vérifier aussi que les deux itinéraires : A-B-D-C et A-B-D-E sont incomplets parce qu'ils ne passent que par quatre fontaines.

2. LE VIEUX COMPTEUR (Cat. 3 : M = 0,72, Cat. 4 : M = 1,67)

Ce problème sur les régularités de notre système de numération s'est révélé très difficile en 3e année où les incompréhensions sont majoritaires. En 4e année, le taux de réussite est meilleur, mais de nombreux élèves ont abusé notoirement de la linéarité en pensant que, puisque Alphonse entend 14 bruits sur les 13 premiers kilomètres, il en entendra 140 sur 130 kilomètres et 3 de moins en 127 km. La « tentation de la proportionnalité » est bien connue, mais les concepteurs du problème n'avaient pas prévu qu'elle serait aussi forte ici.
Ces résultats, comme ceux d'autres problèmes proposés ces dernières années par le RMT, montrent que les régularités de la numération ne sont pas évidentes et que, même si les élèves savent énoncer ou écrire la suite des nombres, beaucoup de ses propriétés ne sont pas perçues clairement.

Analyse de la tâche :

- Comprendre le fonctionnement de l'objet « compteur » pour aider à passer de l'objet mécanique à la succession des nombres naturels écrits par trois chiffres.
- Écrire les premiers nombres 001, 002, 003, 004… et compter les changements, puis constater que de 009 à 010 il y a deux changements, un « cric » et un « crac ».
- En passant, vérifier le 013 de l'exemple, puis continuer, en faisant apparaître la règle « chaque dizaine, 11 bruits »
- Passer la centaine en ajoutant un bruit « rrmt » à la règle précédente.
- Effectuer le comptage final : 127 « cric », 12 « crac » et 1 « rrmt », c'est-à-dire 140 bruits, ou comprendre que les 127 « cric » correspondent aux unités, les 12 « crac » sont ceux des dizaines et le « rrmt » est celui du passage de la centaine.

3. LES CHAMPIGNONS (Cat. 3 : M = 1,5, Cat. 4 : M = 2,34)

Analyse de la tâche :

- Comprendre et interpréter correctement les trois informations.
- Représenter ou imaginer les deux relations d'ordre : $F > D$; $A < D$ et les combiner pour obtenir la sériation des trois enfants A, D et F : $A < D < F$.
- Interpréter l'égalité $A + R = D + F$ et la mettre en relation avec la sériation précédente par une compensation du genre : puisque D et F en ont chacun plus que A, il faudra que R en ait plus que D et que F pour compenser ;
  ou travailler à partir d'exemples numériques par hypothèses du genre : si A en a 3, D en a 5 et F en a 6, alors R doit en avoir 8 car $5 + 6 = 11$ et $3 + 8 = 11$, répétés plusieurs fois pour se convaincre de la sériation $A < D < F < R$.
- Exprimer la réponse : C'est Robert qui en a le plus et André le moins.

L'analyse a posteriori a montré que la sériation déterminée par les deux premières phrases de l'énoncé était construite facilement par la grande majorité des élèves. Certains élèves se sont arrêtés là. Par exemple :
François en a plus que Daniel, Daniel en a plus que André et André en a moins que François. Réponse : Celui qui en a le plus est François, celui qui en a le moins est André. (F. le plus, A. le moins) Comment nous avons trouvé la réponse : Grâce à l'aide de la consigne. Il n'y a pas de calcul.

C'est au moment d'insérer Roger que les choses se gâtent. Parmi les groupes qui n'arrivent pas à prendre en compte l'égalité A + R = D + F, une majorité place R en dernier. Par exemple, l'explication qui suit tient compte du placement de F et D en tête du premier trio sans tenir compte de la troisième phrase :
1. François, 2. Daniel, 3. André, 4. Robert.
Il est évident que François et Daniel sont les premiers,
1. Ce sont les deux qui ont cueilli le plus de champignons,
2. en plus, ils sont ensemble.
François est le premier, tandis que Robert est le dernier.

