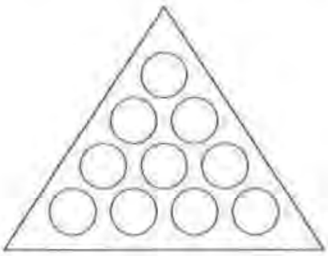
SORTILÈGE À 3 CÔTÉS OU COMMENT FAIRE DES CALCULS DE MANIÈRE LUDIQUE

Martine Simonet

Voici un jeu du commerce dont les potentialités pour le calcul sont certainement très riches.



Matériel :

- 1 plateau de jeu en bois avec 6 trous sur une face (*Mini Sortilège*) et 10 trous sur l'autre face (*Grand Sortilège*, voir dessin ci-dessus) ;
- 10 pions numérotés de 1 à 10 ;
- 100 cartes-défis avec 5 degrés de difficulté pour le *Mini Sortilège* ;
- 100 cartes-défis avec 3 degrés de difficulté pour le *Grand Sortilège* ;
- un livret explicatif traduit de l'allemand dans un français et un langage mathématique approximatifs (chiffres au lieu de nombres, « coins » du triangle...)

La règle du jeu [1] est très simple : il faut placer les pions dans les trous de manière à obtenir la même somme sur chacun des trois côtés du triangle. Pour varier la recherche, des cartes-défis proposent des situations de départ indiquant l'emplacement d'un ou plusieurs pions et la somme à atteindre. Une feuille-réponse (voir fiche 1) permet à l'élève de garder une trace écrite de sa solution.

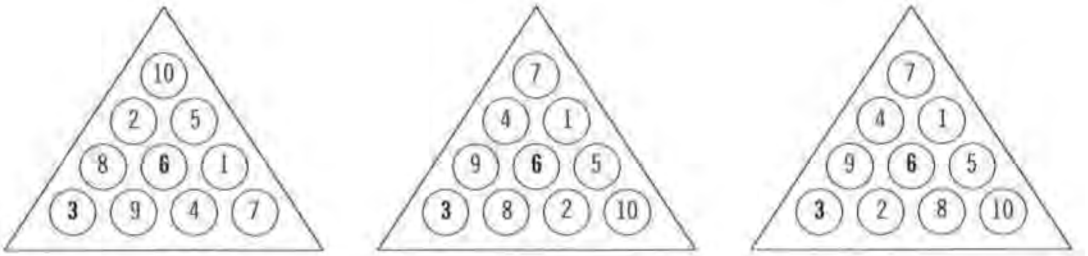
Comme la solution n'est pas unique, il n'y a pas de « corrigé » permettant à l'élève de vérifier sa production. Mais la validation peut se faire à l'aide d'une calculatrice, par un camarade ou encore par l'enseignant.

On pourrait imaginer se passer du matériel et ne faire cette activité que sous forme de fiches. Expérience faite dans une classe de 4e année primaire, voici ce que j'ai constaté : les enfants oublient qu'il n'y a qu'un seul pion pour chaque nombre de 1 à 10 et ils écrivent plusieurs fois le même nombre dans une même « grille ». Avec une version uniquement papier-crayon, la gomme est mise à rude contribution et la solution trouvée devient parfois illisible...

Indubitablement, la recherche est plus aisée et ludique en manipulant le matériel.

Lors d'une mise en commun, les exploitations possibles des productions des élèves sont multiples. En effet, pour une même somme et une même configuration de départ, la comparaison entre les différentes solutions peut

1. Je l'appelle « jeu » de mon point de vue d'enseignante, mais en est-il vraiment un pour les élèves ? Si j'utilise ici ce mot, c'est à défaut d'en trouver un autre plus adéquat. « Jeu » est à comprendre ici dans le sens de casse-tête, défi, recherche dans laquelle on se fixe personnellement des étapes... Il est évident que ces jeux peuvent facilement se transformer en « problèmes ouverts » à l'image de ceux du Rallye Mathématique Transalpin par exemple.



permettre de mettre en évidence une des propriétés de l'addition, la commutativité, ou de faire apparaître – du point de vue de la répartition spatiale des nombres – la notion de symétrie (axiale ou centrale).

