# À PROPOS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES PAR ÉQUATION(S)

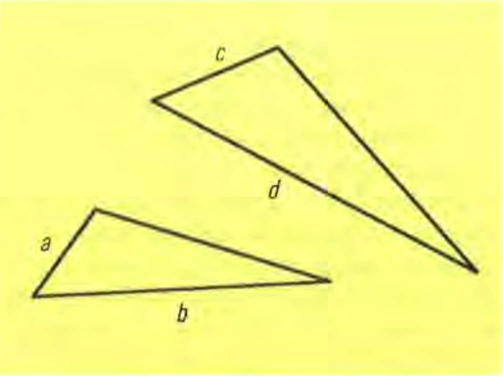
Michel Brêchet

## Préambule

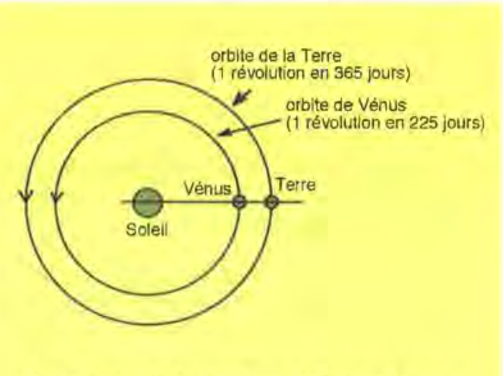
Durant les premiers degrés de la scolarité obligatoire, l'élève résout de nombreux problèmes additifs et multiplicatifs qui concernent les nombres, le mesurage ou encore la proportionnalité. Lors de la recherche de leurs solutions, il peut la plupart du temps associer des images mentales aux opérations qu'il effectue et aux résultats qu'il trouve. Par exemple, selon la situation étudiée, la comparaison de deux grandeurs appelle une soustraction, un partage renvoie à une division, le calcul d'une aire conduit à une multiplication, un nombre exprime une mesure (de longueur, de temps...) ou alors il est le cardinal d'une collection d'objets. L'élève a donc la possibilité de contrôler intuitivement le bien-fondé de ses démarches et d'établir des liens entre ses opérations de pensée et des contenus concrets. A l'inverse, lorsque les bases du calcul littéral sont acquises, la démarche algébrique trouve un sens en elle-même comme instrument qui « fonctionne » selon ses propres règles de calcul formel. Deux exemples :

- Si ces deux triangles sont semblables, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. D'où $a=\frac{b \cdot c}{d}$.

  Cette procédure, qui consiste à exprimer une longueur ($a$) en fonction de trois autres ($b$, $c$ et $d$), débouche sur une égalité dont le membre de droite contient un produit de deux longueurs ($b \cdot c$) auquel il serait vain de vouloir accorder une signification géométrique autre que celle d'une aire, dont le quotient par une longueur ($d$) donnera une autre longueur ($a$), selon le calcul de dimensions cher aux physiciens.




- L'équation $\frac{x}{225}-\frac{x}{365}=1$ (dans laquelle $x$ représente la durée en jours) permet de trouver le temps qui s'écoulera avant que les trois astres soient à nouveau alignés (avec Vénus entre la Terre et le Soleil). L'expression littérale réduite de son membre de gauche, $\frac{28x}{16425}$, n'entretient pas de lien immédiat avec la situation réelle. D'où le caractère abstrait de la transformation algébrique $\frac{x}{225}-\frac{x}{365}=\frac{28x}{16425}$.




Sur ce schéma, le Soleil, Vénus et la Terre sont alignés.

