LE COIN DES PAVAGES (1)

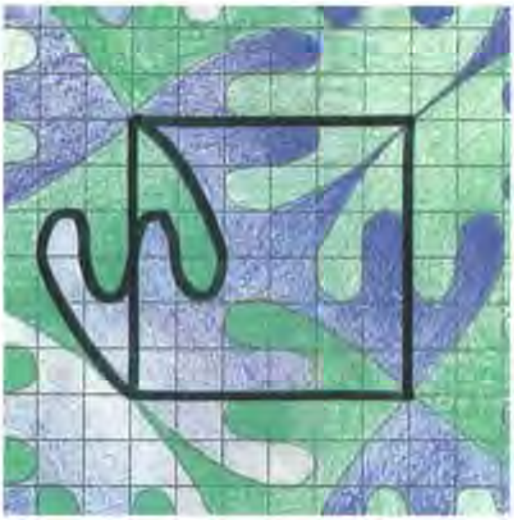
Michel Brêchet

Les pages de couverture de *Math-Ecole* des numéros 206 et 207 montrent des détails d'œufs géométriques pavés par des élèves de 14 – 15 ans. Il en ira de même pour les prochains numéros. L'étude des figures permettant de recouvrir uniformément une surface est prisée par bon nombre d'enseignants lorsqu'ils abordent les isométries (translation, rotation et symétries) avec leurs élèves.
Et pour cause. Les motifs périodiques, lorsqu'ils ne sont pas composés de figures élémentaires telles que le triangle équilatéral, le carré, le rectangle, le parallélogramme ou encore l'hexagone régulier, sont sources de questionnement et d'étonnement, voire de fascination. Comment générer des figures qui s'imbriquent sans trou ni superposition ? Quelles isométries utiliser pour paver le plan avec telle ou telle figure ? A quelles conditions un motif créé par la juxtaposition de quelques pavés se répètera-t-il à intervalles réguliers ? Au fil des âges, ces questions et bien d'autres ont par ailleurs piqué la curiosité d'artistes et de scientifiques de cultures et d'horizons multiples[1].

Vous trouverez dans ce numéro le premier d'une série de quatre articles consacrés aux pavages du plan. Chacun d'eux présentera une façon de recouvrir le plan avec des pavés isométriques, selon cinq rubriques : *Comment faire ?*, *Motif obtenu*, *Analyse du motif*, *Pourquoi ça marche ?* et *En classe*.

Pavages par rotations d'un quart de tour

C'est ce type de pavages que l'on peut observer sur la couverture du numéro 206. La figure de base étant symétrique, ce qui n'est pas une condition nécessaire, il n'est pas évident de percevoir qu'elle est construite à partir de la « déformation » des côtés d'un carré.
Comme nous le verrons dans les prochains articles, il pourrait aussi s'agir d'un pavage par symétries centrales ou par symétries glissées, car la figure de base est très particulière.
Mais voyons tout d'abord comment procéder par rotations d'un quart de tour.



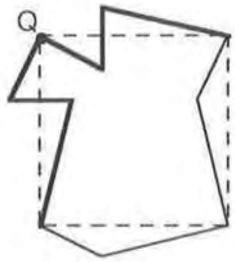
1. De très nombreux ouvrages traitent des pavages du plan. Pour n'en citer que quelques-uns :

M.C. Echer, *L'œuvre graphique*, B. Taschen, 1992
R. Fields, *Geometric Patterns from Islamic Art & Architecture*, Tarquin Publications, 2000
A. Deledicq, *Le monde des symétries*, ACL–Editions, Paris, 1993
D. Schattschneider et W. Walker, *M.C. Escher Kaléïdocycles*, B. Taschen 1990

Comment faire ?