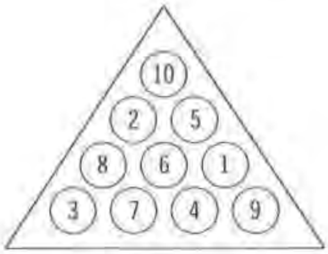
Exemple :
les deux premières solutions ci-dessus, à gauche, sont équivalentes à une symétrie axiale près (axe passant par le sommet « 3 »). La solution de droite peut aussi être considérée comme équivalente à celle du centre, à une permutation près de deux nombres d'un même côté, entre « 2 » et « 8 ».

Dans la brochure explicative, les auteurs proposent de résoudre des problèmes tels que : « Quelle est la plus grande/petite somme possible ? » avant d'utiliser les cartes-défis. Le but de ces questions est de mettre en évidence certaines caractéristiques, par exemple :

Dans le *Grand Sortilège*, le nombre figurant sur le pion central n'est pas pris en compte dans le calcul de la somme alors que les nombres placés aux sommets sont comptés deux fois. Il faut donc placer le 1 au centre du triangle, et les pions 7, 8 et 9 dans les angles, pour obtenir la plus grande somme possible.

J'ai choisi l'approche inverse avec les élèves de ma classe. Ce faisant, j'ai eu envie d'en connaître plus sur leurs stratégies, et notamment de savoir s'ils procèdent par compensation lorsqu'une seule des trois sommes n'est pas correcte après avoir placé tous les pions.

Pour tenter de répondre à cette question, j'ai imaginé le problème suivant [2] :



Brigitte a trouvé cette solution, mais elle s'est trompée : la somme des nombres sur un des côtés du triangle ne vaut pas 23.

Aide-la à trouver une solution correcte en changeant de place le moins de pions possible.

Explique comment tu as réfléchi.

2. Le symbolisme des cartes du jeu pour signaler la somme des quatre nombres de chaque côté n'est pas correct, d'un point de vue mathématique, en raison de l'usage abusif du signe « = ». Il faudrait lui préférer une addition de quatre termes du genre « ... + ... + ... + ... = 23 » où les cercles vides représentent des espaces pour placer des nombres ou une écriture comme « ..., ..., ..., ... —> 23 » illustrant quatre nombres alignés encore inconnus dont la somme devra donner 23.

Analysons le problème :

A) $10 + 2 + 8 + 3 = 23$
B) $3 + 7 + 4 + 9 = 23$
C) $10 + 5 + 1 + 9 = 25$ Il y a 2 de trop !

Quel(s) pion(s) est-il possible de changer sur cette ligne sans modifier les sommes des deux autres lignes ? On ne peut qu'échanger un des deux pions placés à chaque extrémité de la ligne C avec un pion de l'autre ligne à laquelle il appartient.

Voyons ce qui se passe avec le pion 10 : sur la ligne A, on intervertit les pions 10 et 8. La somme A reste inchangée en vertu de la commutativité de l'addition. La somme C se trouve diminuée de 2 et est donc maintenant égale à 23.

Et le pion 9 ? On peut l'échanger avec le 7 qui vaut 2 de moins, la somme C ($25-2 = 23$) est maintenant égale à la ligne B qui vaut toujours 23.

Il y a donc deux solutions possibles.

La plupart des élèves de ma classe ont trouvé au moins une des deux possibilités. La difficulté pour quelques-uns s'est située au niveau de la verbalisation. Ils n'ont pas réussi à expliquer comment ils avaient réfléchi.

Voici trois exemples (à quelques corrections orthographiques près) de productions d'élèves de 4e année primaire :

Kristofer : *« J'ai changé le 8 et le 10. Parce qu'il y a 2 unités de différence et il faut enlever 2 unités à celui qui a 25 au lieu de 23. »*

Émile : *« J'ai vu que la ligne de en-haut à en bas à droite avait 2 de trop = 25. Puis j'ai vu que sur la ligne d'en bas le 7 pouvait se mettre sur la ligne fausse et que ça enlevait 2 et le 9 était déjà sur la ligne du 7 donc cela changeait seulement la ligne fausse. »*

Mélanie : *« J'ai commencé par dessiner le même triangle et j'ai déplacé 2 ronds et ça m'a donné à tous la même réponse. »* (avec dessin de la solution)

Émile est le seul élève à avoir explicitement dit que l'échange de deux pions placés sur une même ligne ne modifie pas la somme.