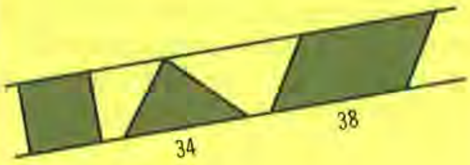
**Allons voir de plus près...**

La résolution de problèmes par équation(s) montre aux élèves quelle peut être l'utilité des mathématiques qu'ils apprennent. Elle permet en particulier de donner un champ d'action à l'étude des transformations littérales (développement, réduction, factorisation...). C'est un des apprentissages clés de la scolarité secondaire. Il constitue en quelque sorte un aboutissement, car des problèmes très variés peuvent être résolus par des procédés algébriques. Qu'ils concernent les nombres, les opérations, la proportionnalité, les fonctions, la mesure des grandeurs, les théorèmes métriques... les équations font souvent partie de la panoplie des outils utilisés pour en chercher les solutions. Résoudre un problème par équation(s) demande dans une première phase d'identifier les grandeurs (ou les quantités) en présence et d'établir des relations entre elles. Par la suite il s'agit, dans le cadre algébrique, d'utiliser de manière adéquate les opérations et leurs propriétés, de respecter les conventions d'écriture, de transformer des expressions littérales... L'occasion est donc belle d'entrevoir la solidité de l'édifice mathématique. La résolution algébrique d'un problème consiste à manier mentalement des quantités inconnues et à traduire des faits par des écritures symboliques avant de les soumettre à des règles de calcul. La pensée mathématique manifeste ainsi toute son originalité et sa puissance.

1. J.-A. Calame, F. Jaquet, J.-P. Crevoiserat, *Mathématique 8e année*, Département de l'instruction publique et des affaires culturelles du canton de Neuchâtel

2. Notons que ce problème se résout sans équation dans le cadre de la géométrie. En transformant les figures en rectangles équivalents dont la hauteur est la largeur de la bande, le triangle devient un rectangle de base 17 et le parallélogramme un rectangle de base 38. Le carré doit donc avoir une base de 21, valeur qui est par conséquent celle de la largeur la bande.

Arrêtons-nous un instant sur la résolution de ce problème [1] par une équation à une inconnue, et analysons les différentes étapes qui mènent à sa solution [2]. Précisons que la contrainte « une équation à une inconnue » est artificielle. On pourrait aussi utiliser un système d'équations. Mais notre propos n'est pas d'aborder cet aspect-là.




L'aire du parallélogramme est égale à celle du carré et du triangle réunis. Quelle est la largeur de la bande dans laquelle ces trois polygones ont été dessinés ?

## *1. Appropriation de la situation*

Cet énoncé est « transparent », ce qui n'est pas toujours le cas. Cela signifie qu'il se laisse découper exactement en fonction des membres de l'équation à écrire. Quatre expressions désignent les quantités inconnues : l'aire du parallélogramme, celle du carré, celle du triangle et la largeur de la bande. Une opération (la réunion de deux parties) et la relation d'égalité permettent d'écrire l'équation. L'opération articule deux quantités inconnues en un membre de l'équation : «... [l'aire] du carré et du triangle réunis. » Quant à la relation d'égalité, elle est donnée par « L'aire du parallélogramme est égale à celle du carré et du triangle réunis. »

## 2. *Traduction de la situation par une équation*

Quatre quantités sont inconnues et une seule lettre est à disposition. Il s'agit donc de désigner une quantité par cette lettre et d'exprimer les trois autres en fonction de cette même lettre. Plusieurs tentatives sont parfois nécessaires pour mener à bien cette étape. L'inconnue ($x$) pourrait représenter l'aire du parallélogramme, celle du carré ou encore celle du triangle. Cependant, chacun de ces choix conduirait à des expressions algébriques complexes, délicates à manipuler. Par exemple, si $x$ désigne l'aire du parallélogramme, on obtient l'équation

$$x = \frac{34 \cdot \frac{x}{38}}{2} + \left(\frac{x}{38}\right)^2,$$

dont la résolution n'ira sans doute pas de soi. La façon la plus simple de procéder est de désigner la largeur de la bande par l'inconnue. La question de l'énoncé y incite d'ailleurs. Mais attribuer l'inconnue au nombre cherché (mesure ou quantité) ne constitue pas toujours le choix le plus judicieux. Si $x$ est la largeur de la bande, alors l'aire du parallélogramme est $38x$, celle du triangle est $\frac{34x}{2}$ et celle du carré est $x^2$.

On remarquera au passage que pour exprimer ces trois aires de manière littérale, on s'est autorisé à manipuler une quantité inconnue ($x$) comme si elle était connue, c'est-à-dire au même titre que les nombres de l'énoncé (34 et 38). C'est bien là une des caractéristiques de l'algèbre qui pose passablement de difficultés lors des premiers pas dans cette discipline. L'équation à résoudre est ainsi

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

Comme ses deux membres représentent une même grandeur (une aire), elle est homogène.