Lorsque les élèves pensent aux deux sommes égales, ils y associent parfois des petits nombres ou des dessins, mais, en troisième année particulièrement, ils ont de la peine à expliquer leur procédure. Une classe répond par exemple : « Robert » accompagné d'un dessin d'un personnage et 4 champignons et « André », où le personnage n'a qu'un seul champignon. On constate ainsi que les nombres imaginés sont souvent les « ordinaux » du classement du premier trio : 3 pour François, 2 pour Daniel et 1 pour André.

Une autre classe donne l'ordre exact des quatre personnages et se contente de l'explication « On a tout compris grasse à la consigne. (sic) ».

Une autre classe, de 4e cette fois-ci, semble avoir adopté une procédure numérique avec des grands nombres :
Celui qui en a trouvé le plus est Robert. Celui qui en a trouvé le moins est André. Au début on a trouvé un nombre dans notre tête qui était 31. Après on a mis deux nombres un plus grand et un plus petit et pour les deux derniers on a fait pareil.

Parmi les explications considérées comme suffisantes pour des élèves de 3e et 4e années, il y a celles qui font état d'une compensation, comme les suivantes :
André en a moins que tous les autres et si Robert en avait peu ça n'irait pas. Ils n'arriveraient pas à en avoir autant que François et Daniel. Nous avons calculé que François en a plus que Daniel, André en a moins que Daniel. Puis nous avons trouvé que puisque André et Robert ont la même somme que François et Daniel d'ailleurs que André a une somme minime, c'est sûrement Robert qui a la somme la plus haute de tous. Après c'est François parce qu'il en a trouvé plus que Daniel. À la fin ils disent que André en a moins que Daniel c'est-à-dire que le dernier est André.

Les réponses qui se basent sur des hypothèses numériques sont plus faciles à argumenter et attestent souvent d'une suite d'inférences logiques parfaitement rigoureuse :
(R. en a le plus, A. en a le moins)... Supposons que André en a 4 vu que Daniel doit en avoir plus disons qu'il en a 5 et vu que François doit en avoir encore plus que Daniel disons qu'il en a 6. Daniel et François en ont 11, André et Robert doivent aussi faire 11, Robert en aura donc 7. Voilà.

4. CHEMINS (Cat. 3 : M = 1,5, Cat. 4 : M = 2,07)

Il y avait beaucoup de calculs à faire dans ce problème de cheminement optimum. La majorité des classes, autant en troisième qu'en 4e année, ont compris les règles de cheminement, mais il semble que la collaboration au sein des groupes n'a pas été toujours optimale. Il faut évidemment se répartir les itinéraires pour obtenir celui qui donne le maximum ou le minimum.

Analyse de la tâche :
- Comprendre la règle de cheminement.
- Imaginer les différents chemins (d'aller et de retour) et calculer toutes les sommes correspondantes.
- Trouver le chemin optimum par comparaisons et compensations terme à terme : le maximum à l'aller : 77 (10, 14, 11, 8, 14, 9, 11) et le minimum au retour : 38 (6, 4, 3, 2, 5, 6, 4, 8)

5. LES SAUTS DE FÉLIX
(Cat. 3 : M = 0.94, Cat. 4 : M = 1,21, Cat. 5 : M = 2,28)

Plus de la moitié des classes de 3e et de 4e années n'ont pas compris la demande de ce problème de combinatoire. Pour celles qui ont pu entreprendre une démarche, il y avait encore beaucoup d'embûches, comme en témoigne l'analyse de la tâche :

- Trouver toutes les sommes dont les termes ne sont que des 2 et des 3 et dont le résultat est 11.
- Comprendre que la marche 11 ne peut être atteinte par des sauts de 2 uniquement, ni par des sauts de 3 uniquement, et que Félix doit donc mélanger les deux types de sauts.
- Essayer de répartir les divers sauts en quelques catégories, par exemple, décrire les suites comprenant

trois grands sauts, ensuite celles comprenant un seul grand saut.
- Indiquer pour chaque catégorie les différentes suites de sauts possibles.