L'explication de Mélanie m'interroge et me renvoie à l'énoncé « explique comment tu as réfléchi ». Si j'avais choisi cette formulation de préférence à « explique comment tu as fait », c'était pour éviter d'obtenir ce type de réponse !

En marge du travail individuel de recherche, on peut lancer des défis à la classe sous forme de concours par équipes.

La classe est partagée en deux groupes, voire plus, et chacun reçoit le même problème (par exemple le Défi du Grand Sortilège) à résoudre en un temps record.

La recherche étant trop longue pour être menée par une seule personne, le travail de groupe prend ici tout son sens. A la charge des élèves de s'organiser, de coopérer.

Vous trouverez encore d'autres suggestions d'activités dans le livret explicatif fourni avec le plateau de jeu, les pions et les 200 cartes-défis.

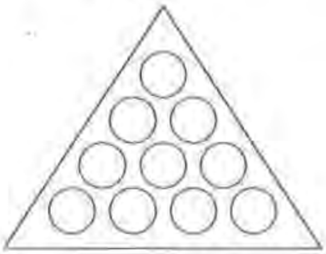
Ce jeu peut être commandé en Suisse à l'adresse suivante :

SOLA DIDACT,
rue des Finettes 54,
CH-1920 Martigny,
tél. : 027 722 54 64
ou par e-mail :
soladida@omedia.ch

LE DÉFI DU GRAND SORTILÈGE

Martine vient de trouver une solution pour ce triangle.

Elle se demande s'il est possible de trouver un triangle dont la somme des nombres sur chaque côté est aussi égale à 21 mais avec « 2 », puis « 3 », puis « 4 »… et finalement « 10 » mis à tour de rôle au centre du triangle.



somme 21

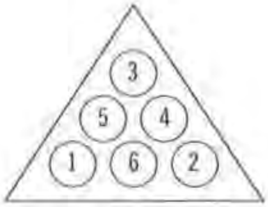
Qu'en pensez-vous ? Justifiez votre réponse.

Rappel :
Pour chaque triangle, on utilise les nombres de 1 à 10. On ne peut pas écrire plusieurs fois le même nombre dans un même triangle.

Réponse au *Défi du Grand Sortilège*:
Il n'y a pas de solution avec le nombre 3 comme pion central, mais la preuve de cette affirmation passe par un inventaire systématique des nombres possibles sur les sommets et d'un examen de l'existence de solutions pour les nombres qui ne sont pas sur les sommets ni au centre. (voir annexe)

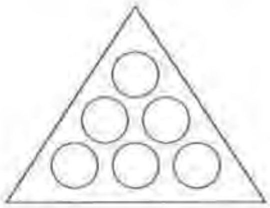
LE DÉFI DU PETIT SORTILÈGE

Martine a construit un petit triangle, avec les nombres de 1 à 6, dont la somme des nombres sur chaque côté est 9.



somme 9

Mais elle n'arrive pas à trouver une solution dont la somme des nombres sur chaque côté est 10.