## 3. *Résolution de l'équation*

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

Simplification de la fraction dans le membre de droite

$$38x = x^2 + 17x$$

Soustraction de 38x dans chaque membre

$$0 = x^2 - 21x$$

Factorisation du membre de droite

$$0 = x(x-21)$$

Détermination de l'ensemble des valeurs possibles

$$S = \{0\ ;\ 21\}$$

Pour résoudre formellement une équation, il faut la transformer à l'aide des règles d'équivalence, des propriétés des opérations et des conventions de priorités en vigueur. Les difficultés et les erreurs liées à la mise en œuvre de ces connaissances sont développées ci-dessous. Il est intéressant de constater que la résolution algorithmique de l'équation

$$38x = x^2 + \frac{34x}{2}$$

amène à examiner le cas de la largeur nulle, que personne n'aurait envisagé en suivant une démarche géométrique.

L'écriture de l'équation $38x = x^2 + \frac{34x}{2}$

nécessite de rester en prise directe avec le contexte initial, c'est-à-dire de tenir compte des objets géométriques en présence (parallélogramme, carré, triangle, bande de papier), de la nature des grandeurs en jeu (aire des figures et longueur des segments) ainsi que des unités dans lesquelles elles sont mesurées. Il en va tout autrement lors de la résolution de l'équation, phase durant laquelle on peut se détacher de la réalité concrète, car les lettres peuvent être manipulées indépendamment des objets ou des grandeurs qu'elles représentent. Ainsi, comme on l'a dit tout à l'heure, il serait difficile de vouloir à tout prix maintenir le lien entre les écritures algébriques successives et les êtres géométriques. L'écriture $x^2$ représente bien entendu l'aire du carré; quant à $21x$ (déjà plus abstrait), c'est la différence des aires du parallélogramme et du triangle, c'est-à-dire à celle du carré. On pressent ainsi qu'il vaut mieux renoncer à donner une explication rhétorique aux expressions $x^2 - 21x$ et $x(x - 21x)$ , car elles n'entretiennent pas de lien évident avec la situation réelle. On a meilleur temps de faire confiance aux algorithmes du calcul littéral, qui constitue pour les élèves, sous cet angle-là, une rupture forte avec toutes les habitudes acquises durant la scolarité primaire notamment. Rupture qui peut s'avérer constructive et libératrice, mais qui peut aussi être le début d'un échec scolaire si le lien avec les habitudes du primaire n'est pas clairement établi.

### 4. *Réponse et vérification*

Cette phase nécessite un retour à l'énoncé du problème. Comme on ne peut pas découper des polygones dans une bande de papier de largeur nulle, la solution est 21, valeur dont il s'agit encore de vérifier la validité :

$$38 \cdot 21 \stackrel{?}{=} 21^2 + \frac{34 \cdot 21}{2}$$
$$798 = 798$$

**Résoudre une équation ? Pas si simple !**

La maîtrise de la résolution des équations est indispensable pour résoudre de nombreux problèmes traités au cours des dernières années de la scolarité obligatoire et pour aborder bon nombre des chapitres mathématiques enseignés plus tard. D'une manière générale, la somme des connaissances mises en jeu dans la recherche de l'ensemble de solutions d'une équation est très vaste. Afin de guider les élèves lors de cette phase d'apprentissage de l'algèbre, il est important de prendre conscience des tâches qui leur sont proposées et des difficultés à surmonter pour les mener à bien. En plus de compétences liées au calcul numérique – particulièrement avec les entiers relatifs – et au calcul littéral, la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue demande :

- d'organiser les transformations algébriques à réaliser. Par exemple :
  - de transformer, le cas échéant, un seul ou les deux membres de l'équation, par développement ou par réduction :

$$\begin{aligned} 2{,}5x - 4 + 1{,}5x &= 7 \\ 4x - 4 &= 7 \end{aligned}$$

  - de laisser momentanément en suspens les opérations concernant le coefficient de l'inconnue :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x - 40 & = & 160 & +40 \\ 4x & = & 200 & \end{array}$$