catégorie 1

3 x **3** + 1 x **2** 4 suites possibles
3 + 3 + 3 + 2 ; 3 + 3 + 2 + 3
3 + 2 + 3 + 3 ; 2 + 3 + 3 + 3

catégorie 2

1 x **3** + 4 x **2** 5 suites possibles
3 + 2 + 2 + 2 + 2 ; 2 + 3 + 2 + 2 + 2 ;
2 + 2 + 3 + 2 + 2 ; 2 + 2 + 2 + 3 + 2 ;
2 + 2 + 2 + 2 + 3

Le barème était aussi assez sévère puisque les « 4 points » n'étaient attribués qu'aux réponses mentionnant les 9 possibilités avec explications claires et qu'il fallait 3 ou 4 possibilités bien détaillées pour obtenir « 1 point ».

6. PAUL ET PIERRE (Cat. 4 : M = 2,73, Cat. 5 : M = 3,22)

Analyse de la tâche :
- Comprendre qu'on est en présence de deux suites arithmétiques qui se développent simultanément, que la première commence à 0 et la seconde à 26, et écrire les deux suites en s'arrêtant lorsque la somme des deux valeurs correspondantes est 60.
- Ou chercher progressivement, parmi les couples de nombres dont la somme est 60, celui dont l'écart des deux nombres est 26.
- Ou se rendre compte que 60 est la somme de 26 et du double de l'âge de Paul, et en déduire que Paul a (60 – 26) : 2 = 17 ans et Pierre en a 26 + 17 = 43.

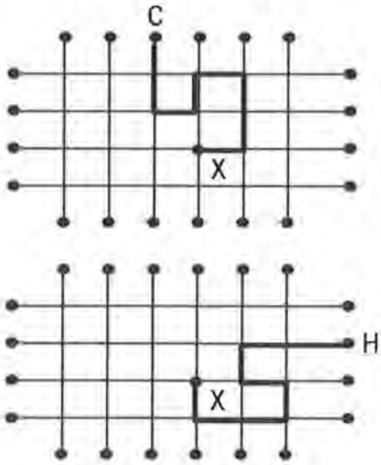
Ce problème d'arithmétique, bien réussi, a fait apparaître des procédures intéressantes, autres que celles prévues dans l'analyse a priori précédente. Par exemple, la suivante correspond à la procédure algébrique (où x représente l'âge de Pierre et $x - 26$ l'âge de Paul) :
$x + (x - 26) = 60 \Rightarrow 2x = 60 + 26 \Rightarrow x = 30 + 13$
avec un contrôle de la différence.

Nous avons divisé 60 par 2, 60 : 2 = 30 et ensuite nous avons divisé 26 par 2, 26 : 2 = 13, ensuite nous avons additionné 30 + 13 = 43 et nous avons trouvé l'âge de Pierre, ensuite nous avons fait 60 – 43 = 17 et ensuite nous avons contrôlé s'ils ont 26 ans de différence et alors Paul a 17 ans et Pierre a 43 ans.

7. L'ARAIGNEE
(Cat. 4 : M = 0,78, Cat. 5 : M = 2,02, Cat. 6 : M = 1,67)

Ce problème de cheminements sur un réseau a été mal réussi en 4e année et mieux réussi en 5e qu'en 6e années. Les résultats sont assez contrastés : beaucoup de « 0 points » et de « 4 points » (les deux réponses correctes et complètes, avec les deux points C, H et les dessins des parcours correspondants), quelques « 1 point » (Identification de un ou plusieurs parcours contenant une seule erreur de direction) et peu de réponses intermédiaires.

Analyse de la tâche :
On peut aborder le problème selon deux points de vue différents :
- exécuter les ordres en partant chaque fois de points différents de la grille, écarter les parcours qui n'amènent pas à X et identifier les deux parcours possibles, c'est-à-dire ceux qui partent de C et de H comme sur la figure suivante :



- ou suivre les ordres en rétrogradant du point X (il s'agit d'intervertir gauche et droite) et se rendre compte qu'il y a deux parcours possibles.