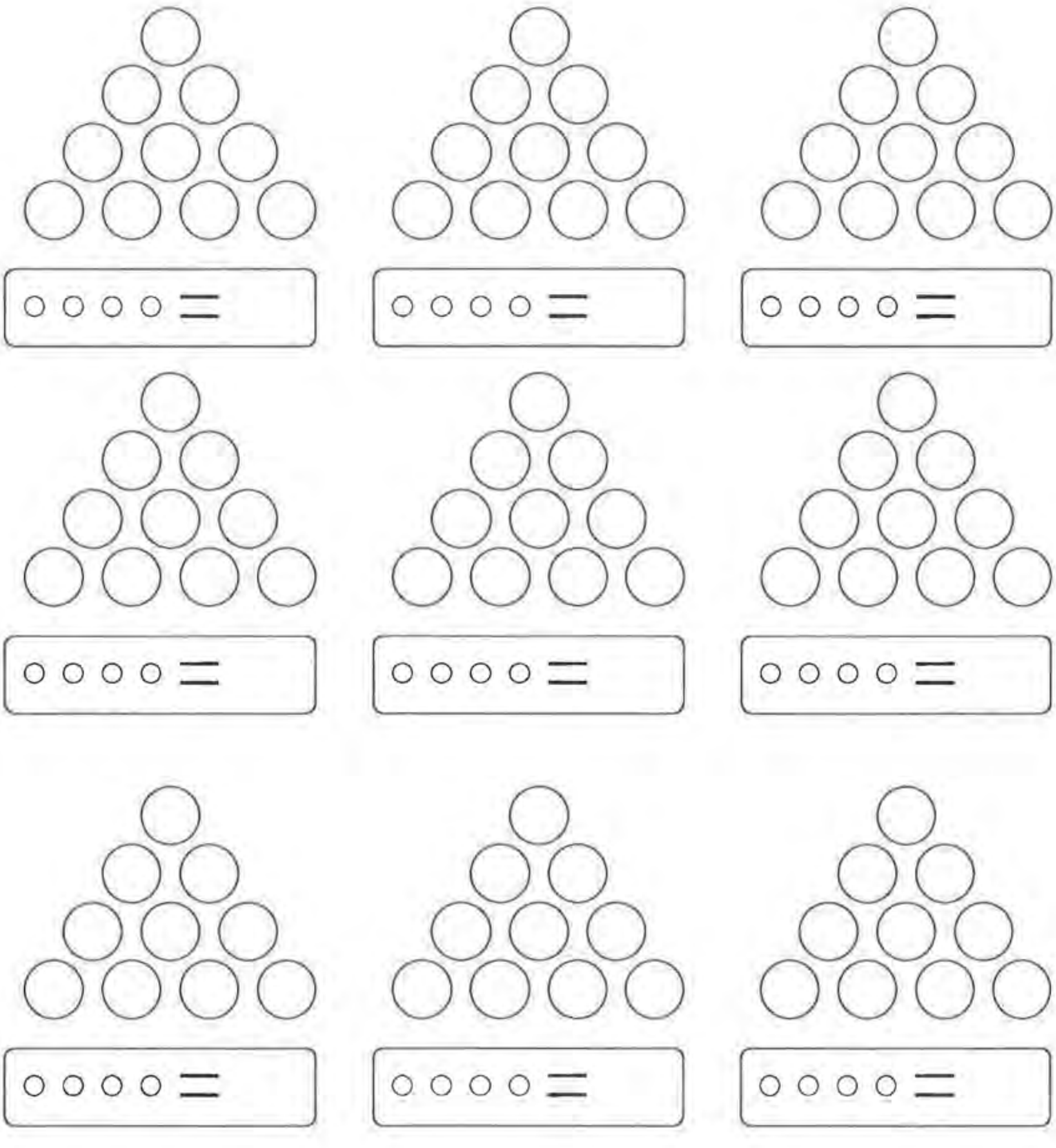
somme 10

Cette solution existe-elle ?
Quelles sont les autres sommes possibles ?

Rappel :
Pour chaque triangle, on utilise les nombres de 1 à 6. On ne peut pas écrire plusieurs fois le même nombre dans un même triangle.

GRAND SORTILÈGE

Recopie au stylo les nombres figurant sur la carte-défi.
Écris ensuite ta solution au crayon noir.
Si tu veux, tu peux colorier les 4 petits ronds de la couleur de la carte-défi.
N'oublie pas ! Chaque nombre de 1 à 10 ne peut être utilisé qu'une seule fois !



ANNEXE

par François Jaquet

Inventaire des solutions du *Grand Sortilège* dont la somme des nombres de chacun des trois côtés du triangle est 21 ou « lorsque le langage algébrique se révèle plus économique que la rhétorique »

Les dix nombres $a, b, \ldots, j$ sont les dix nombres naturels de 1 à 10, dont la somme est 55 :

$$a + b + c + d + e + f + g + h + i + j = 55 \qquad \text{(I)}$$

Puisque la somme des nombres de chaque côté est 21, les trois sommes donnent 3 x 21 = 63 :

$$(a + b + d + g) + (a + c + f + j) + (g + h + i + j) = 63 \qquad \text{(II)}$$

Le nombre du centre, e, ne figure pas dans cette dernière égalité mais les nombres des sommets, a, b, c, y figurent deux fois. On peut donc réorganiser la relation (II) par permutations et associations ainsi :

