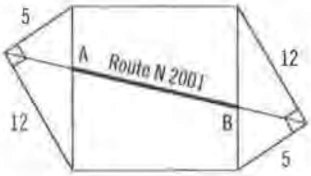
RÉPONSES AUX PROBLÈMES DU NUMÉRO 204

« SOUS LA ROUTE » (numéro 204, p. 9)

Ce problème nous a valu un abondant courrier. Merci à nos collègues et amis de *Math-Ecole* qui ont répondu et envoyé leurs solutions.

Rappel de l'énoncé :

Quelle est la longueur du tunnel creusé sous la route N 2001, entre les points A et B ?
La figure est formée d'un carré et de deux triangles rectangles.



Le problème a été apprécié de nos lecteurs qui le situent tous dans le cadre des programmes des degrés 8 à 9 de nos écoles secondaires. Il est aussi jugé intéressant comme en témoigne ce commentaire : *Beau problème de géométrie dont la résolution passe, par exemple, par la construction de segments dont on peut calculer la longueur, d'où une de ses difficultés. « Voir » des figures simples qui se prêtent bien au calcul, en lien avec la figure initiale, bien entendu...* (M. Brêchet)

7 réponses, 11 procédures différentes de résolution (y compris celles de la rédaction et de la personne qui nous a signalé le sujet), on est donc bien en présence d'un problème riche en exploitations didactiques.

La place nous manque pour publier toutes les solutions intégralement, nous nous contentons de les résumer ici, en se référant aux figures 1 et 2 sur lesquelles ont été concentrées les différentes productions.

Quatre solutions font appel à des triangles semblables (fig. 1)

- les triangles STU et SUR, puis QVB et QWU pour Michel Brêchet, de Delémont, donnant BV = 1547/578 puis, par Pythagore, OB ≈ 7,029 et la distance AB « proche de 14,059 » ;
- les triangles ACB et PQU pour Ambrogio Galvanone, de Pregassona, et Christian Bazzoni, de Bôle, qui, par des voies différentes, arrivent respectivement à AB = 14,059 (approximation à la troisième décimale) et $AB = (169\sqrt{2})/17 \approx 14{,}06$;
- les triangles BUR et ABC pour Antoine Gaggero, de Bienne, pour arriver à l'égalité AB/BU = CB/RU et à l'équation suivante : $AB(60/13) = 13(17\sqrt{2} - AB)/2$, dont la solution est $AB \approx 14{,}06$.

La solution de Vincent Keusen, de Gimel, se fonde sur la constatation que le triangle PAK (Fig. 1) est isocèle et rectangle : *x* étant la mesure du côté AK et de KP, la décomposition de l'aire du triangle PDE (d'aire 30) en un trapèze PDAK et un triangle KAE se traduit par l'équation $30 = (5 + x)\, x/2 + (12 - x)\, x/2$, dont la solution est 60/17, d'où $PA = (60/17)\sqrt{2}$ et $AB = 17\sqrt{2} - 2((60/17)\sqrt{2}) = (169\sqrt{2})/17 \approx 14$

Une des solutions de A. Gaggero fait appel au théorème de la bissectrice dans le triangle TUS (Fig. 1) pour déterminer BS = 65/17 (selon l'égalité BS/SU = BT/UT qui devient BS/(13 – BS) = 5/12). Par soustraction, on arrive à : AC = 13 – 2(65/17) et, par Pythagore dans le triangle ABC, on trouve $AB \approx 14{,}06$.