8. LA CARAVANE (Cat. 5: M = 2,73, Cat. 6: M = 2,89)

Ce problème a déjà été proposé aux élèves il y a 6 ans, dans un contexte légèrement différent, mais avec les mêmes données à une petite modification près: les « 21 caisses » ont remplacé « 19 bosses » de chameaux ou dromadaires. Il s'agit en fait de savoir comment les élèves organisent, sans algèbre, la résolution d'un « système de deux équations du premier degré à deux inconnues ». Le nombre moyen de points obtenus n'a pas varié en six ans. La première expérience a permis d'affiner l'analyse a priori, qui est confirmée par les résultats de la seconde passation.

Analyse de la tâche:

- Trouver le nombre d'animaux, par la division 52 : 4 = 13, lorsqu'elle est opérationnelle, par multiplication lacunaire (où il s'agit de déterminer le facteur inconnu... x 4 = 52), ou par addition de termes « 4 », ou par dessin...
- Se rendre compte que la recherche du nombre d'hommes revient à trouver le nombre de chevaux ou encore le nombre d'animaux avec une caisse; puis que le nombre de caisses est supérieur à celui des animaux mais qu'il ne peut dépasser le double du nombre des animaux.
- Engager la recherche qui peut se dérouler:
  par essais successifs au hasard ou organisés;
  par dessin, en répartissant les 13 premières caisses sur chaque animal et les autres ensuite, ou en en plaçant deux par animal et en retirant celles qui sont en trop;
  par des raisonnements analogues à ceux des procédures de dessin mais sans support graphique.
- Ou, constater que s'il y avait 13 ânes et aucun cheval, il y aurait 26 caisses: 5 de trop. Réduire alors le nombre d'ânes et augmenter celui des chevaux pour arriver à la solution 8 ânes et 5 chevaux, qui est unique.
- Ou, commencer par une division par 2, du nombre de caisses ou du nombre d'animaux et arrondir à un nombre naturel, (10 caisses sur les chevaux et 11 sur les ânes ou 6 chevaux et 7 ânes) puis procéder ensuite aux adaptations nécessaires pour arriver à 5 chevaux et 8 ânes.
- Transcrire la réponse en nombre d'hommes
  5 chevaux –> 5 hommes.

9. LE VIEUX COMPTEUR
(Cat. 5: M = 0,65, Cat. 6: M = 1,13)

Il s'agit du même problème que celui proposé aux catégories 3 et 4 (numéro 3), avec une modification de l'énoncé: au lieu de demander le nombre de bruits en 127 km (140), on inverse la question et l'on demande le nombre de kilomètres parcourus (127) après avoir entendu 140 bruits. Cette demande est plus délicate et les obstacles à la résolution sont encore plus élevés, pour des élèves qui ont pourtant deux ans de plus que ceux à qui l'on a posé la première question. Là encore, on constate que, devant ce problème inédit qui ne fait appel qu'aux régularités de la suite des nombres, les élèves montrent la précarité de leur compréhension de notre système de numération.

L'analyse de la tâche est la même pour l'appropriation du problème, mais on constate que pour déterminer le nombre de kilomètres, il faut travailler par approximations successives:

- Comprendre le fonctionnement de l'objet « compteur » pour aider à passer de l'objet mécanique à la succession des nombres naturels écrits par trois chiffres.
- Écrire les premiers nombres 001, 002, 003, 004... et compter les changements, puis constater que de 009 à 010 il y a deux changements, un « cric » et un « crac ».
- En passant, vérifier le 013 de l'exemple, puis continuer, en faisant apparaître la règle « chaque dizaine, 11 bruits »
- Observer que chaque kilomètre correspond à un « cric », et recenser tous les bruits par un tableau, par exemple (ci-dessous):

« cric » ou km	1	...	10	11	...	13	...	20	...	30	100	110	120
« crac »	0	...	1	1	...	1	...	2	...	3	10	11	12
« rrmt »	0	...	0	0	...	0	...	0	...	0	1	1	1
total	**1**		**11**	**12**	**...**	**14**	**...**	**22**	**...**	**33**	**111**	**122**	**133**

et noter qu'à ce point, il manque encore 7 bruits (des « cric », c'est-à-dire des km) pour arriver à 140 bruits, c'est-à-dire à 127 km.