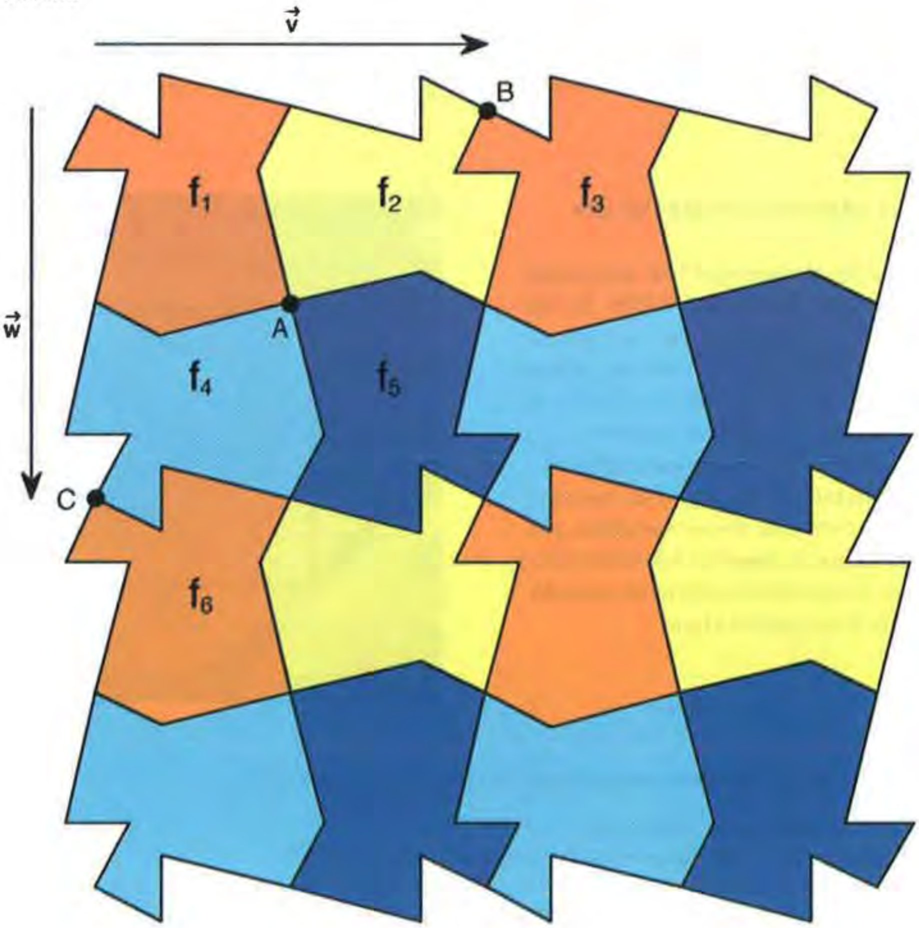
- Construire un carré.
- Tracer une ligne (ligne brisée, courbe...) dont les extrémités sont deux sommets consécutifs de ce carré. Construire ensuite son image par une rotation de 90° et dont le centre est une des extrémités de la ligne (ici le sommet P).
- Faire de même avec les deux autres couples de sommets consécutifs du carré. Il faut que les centres de rotation soient deux sommets opposés.
- Paver le plan par rotations d'un quart de tour.

Etape 1



Etape 2

Motif obtenu



Analyse du motif

Plusieurs isométries sont présentes dans ce motif périodique. Par construction, les polygones voisins d'une même ligne ou d'une même colonne sont images l'un de l'autre par une rotation d'un quart de tour :

Première ligne	**Deuxième ligne**	...	**Première colonne**	**Deuxième colonne**	...
$f_1 \xrightarrow[R(A;\,-90^\circ)]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[R(A;\,+90^\circ)]{} f_5$	...	$f_1 \xrightarrow[R(A;\,+90^\circ)]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[R(A;\,-90^\circ)]{} f_5$	...
$f_2 \xrightarrow[R(B;\,+90^\circ)]{} f_3$	...	...	$f_4 \xrightarrow[R(C;\,-90^\circ)]{} f_6$	...	...
...	...	...	...	...	...

En conséquence :

- La composée de deux rotations de même centre étant une rotation dont la mesure de l'angle est la somme des mesures des angles des rotations données, on a : $f_1 \xrightarrow[S(A)]{} f_5$ et $f_2 \xrightarrow[S(A)]{} f_4$

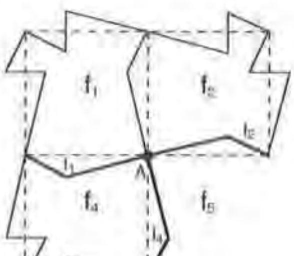
  De même, f_3 et f_5 sont images l'une de l'autre par une symétrie centrale, tout comme f_5 et f_6...

- La composée de deux rotations dont la somme des mesures des angles est nulle étant une translation, on a : $f_1 \xrightarrow[T(\vec{v})]{} f_3$, $f_1 \xrightarrow[T(\vec{w})]{} f_6$, ...

Pourquoi ça marche ?

Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux car deux lignes correspondantes sont images l'une de l'autre par une rotation d'un quart de tour.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, par construction, la ligne l_4 est image de l_1 par la rotation de centre A dont l'angle est 90° et la ligne l_2 est aussi image de l_1 par la rotation de centre A dont l'angle est -180° ($-90^\circ \cdot 2$). Par conséquent, l_4 est l'image de l_2 par la rotation de centre A dont l'angle mesure -90°.

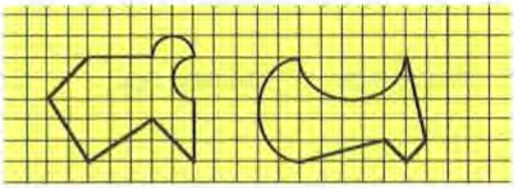


On peut bien sûr faire une démarche analogue en considérant que f_5 est construite à partir de f_4. Ce même type de raisonnement s'applique également aux autres figures.

En classe

Afin de laisser une importante part de travail aux élèves et de ne pas trop les guider dans les apprentissages visés, le maître peut par exemple leur demander d'effectuer les tâches successives suivantes :

- paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre (ou d'une autre qui convient) ;
- décrire les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- générer une figure permettant de paver le plan par rotations d'un quart de tour.