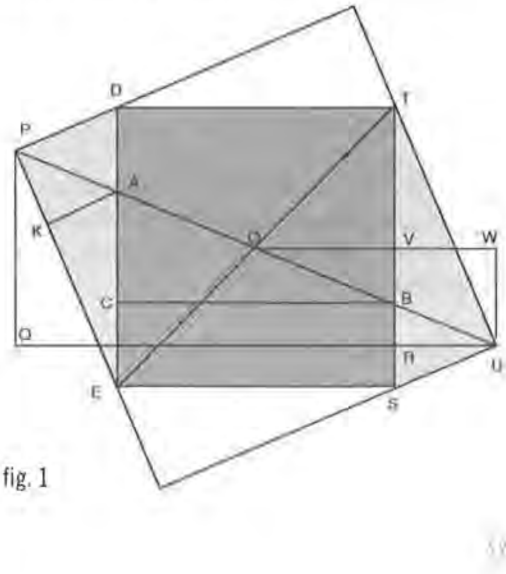


fig. 1

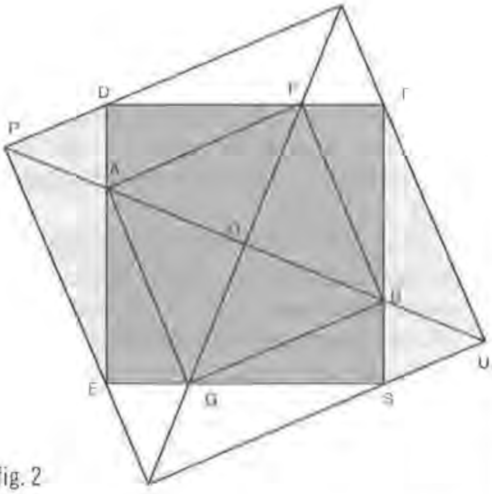


fig. 2

D'autres solutions se réfèrent à la similitude entre les carrés emboîtés successifs de la figure 2. Nous les devons à André Calame, de Sauges, Denis Straubhaar de la Chaux-de-Fonds et à la rédaction de *Math-Ecole*. Les côtés du carré extérieur mesurent 17 (12 + 5), ceux du deuxième carré mesurent 13 (par Pythagore). Le rapport de la similitude qui amène le premier sur le deuxième est par conséquent 13/17. C'est le même que celui de la similitude qui amène le deuxième sur le troisième. (Cette constance des rapports repose sur le fait que les similitudes successives font passer d'un carré au carré inscrit par une homothétie et une rotation dont l'angle est toujours le même en valeur absolue, vu le parallélisme des côtés du premier et du troisième carré).

Les mesures des diagonales de ces carrés sont par conséquent, dans l'ordre décroissant : $17\sqrt{2}$; $13\sqrt{2}$; $(13\sqrt{2})(13/17) = (169\sqrt{2})/17$. Cette dernière mesure est celle de AB, la distance cherchée, elle s'obtient sans recours à la calculatrice.

Une deuxième question du problème était de savoir comment faire comprendre aux élèves que le triangle BUS n'est pas isocèle, alors qu'un dessin précis pourrait laisser croire que BU = US (5 cm).

Deux explications ont été apportées par nos lecteurs :

- la première fait confiance à la calculatrice et montre que les approximations de BU, calculées en général par différence entre celle de AB et celle de la diagonale du grand carré donnent 4,992 ou 4,99 ;
- la seconde part de considérations sur les mesures réelles des segments et sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$: $BU = 1/2(17\sqrt{2} - (169\sqrt{2})/17) = (60/17)\sqrt{2}$. si BU = 5, on aurait $5 = (60/17)\sqrt{2}$ et $\sqrt{2} = 17/12$, ce qui reviendrait à dire que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel !

Belle occasion de réflexion, pour nos élèves de l'école secondaire, sur les concepts de nombres rationnels et irrationnels !

QUARTS DE FINALE INDIVIDUELS DU17e CHAMPIONNAT DE LA FFJM (numéro 204, pp. 6 à 8)

Les solutions, quelques indications pour la résolution de ces problèmes et leur exploitation en classe.

1. Le ***dé coupé*** a 15 arêtes. Si l'on sait que le cube en a 12, on voit qu'il suffit d'ajouter les 3 nouvelles arêtes du triangle scié. Sinon il faut imaginer ou construire effectivement le solide et compter ses arêtes. Pour ceux qui connaissent la relation d'Euler : s + f – a = 2, comme on sait que le solide a 7 faces et 10 sommets, la relation devient 7 + 10 – a = 2, d'où l'on tire a = 15. Les variations sont nombreuses sur ce thème.