- Ou procéder par d'autres essais organisés (par dizaines, par centaines, par groupes de 11...)

10. PROFESSEUR TOURNESOL

(Cat. 5 : M = 1,63, Cat. 6 : M = 2,36, Cat. 7 : M = 2,96)

Dans ce problème qui fait appel à quelques connaissances arithmétiques élémentaires, et à la représentation d'un déplacement, on constate une nette progression de la réussite entre la 5e et la 7e année.

Analyse de la tâche :

- Imaginer ou représenter le trajet parcouru depuis la maison (A) au bureau (B) avec le milieu M et la station d'essence E

A	→	E	→	M		B
		E	←	**M**		B
		E	→	M	→	**B**

- Comprendre que le parcours total équivaut à 6/4 du parcours ou 1/2 + 1/4 + 1/4 + 1/2 ou encore, une fois et demie la distance AB, ce qui correspond à 3/2.

- Chercher la valeur de 1/4 du parcours : 24 : 6 = 4 et en déduire que AB = 4 x 4 = 16 (km) ou le noter sur un dessin,

  ou procéder par essais successivement adaptés. Par exemple :
  AB = 20, parcours : 10 + 5 + 5 + 10 = 30 (trop grand)
  AB = 12, parcours : 6 + 3 + 3 + 6 = 18 (trop petit)...

  ou, à partir de 3/2 AB = 24, tirer 1/2 AB = 24 : 3 = 8 et AB = 8 x 2 = 16

  ou passer par une procédure pré-algébrique du genre 1/2 d + 1/4 d + 1/4 d + 1/2 d = 24 et résolution par essais successifs sur d.

- Exprimer la distance AB et vérifier le résultat.

11. JETS DE PIERRE (Cat. 5 : M = 1,87, Cat. 6 : M = 2,24, Cat. 7 : M = 2,73, Cat. 8 : M = 2,75)

Dans ce problème qui fait appel aux capacités de contrôler simultanément plusieurs conditions, qui demande des hypothèses et déductions, qui exige de la logique et un peu de combinatoire, mais qui ne mobilise que des connaissances arithmétiques élémentaires, le degré scolaire a peu d'effets sur les résultats moyens dès le 7e degré.

Analyse de la tâche :

- Déterminer les façons d'obtenir un total de 6 en 12 tirs et en déduire immédiatement qu'il faut un nombre de « centré » supérieur ou égal à 6. A ce point les situations suivantes peuvent se produire :
  6 « centré » et 6 « touché »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 6)
  7 « centré », 2 « manqué » et 3 « touché »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1-1/2-1/2 + 0 + 0 + 0 = 6)
  8 « centré » et 4 « manqué »
  (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1-1/2-1/2-1/2-1/2 = 6)
  Ce sont les seuls cas possibles de 12 tirs avec un total de 6. En effet, avec 9 « centré », même en admettant que les trois derniers tirs sont « manqués », on obtient 7,5 points
- Déduire que le cas 8 « centré » est exclu (le cercle n'est jamais touché) et que André a fait 6 « centré » pendant que Bruno en a fait 7.

  Les critères d'attribution étaient particulièrement exigeants dans ce problème. Le « 4 » demandait la réponse correcte (André 6 centré et Bruno 7), avec explications montrant que les trois situations possibles avaient été envisagées. Le « 3 » n'était obtenu qu'en cas de vérification des nombres de tirs et de points. La réponse correcte seule, comme si elle avait été trouvée au hasard, ne donnait que « 2 ».