– d'éliminer dans un premier temps le terme contenant l'inconnue dans un des deux membres en ajoutant son opposé dans chaque membre :

$$\begin{array}{rcl|l} 12x+23 & = & 5x+72 & -5x \\ 7x+23 & = & 72 & \end{array}$$

- d'appliquer les règles d'équivalence qui permettent de passer d'une équation à l'autre. Le non respect de ces règles peut amener les élèves à :

– transformer un seul membre d'une équation :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x-40 & = & 160 & +40 \\ 4x & = & 160 & :4 \\ x & = & 40 & \\ S & = & \{40\} & \end{array}$$

– effectuer des transformations additives différentes dans chaque membre :

$$\begin{array}{rcl|l} 4x-40 & = & 160 & -40 \\ 4x & = & 120 & :4 \\ x & = & 30 & \\ S & = & \{30\} & \end{array}$$

– ne pas changer le signe d'un terme transféré d'un membre à l'autre, dans le cas où les transformations ne sont pas notées explicitement :

$$\begin{array}{rcl} 4x-40 & = & 160 \\ x & = & \dfrac{160-40}{4} \\ x & = & 30 \end{array}$$

- d'identifier l'ordre des opérations à effectuer et de respecter les conventions de priorité existantes. C'est ici la lecture de la notation algébrique qui est en jeu. Plusieurs erreurs peuvent survenir. Par exemple :

– un terme situé à l'intérieur d'une parenthèse est traité comme un terme indépendant :

$$\begin{array}{rcl|l} 3(x-15) & = & 75 & +15 \\ 3x & = & 90 & :3 \\ x & = & 30 & \\ S & = & \{30\} & \end{array}$$

– le produit $ax$ est considéré comme ayant les mêmes propriétés que la somme $a+x$ :

$$\begin{array}{rcl|l} 28x & = & 266 & -28 \\ x & = & 238 & \end{array}$$

– un seul terme d'un membre est multiplié ou divisé (ci-contre, l'expression $\frac{x}{4} + 3$ n'est pas traitée de la même façon qu'une expression entre parenthèses) :

$$
\begin{array}{rcl|l}
\frac{x}{4} + 3 & = & 50 & \cdot 4 \\
x + 3 & = & 200 & -3 \\
S & = & \{197\} &
\end{array}
$$

- de transférer exhaustivement les termes non transformés d'une équation à l'autre.
  Cette compétence implique en particulier de ne pas omettre un signe « moins » lors de l'écriture d'une nouvelle équation : $37 - x = 21 \Rightarrow x = 21 - 37$ est une erreur fréquente. Elle est probablement due à la difficulté de travailler avec une quantité inconnue précédée du signe « moins » ou à une absence de contrôle lors du report des termes.

- de valider la solution trouvée par substitution dans l'équation initiale.

Comme la maîtrise d'un algorithme dépend étroitement de la richesse des situations vécues, il est souhaitable de confronter les élèves à des équations dont la résolution demande des tâches très différentes les unes des autres (calculer avec des nombres négatifs, réduire des sommes de termes, développer des produits de facteurs, passer des termes d'un membre à l'autre…). En outre, lors de la résolution d'une équation, la justification des transformations réalisées est formatrice, car une telle pratique :

- favorise la généralisation de la méthode à d'autres situations (deuxième degré, systèmes d'équations…) ;

- incite les élèves à ne pas remplacer les règles d'équivalence par d'autres, plus économiques mais moins fiables, comme :
  – « un terme passe de l'autre côté en changeant de signe » ;
  – « un coefficient passe de l'autre côté en divisant » ;
  – « on compte les $x$ pour réduire les termes » ;

- renforce la maîtrise des principes sur lesquels repose le bon fonctionnement de l'algorithme en jeu, à savoir la conservation de l'égalité, le respect des priorités des opérations et le contrôle des transformations algébriques effectuées d'une équation à la suivante.

**Sources**

A. Cortes, N. Kavafian, *Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations*, in Petit x n°51, IREM de Grenoble 1998-1999

*Problèmes de mise en équations*, IREM de Strasbourg, janvier 1996