2. Le ***calcul incomplet*** (23 – ...) + (23 x ...) = 50 a une infinité de solutions avec des « nombres entiers », comme le dit l'énoncé : (23 – 19) + (23 x 2) = 50, (23 – 42) + (23 x 3) = 50, (23 – 65) + (23 x 4) = 50... La « réponse attendue » est la première, où l'égalité est complétée par 19 et 2, mais les couples de nombres entiers (et même naturels) 42 et 3, 65 et 4... conviennent aussi, même si la première parenthèse représente des nombres négatifs (non naturels mais aussi entiers). En effet, la commutativité et l'associativité de l'addition permettent à ceux qui ne connaissent pas les nombres négatifs de calculer la deuxième parenthèse en premier, d'additionner 23 et de soustraire finalement 42, ou 65, ou 89,... . Si l'on souhaite reprendre cet exercice en classe, il faut évidemment accepter toutes les solutions citées ici ou modifier l'énoncé pour n'avoir qu'une seule solution, par exemple : « compléter l'égalité ci-dessous avec des nombres naturels inférieurs à 23 ».

3. La ***pyramide*** est composée de 40 cubes :
$(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + (4 \times 5) =$
$2 + 6 + 12 + 20 = 40.$
La variable didactique est évidente, c'est le nombre d'étages, ce qui permet de reprendre la problème dès la 6e année avec par exemple, une pyramide de 50 étages, puis, dès la 8e, une pyramide de 2003 étages par exemple, afin d'inciter les élèves à rechercher la loi de composition de chaque terme, puis la somme des premiers termes. Grandes potentialités pour aborder le concept de fonction.

4. ***Les quatre amis***. Il semble difficile de se tromper. Mathilde a des lunettes, Mathurine a les cheveux bruns et Mathias n'a pas de lunettes.

5. ***Appartenance triple***. Il suffit de compter les carrés, partie par partie. Mais encore faut-il s'entendre sur le nombre de rectangles en jeu ! Si l'on ne considère que les 5 rectangles tracés à l'origine, sans côtés communs ou sans parties de côtés communes, on trouve 4 zones grises qui sont chacune à l'intérieur de 3 rectangles (fig. 1).

Mais il faut se rendre à l'évidence. Il y a beaucoup plus de rectangles qui apparaissent sur la figure après le dessin des 5 premiers ! Nous en avons compté 30 (sans garantie). Par conséquent, les nombres de rectangles contenant chaque zone augmentent aussi sensiblement. Il n'y a alors plus qu'une seule partie grise contenue dans 3 rectangles exactement. (Les nombres indiqués dans les zones de la fig. 2 sont à contrôler !)

Les auteurs ont donc, en toute honnêteté, considéré deux solutions possibles à ce problème :

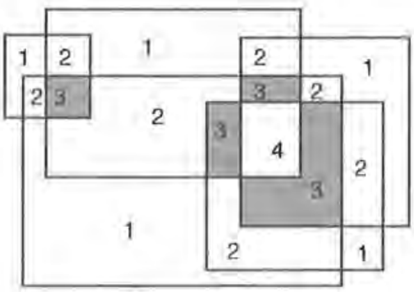


fig. 1

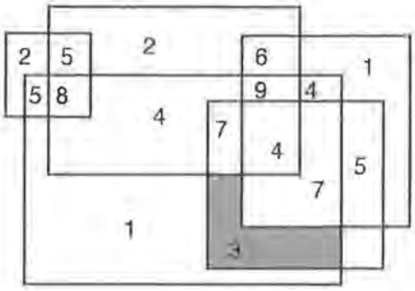


fig. 2

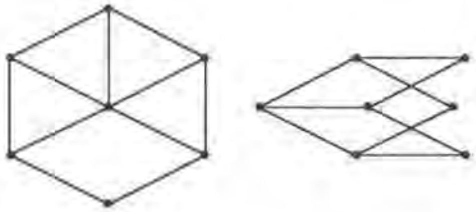
6. ***Les pesées***. Les symbolismes des balances et des objets ne facilitent pas la tâche d'élèves de 4e et 5e années, mais, en retirant systématiquement un même objet des deux plateaux de chacune des balances, on reconstitue pas à pas la sériation des jouets, du plus lourd au plus léger :
avion > flèche > cœur > carré > triangle. Mathias va donc garder les deux cœurs.