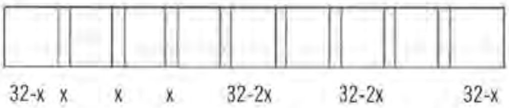
12. L'ETENDAGE

(Cat. 6 : M = 0,93, Cat. 7 : M = 2,10, Cat. 8 : M = 2,50)

Manifestement, la notion de recouvrement régulier des mouchoirs n'a pas été comprise par une majorité des classes de 6e, mais on peut se demander si le fait du nombre d'intervalles, inférieur de 1 à celui des mouchoirs, n'a pas été aussi un obstacle important. On s'attendait à ce que les classes de degré 8, qui disposent de l'outil « équation » réussissent mieux ce problème.

Analyse de la tâche :

- Comprendre la disposition correcte finale des mouchoirs et observer qu'ils y a huit recouvrements :



- Observer que, s'ils ne se recouvraient pas, les mouchoirs occuperaient une longueur de fil de 288 (9x32), en cm, et que la différence 38 (288 – 250) doit être distribuée sur les huit recouvrements de chacun 4,75 (38 : 8), en cm.

- Ou choisir une inconnue, par exemple en désignant par x chacun des recouvrements, et poser l'équation correspondante : $2(32 - x) + 8x + 7(32 - 2x) = 250$ et la résoudre pour trouver la solution $x = 38/8 = 4{,}75$

- Ou encore procéder par essais sur un dessin à l'échelle, commençant par exemple par dessiner les deux mouchoirs latéraux dont la position est fixée et en adaptant la position des mouchoirs centraux.

13. GRILLES

(Cat. 6 : M = 1,56, Cat. 7 : M = 2,36, Cat. 8 : M = 3,35)

Pour obtenir le maximum de points à ce problème de suite régulière de nombres, avec une fonction du deuxième degré à la clé, on demandait la solution correcte (544 allumettes) avec explications complètes (qui peuvent aussi être un dessin, un tableau ou une formule).

Analyse de la tâche :

- Dessiner des grilles de carrés de 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, … 16 x 16 et compter les boulettes
- Ou construire un tableau de progression (voir encadré en bas de page).
  Remarquer que le nombre de boulettes correspond à la suite des nombres carrés et que le nombre des allumettes s'obtient en additionnant le nombre des allumettes de la grille précédente à la différence entre cette dernière et celle de la grille précédente et en ajoutant 4. Ou observer que les différences entre les nombres d'allumettes sont ceux de la suite des multiples de 4 à partir de 8 : 8, 12, 16, 20,
- Ou noter que si la grille est composée de i x i carrés, le nombre des boulettes est $(i + 1)(i + 1)$ et le nombre des allumettes $2i(i + 1)$; ou chercher une formule permettant de résoudre le problème quel que soit le nombre de cases de la grille carrée :
  si n est le nombre de boulettes, le nombre d'allumettes est $2(n - \sqrt{n})$

14. PERROQUETS COLORÉS

(Cat. 7 : M = 2,16, Cat. 8 : M = 2,37)

Il faut contrôler simultanément plusieurs conditions et maîtriser le passage d'une proposition à sa négation pour résoudre ce problème, pas à pas. On peut aussi le résoudre par l'algèbre.

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte que le nombre n des petits perroquets est supérieur à 15 et procéder par essais :
  si n = 16 alors il y aurait 1R (16 – 15), mais ainsi, selon les conditions suivantes, il y aurait aussi 4G, 2V et 3B et leur somme serait 10 et non 16 ;
  si n = 17 alors il y aurait 2R (17 – 15), mais ainsi,

grille	1 x 1	2 x 2	3 x 3	4 x 4	5 x 5	6 x 6	7 x 7	8 x 8		16 x 16
boulettes	4	9	16	25	36	49	64	81	…	289
allumettes	4	12	24	40	60	84	112	144	…	544

selon les conditions suivantes, il y aurait aussi 5G, 3V et 4B et leur somme serait 14 et non 16 ;
si $n = 18$ alors il y aurait 3R, 6G, 4V et 5B, dont la somme représenterait effectivement 18 petits perroquets.