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i + j) + a + g + j - e = 63 \qquad \text{(II')}$$

et en la comparant à la relation (I), simplifier le tout pour obtenir la relation :

$$55 + a + g + j - e = 63 \qquad \text{(III)}$$

ou, en soustrayant 55 à chacun des deux membres de l'égalité :

$$a + g + j - e = 8 \qquad \text{(III')}$$

ou encore, finalement,

$$a + g + j = 8 + e. \qquad \text{(III'')}$$

Dans ce qui précède, on peut évidemment se passer du langage algébrique et n'utiliser que la « langue » habituelle de communication, comme les phrases insérées ci-dessus entre les relations littérales. En français, par exemple, la relation (III'') s'exprime par : « la somme des trois nombres aux sommets des triangles vaut 8 de plus que le nombre du centre ».

L'algébrisation – ou la généralisation que permet l'usage de symboles (ici les lettres a, b…) – se révèle utile pour organiser l'inventaire des solutions.

« J'essaie avec le nombre 1 au centre, puis avec les nombre 2, etc. « revient à prendre successivement les dix valeurs possibles de la variable « e » par une représentation en arbre ou en tableau par exemple (première colonne du tableau suivant). « Si le nombre 1 est dans la case centrale, la somme des trois nombres des sommets vaudra 9 » se généralise de manière algorithmique – ou mécanique – aux autres cas (au moyen d'un tableur par exemple).

On peut aussi, par un raisonnement algébrique, préparer les sommes partielles des deux nombres d'un même côté qui ne sont pas des sommets, comme pour les nombres h et i: $g + h + i + j = 21 => h + i = 21 - (g + j)$

e	*a+g+j*	*a*	*g*	*j*	*h+i*	*h*	*i*	*c+f*	*c*	*f*	*b+d*	*b*	*d*
1	9	**2**	**3**	**4**	14	**5**	**9**	15	**7**	**8**	16	**6**	**10**
1	9	**2**	**3**	**4**	14	**6**	**8**	15	**5**	**10**	16	**7**	**9**
2	10	**1**	**3**	**6**	12	**4**	**8**	14	**5**	**9**	17	**7**	**10**
2	10	**1**	**3**	**6**	12	**5**	**7**	14	**4**	**10**	17	**8**	**9**
2	10	**1**	**4**	**5**	12	**3**	**9**	15	**7**	**8**	16	**6**	**10**
3	11	1	2	8	11	4	7	12	imp	imp	18		
3	11	1	4	6	11	2	9	14	imp	imp	16		
3	11	2	4	5	12	imp	imp	14			15		