7. Ici, contrairement au problème 5, ***les triangles*** sont bien déterminés car l'énoncé est sans ambiguïtés : « combien compte-t-on de triangles entièrement dessinés » (le RMT utilise la formule « combien de triangles peut-on voir dans la figure »). Il y a 12 triangles en tout : 6 composés d'une seule « zone », 4 composés de deux « zones » et 2 composés de trois « zones ». Les variations sur ce thème sont innombrables, et le dénombrement passe par une organisation systématique selon les « zones » de base dont la réunion constitue les nouvelles figures.

8. ***Les bonbons*** sont au nombre de 4. Il y a deux hypothèses à faire pour chaque enfant. Une seule ne conduit pas à une contradiction : Mathilde a mangé moins de 7 bonbons (et n'en a pas mangé plus de 4), Mathias en a aussi mangé moins de 7 (et autant ou plus que Mathilde). La réponse est Mathilde 4 et Mathias 6. Ce type de problème entraîne au raisonnement hypothético-déductif.

9. La prochaine ***bonne année*** de 53 week-ends sera la septième année bissextile après 2000, (qui l'était, elle-même, comme tous les multiples de 400, contrairement aux autres multiples de 100) c'est-à-dire 2028.

10. Avec un peu de patience, on trouve qu'il faut 7 points au minimum pour former 4 ***losanges*** dans l'une des deux configurations suivantes :



11. ***Souvenir, souvenir*** La différence est de 4 minutes par heure. Il y a donc 15 heures que l'horloge et le réveil ont été mis à l'heure. Il est 7 h 45 min. La mise à l'heure se situe à 15 h 45 min, la veille.

12. ***7 une chance*** se résout par essais successifs, qui font apparaître rapidement une régularité : ça marche pour 13 et 14, 22 et 23, 31 et 32, 40 et 41, 49 et 50, 58 et 59, 67 et 68, ... le 13e de ces nombres est 67. Problème à développer dans le cadre des opérations et des suites régulières de nombres.

13. ***La vieille calculatrice*** livre rapidement son secret, pour autant que l'on procède avec méthode : il y a 75 nombres de trois chiffres pairs dont le carré s'écrit avec 6 chiffres (le premier peut être 4, 6 ou 8, le deuxième et le troisième 0, 2, 4, 6 ou 8, ce qui donne 3 x 5 x 5 combinaisons avec répétitions). Il n'est cependant pas nécessaire de les vérifier tous si l'on connaît bien les deux chiffres terminaux des carrés des nombres naturels (voir tableau annexe). Le 7 n'apparaît que quatre fois comme chiffre des dizaines dans les « terminaisons » de carrés : pour ceux des nombres naturels se terminant pas 24, 26, 74 et 76. Comme 74 et 76 ne peuvent convenir ici (pas de chiffres impairs) et comme le chiffre des centaines ne peut être que 4, 6 ou 8, il ne reste ainsi que 6 nombres à élever au carré : 424, 426, 624, 626, 824, 826. Seul le carré du dernier est formé de chiffres pairs à l'exception du chiffre des dizaines : $826^2 = 682276$. La réponse est 826 et le procédé de recherche a montré qu'elle est unique.

14. Le tableau des terminaisons utilisé précédemment permet de dire immédiatement que le numéro de ***téléphone au carré*** est 06 76 25 01 00.

15. On retrouve, dans la ***bicyclette partagée*** un beau problème de déplacements, cher aux auteurs de nos anciens manuels. Traduit par une équation où d représente la distance du départ au cèdre et $25 - d$ la distance restante (en km), l'égalité des durées totales de déplacements donne (Mathilde à gauche et Mathieu à droite) :
$d/18 + (25 - d)/6 = d/3 + (25 - d)/15$. La solution est 225/34 (≈ 6,618, pour respecter les traditions du concours où – vraisemblablement pour des raisons d'unicité d'écriture – on demande des réponses approximatives plutôt que les nombres exacts).
À exploiter dans le cadre des équations et des problèmes de vitesse.