– Se rendre compte que $n = 18$ est l'unique solution parce que si n était supérieur à 18, la somme $R + G + V + B$ serait supérieure à n (et l'écart augmenterait avec la croissance de n).
– Ou procéder par voie algébrique :
se rendre compte que « ils sont tous rouges sauf 15 » équivaut à dire qu'il y a 15 non-rouges – c'est-à-dire les jaunes, les verts et les bleus – et arriver ainsi à l'équation $G + V + B = 15$,
poursuivre de façon analogue pour les autres couleurs et arriver aux trois autres équations
$R + V + B = 12$; $R + G + B = 14$; $R + G + V = 13$;
résoudre le système par substitutions successives, ou se rendre compte qu'en additionnant membre à membre on obtient :
$3 (R + V + G + B) = 15 + 12 + 14 + 13 = 54$ et en déduire par conséquent que le nombre total des petits perroquets est 18 (54 : 3).
– En déduire qu'il y a 3 petits perroquets rouges (18 – 15), 6 jaunes (18 – 12), 4 verts (18 – 14) et 5 bleus (18 – 13).

15. LA PLATE-BANDE FLEURIE
(Cat. 7 : M = 2,16, Cat. 8 : M = 2,33)

Dans ce problème de proportionnalité, l'organisation des données est essentielle et les deux tableaux ci-dessous sont des instruments efficaces.

Analyse de la tâche :

– Etablir un tableau des combinaisons de rapport 5/6

Oeillets	**Tulipes**
5	6
10	12
15	18
20	24
25	30
30	36
35	42
...	...

Etablir un tableau de rapport 3/4

Oeillets	**Tulipes**
3	4
6	8
9	12
12	16
15	20
18	24
21	28
...	...

– Comparer les deux tableaux et découvrir qu'en diminuant de 12 les éléments (30, 36) de rapport 5/6 on obtient un couple d'éléments (18, 24) de rapport 3/4. Donc il y a 30 oeillets et36 tulipes.
– Ou observer que, avec les oeillets, on peut former des groupes de 5 et avec les tulipes des groupes de 6. Après la tempête, avec les oeillets, on peut former des groupes de 3 et avec les tulipes des groupes de 4 ; se rendre compte que ceci équivaut à retirer deux fleurs de chaque groupe, tant des oeillets que des tulipes. Puisqu'il y a 12 fleurs détruites de chaque sorte, il y a 6 groupes de chaque sorte. Donc, initialement, il y avait 30 (6 x 5) oeillets et 36 (6 x 6) tulipes.

16. LA POURSUITE (Cat. 7 : M = 1,60, Cat. 8 : M = 2,33)

Problème plus difficile en catégorie 7 qu'en catégorie 8. Il faut de l'ordre et de la rigueur dans les différentes unités utilisées : « pas de Sem » et « pas du voleur »

Analyse de la tâche :
– S'approprier l'idée de déplacements par « étapes temporelles » (une avance de 18 pas au début et, au cours de la poursuite, chaque fois que le voleur fait 8 pas Sem en fait 5) et organiser les étapes, graphiquement ou par une disposition structurée (voir par exemple les lignes 2 et 3 du tableau de la page suivante) ; puis introduire l'équivalence des longueurs « 2 pas de Sem valent 5 pas du voleur » où les pas de Sem ont été convertis en pas du voleur par proportionnalité : 5 pas de Sem = 12,5 pas du voleur (voir ligne 4 du tableau) et finalement, comparer les déplacements de Sem et du voleur dans la même unité (lignes 2 et 4 du tableau) pour s'apercevoir que Sem rejoint le voleur après 50 pas du voleur, c'est-à-dire 20 pas de Sem.