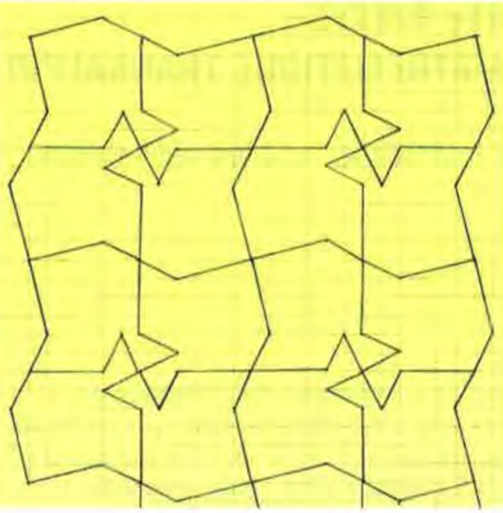
Du papier quadrillé, des ciseaux, les instruments traditionnels de géométrie ou pourquoi pas un logiciel de dessin géométrique sont nécessaires pour mener à bien une telle séquence d'apprentissage, pour laquelle deux périodes de 45 minutes ne seront sans doute pas superflues. Si les deux premières tâches sont à la portée des élèves dès le degré 7, l'élaboration d'une figure (non élémentaire) susceptible de recouvrir le plan par rotations d'un quart de tour s'adresse plutôt à des élèves de 8e et de 9e années, car elle exige de bonnes capacités d'observation et de déduction ainsi qu'une certaine familiarité avec les isométries.

Présentons quelques ébauches d'élèves de 14 ans pour clore ce premier épisode.

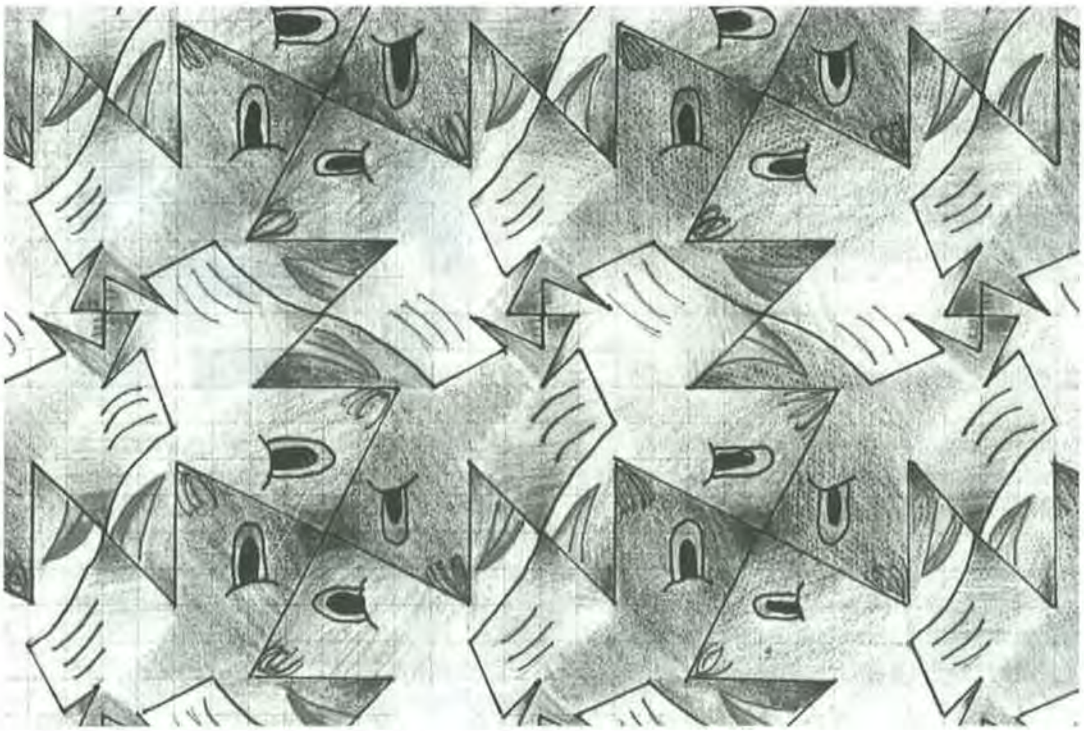
- Ce collage rappelle que la manipulation physique de pavés est une étape dont certains élèves ne peuvent se passer. En effet, « la main » et « la tête » travaillent souvent de concert lors des premiers pas dans ce genre de situations.

- Ces deux figures laissent entrevoir la composante créative de l'activité, qui est une source de motivation pour bien des élèves… mais aussi pour les adultes qui se prennent au jeu !

– La réalisation de ce motif périodique a passé par des phases d'analyse (pour dégager les caractéristiques des figures permettant de paver le plan par rotations d'un quart de tour), d'imagination (pour créer une figure qui convient) et de construction (pour juxtaposer les pièces du puzzle). Elle a en outre nécessité rigueur et concentration, car le risque de « ne plus y voir clair » est omniprésent au cours de la dernière phase.



Note : L'illustration ci-dessous, ainsi que celles des pages 4 et 56 complètent cet article. Elles témoignent du haut degré d'engagement des élèves qui les ont réalisées.



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Virginie, 14 ans.