16. Le ***sauvetage dans l'espace*** conduit à un inventaire des rations d'oxygène. Avec n passagers initiaux le jour du premier sauvetage, ce nombre de rations est $95n = 60(n + 7)$, ce qui permet de dire qu'il y avait 12 passagers, devenus 19 après le premier sauvetage. Ils consomment alors 6 x 19 rations en six jours. Lors du second sauvetage de m nouveaux passagers, l'inventaire des rations donne l'équation suivante : $54 \times 19 = 38(m + 19)$ dont la solution est $m = 8$. Ce problème est facile à exploiter en vue de la mise en équations.

17. Les plus petits cercles du ***tapis persan*** sont ceux qui sont dans l'intersection du carré et du grand cercle. La diagonale du carré (1 m) est constituée du diamètre du cercle intérieur ($\sqrt{2}/2$), de deux rayons (r) des petits cercles et de deux diagonales de carrés de côtés r, ($r\sqrt{2}$). Ceci nous conduit à l'équation $1 = \sqrt{2}/2 + 2r + 2\,r\sqrt{2}$ dont la solution est $r = (3\sqrt{2} - 4)/4$. Le diamètre de ces petits cercles, est donc, en m : $(3\sqrt{2} - 4)/2$ et, en mm : $500(3\sqrt{2} - 4) = 1500\sqrt{2} - 2000$ (La réponse approximative est 121,3 mm). On pourrait aller plus loin dans ce problème et calculer les diamètres des autres cercles du motif.

18. ***L'Etang d'Ares*** fait de nouveau intervenir la table des deux derniers chiffres des carrés de nombres naturels (voir annexe). L'égalité des restes de la division par 100 des quatre aires revient à chercher quatre terminaisons égales de la table. Les quatre côtés correspondants doivent permettre de former le quadrilatère le moins « aplati » et par conséquent,

il faut chercher les quatre restes le plus près du centre de la table. (Les quatre restes « 01 » par exemple, conduiraient à un quadrilatère de côtés 1, 49, 51 et 99 m, presque « plat »). Les restes « 76 » correspondent au quadrilatère de côtés 24, 26, 74 et 76, le moins « plat ».

La formule de Brahmagupta (Voir article de M. Criton « Voyage au pays des formules d'aire et de volume » pp. 23-25 de ce numéro) est ici inespérée. (Sinon il faut travailler avec de lourdes équations trigonométriques). Le demi-périmètre du quadrilatère est $p = 100$, son aire est $\sqrt{3509376} \approx 1873{,}33$, en m^2.

En conclusion, de bien beaux problèmes dans l'ensemble, souvent originaux, dont la plupart ont des potentialités évidentes pour la classe, au niveau didactique. Bravo à nos collègues de la FFJM qui font preuve de créativité et de beaucoup de rigueur dans la préparation de leurs sujets d'épreuve.

Annexe :

Table des terminaisons (deux derniers chiffres) des carrés des nombres naturels

d\u	..0	..1	..2	..3	..4	..5	..6	..7	..8	..9
.0.	00	01	04	09	16	25	36	49	64	81
.1.	00	21	44	69	96	25	56	89	24	61
.2.	00	41	84	29	76	25	76	29	84	41
.3.	00	61	24	89	56	25	96	69	44	21
.4.	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01
.5.	00	01	04	09	16	25	36	49	64	81
.6.	00	21	44	69	96	25	56	89	24	61
.7.	00	41	84	29	76	25	76	29	84	41
.8.	00	61	24	89	56	25	96	69	44	21
.9.	00	81	64	49	36	25	16	09	04	01

Exemple : on trouve les deux dernier chiffres de 1478^2 à la ligne . 7. et dans la colonne . . 8, c'est-à-dire 84.