« étapes »	0	1	2	3	4	5	…
dépl. du voleur (en pas du voleur)	18	18 + 8 = 26	26 + 8 = 34	42	50	58	…
dépl. de Sem (en pas de Sem)	0	5	2 x 5 = 10	15	20	25	…
dépl. de Sem (en pas du voleur)	0	12,5	25	37,5	50	62,5	…

- Ou résoudre le problème algébriquement, par exemple en imaginant que Sem rattrape le voleur en n étapes. Il faut alors convertir les pas du voleur en pas de Sem (en remplaçant 1 pas du voleur par 2/5 ou 0,4 pas de Sem) et poser l'équation $18x0{,}4 + (8x0{,}4)n = 5n$ dont la solution est 4 (étapes) correspondant à 20 pas de Sem.
- Ou procéder par essais organisés, par exemple : si Sem fait 10 pas (2x5), qui valent 25 pas du voleur, celui-ci parcourt 34 pas (18 + 2x8)… c'est insuffisant, si Sem fait 30 pas (6x5), qui valent 48 pas du voleur, celui-ci parcourt 66 pas (18 + 6x8)… c'est trop.

17. L'ENTRAINEMENT DE BASKET (Cat. 8 : M = 1,50)

La solution est évidente si on ne tient compte que des 12 minutes gagnées et du déplacement de la mère, comme le montre l'analyse de la première partie de la tâche. Mais, dans ces problèmes où interviennent des vitesses, des temps gagnés et des déplacements, la difficulté est de choisir la « bonne inconnue ». Une des difficultés du problème vient du fait que les durées cherchées sont indépendantes des vitesses et des déplacements.

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte que les 12 minutes gagnées sont celles que la mère aurait utilisées pour parcourir deux fois (6 minutes à l'aller et 6 minutes au retour) le trajet du terrain au point où elle a rencontré Jean ; en déduire que le temps utilisé par Jean, dont la vitesse est le cinquième de celle de la voiture, pour parcourir le trajet à pied est de 30 minutes (6 x 5), comprendre que, vu que Jean a marché 30 minutes et a passé 6 minutes de moins que d'habitude en voiture, l'entraînement s'est terminé 36 minutes (30 + 12 – 6) plus tôt que d'habitude. (Cette deuxième réponse dépend strictement de la réponse à la première question)
- Ou faire un raisonnement hypothétique avec choix de données réalistes du genre : L'entraînement se termine d'habitude à 18h15, la mère part à 18h et revient à 18h30 avec son fils ; en se déplaçant à 60 km/h, elle parcourt 30 km (2 fois 15). Aujourd'hui elle part à 18h comme d'habitude mais revient 12 minutes plus tôt, à 18h18, donc elle n'a parcouru que 18 km (2 fois 9) et Jean en a fait 6 (15 – 9). A la vitesse de 12 km/h, il a marché 30 minutes. Son déplacement a duré 39 minutes (30 + 9) en tout, ce qui fait que l'entraînement s'est terminé à 17h39 (18h20 – 39 min), avec 36 (18h15 – 17h39) minutes d'avance sur l'horaire habituel.

  Puis vérifier avec d'autres données hypothétiques en modifiant par exemple la vitesse et la distance de la maison : La mère part à 17h50 et revient à 18h40 en se déplaçant à 30 km/h, elle parcourt 25 km (2 fois 12,5). Elle revient aujourd'hui à 18h28, donc elle n'a parcouru, en 38 minutes, que 19 km (2 fois 9,5) et Jean en a fait 3 (12,5 – 9,5). A la vitesse de 6 km/h, il a marché 30 minutes. Son déplacement a duré 49 (30 + 19) minutes en tout, ce qui fait que l'entraînement s'est terminé à 17h39 (49 min avant 18h28), avec 36 minutes (18h15 – 17h39) d'avance sur l'horaire habituel.

  Constater alors que les réponses 30 minutes et 36 minutes sont indépendantes de la vitesse et de la distance de la maison et de l'emplacement du point de rencontre qui leur est lié !!

Des analyses plus approfondies de certains de ces problèmes paraîtront dans les prochains numéros. Les lecteurs qui seraient intéressés à y participer sont les bienvenus.