4	12	**1**	**2**	**9**	10	**3**	**7**	11	**5**	**6**	18	**8**	**10**
4	12	1	3	8	10	imp	imp	12			17		
4	12	1	5	6	10	imp	imp	14			15		
4	12	2	3	7	11	1	10	12	imp	imp	16		
5	13	1	2	10	9	imp	imp	10			18		
5	13	1	3	9	9	2	7	11	imp	imp	17		
5	13	**1**	**4**	**8**	9	**2**	**7**	12	**3**	**9**	16	**6**	**10**
5	13	**2**	**3**	**8**	10	**1**	**9**	11	**4**	**7**	16	**6**	**10**
5	13	**2**	**3**	**8**	10	**4**	**6**	11	**1**	**10**	16	**7**	**9**
5	13	2	4	7	10	1	9	12	imp	imp	15		
6	14	1	3	10	8	imp	imp	10			17		
6	14	1	4	9	8	3	5	11	imp	imp	16		
6	14	1	5	8	8	imp	imp	12			15		
6	14	2	3	9	9	1	8	10	imp	imp	16		
6	14	2	3	9	9	4	5	10	imp	imp	16		
6	14	2	4	8	9	imp	imp	11			15		
6	14	**2**	**5**	**7**	9	**1**	**8**	12	**3**	**9**	14	**4**	**10**
6	14	3	4	7	10	1	9	11	imp	imp	14		
6	14	**3**	**4**	**7**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**	14	**5**	**9**
7	15	1	4	10	7	2	5	10	imp	imp	16		
7	15	1	5	9	7	3	4	11	imp	imp	15		
7	15	**1**	**6**	**8**	7	**2**	**5**	12	**3**	**9**	14	**4**	**10**
7	15	**1**	**6**	**8**	7	**3**	**4**	12	**2**	**10**	14	**5**	**9**
7	15	2	3	10	8	imp	imp	9			16		
7	15	2	4	9	8	3	5	10	imp	imp	15		
7	15	2	5	8	8	imp	imp	11			14		
7	15	3	4	8	9	imp	imp	10			14		
7	15	**4**	**5**	**6**	10	**1**	**9**	11	**3**	**8**	12	**2**	**10**
7	15	**4**	**5**	**6**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**	12	**3**	**9**
8	16	**1**	**5**	**10**	6	**2**	**4**	10	**3**	**7**	15	**6**	**9**
8	16	1	6	9	6	2	4	11	imp	imp	14		
8	16	2	4	10	7	1	6	9	imp	imp	15		
8	16	**2**	**5**	**9**	7	**1**	**6**	10	**3**	**7**	14	**4**	**10**
8	16	3	4	9	8	1	7	9	imp	imp	14		
8	16	3	6	7	8	imp	imp	11			12		
8	16	**4**	**5**	**7**	9	**3**	**6**	10	**1**	**9**	12	**2**	**10**
9	17	1	6	10	5	2	3	10	imp	imp	14		
9	17	2	5	10	6	imp	imp	9			14		
9	17	2	7	8	6	1	5	11	imp	imp	12		
9	17	3	4	10	7	1	6	8	imp	imp	14		
9	17	3	4	10	7	2	5	8	imp	imp	14		
9	17	3	6	8	7	2	5	9	imp	imp	12		
9	17	**4**	**5**	**8**	8	**1**	**7**	9	**3**	**6**	12	**2**	**10**
9	17	4	5	8	8	2	6	9	imp	imp	12		
9	17	**4**	**6**	**7**	8	**3**	**5**	10	**2**	**8**	11	**1**	**10**
10	18	1	8	9	4	imp	imp	11			12		
10	18	2	7	9	5	1	4	10	imp	imp	14		
10	18	**3**	**6**	**9**	6	**1**	**5**	9	**2**	**7**	12	**4**	**8**
10	18	**3**	**6**	**9**	6	**2**	**4**	9	**1**	**8**	12	**5**	**7**
10	18	**3**	**7**	**8**	6	**1**	**5**	10	**4**	**6**	11	**2**	**9**
10	18	**3**	**7**	**8**	6	**2**	**4**	10	**1**	**9**	11	**5**	**6**
10	18	4	5	9	7	1	6	8	imp	imp	12		
10	18	4	6	8	7	2	5	9	imp	imp	11		
10	18	5	6	7	8	imp	imp	9			10		

Cet inventaire montre qu'il n'y a pas de solutions avec « 3 » dans la case centrale, mais qu'il en existe pour tous les autres nombres de la case centrale.

Est-il si fastidieux qu'il n'y paraît de dresser un inventaire de ce type?
Oui, indubitablement, s'il fallait construire à chaque fois le triangle correspondant.
Non, si les colonnes sont préparées à l'aide des outils algébriques permettant un travail algorithmique.

Au passage, on voit que la condition que les dix nombres cherchés soient les dix nombres naturels de 1 à 10, tous différents, est d'une autre nature que celle qui régit les sommes.
Il y a en effet plusieurs solutions pour les équations $a + g + j = 8 + e$, $h + i = 21 - (g + j)$...

On ne peut échapper à un inventaire ordonné pour chacune d'elles, qui tient compte des contraintes sur le choix des dix nombres naturels différents.

Pour le cas de $e = 3$, on arrive toujours à une impossibilité (« imp » dans le tableau). La démonstration se fait ici par « épuisement » des cas.

Tout ceci nous fait penser que ce problème du *Sortilège* a des développements potentiels très riches pour les élèves des dernières années de l'école primaire et des premiers degrés de l'école secondaire, dans l'approche des raisonnements algébriques et déductifs.