LA GRANDE ARCHE DE LA DÉFENSE

Denis Odiet


D. Odiet, septembre 2002

QUELQUES REFLETS D'UNE ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE PROPOSÉE À DES ÉLÈVES DE 14-15 ANS [1]

1. Le problème

Voici son énoncé tel qu'il a été proposé aux élèves :

L'Arche de la Défense à Paris est construite dans un cube de 110 m d'arête.

Les deux solides supérieur et inférieur sont isométriques et possèdent une «épaisseur» de 8 m.
Les deux solides latéraux sont également isométriques et ont une «épaisseur» de 18 m.

Imaginons le segment s reliant le milieu de la face supérieure du cube au milieu de la face inférieure de celui-ci. Son milieu est C, qui est également le centre du cube.

Si l'on prolonge les 4 arêtes obliques partant des 4 sommets supérieurs de l'Arche, alors celles-ci se coupent en un point A, situé sur s.

Il en va bien sûr de même pour les 4 arêtes obliques issues des 4 sommets inférieurs, se coupant en A', symétrique de A par rapport à C.

Calculer le volume propre de la Grande Arche
Construire une maquette de la Grande Arche

1. une classe du canton du Jura composée de 18 élèves de 9e année, d'option 2, et très majoritairement de niveau A, c'est-à-dire des élèves qui se situeraient dans le premier tiers des élèves de cet âge, si on les classait selon les bonnes dispositions qu'ils manifestent en mathématiques.

Tous les lecteurs qui sont arrivés à un volume de 476'704 m^3 peuvent aller plus loin dans la lecture de cet article.

2. L'organisation du travail

- Travail par groupes de 4 élèves, chaque élève rend une production et chaque groupe une maquette ;
- Temps à disposition : 3 x 2 leçons consécutives de 45 minutes en classe, possibilité de consacrer du temps à domicile ;
- Remise des travaux trois semaines après la distribution des énoncés.

3. L'évaluation

Les critères retenus ci-dessous ont été clairement exposés, commentés et détaillés au début du travail.

Volume (réponse exacte) :	6 pts
Calculs effectués, clarté de la démarche :	6 pts
Qualité, clarté, diversité des schémas et des croquis :	6 pts
Maquette :	6 pts
Appréciation personnelle du maître :	6 pts

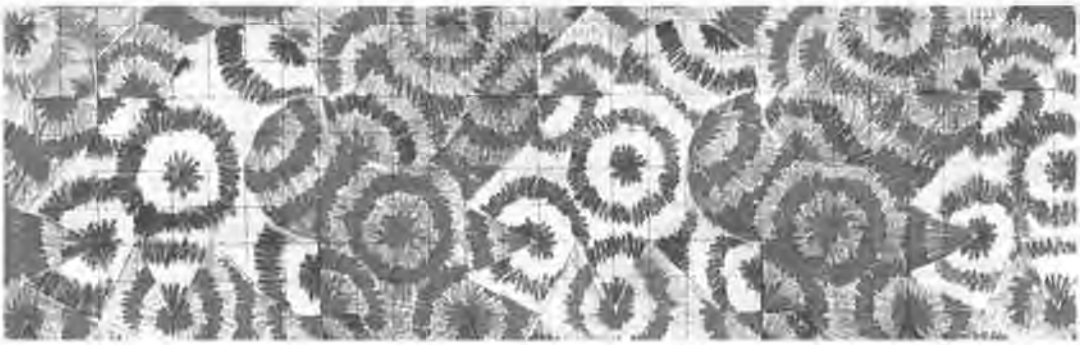
4. Le domaine de connaissances mis en jeu

Le moins que l'on puisse dire est que la palette des compétences mises en jeu pour la résolution de ce problème est très large.

En voici une liste non exhaustive :

- déduire la forme exacte d'un solide à partir d'une photographie et d'informations verbales ;
- représenter un solide en perspective, par des projections, par un développement ;
- utiliser la relation de Pythagore, le théorème de Thalès et les propriétés de la similitude ;
- résoudre des équations du premier degré ;
- calculer le volume de plusieurs solides : cube, parallélépipède rectangle, prisme droit, pyramide, tronc de pyramide, « obélisque » (par une décomposition en solides élémentaires).

Il est nécessaire de préciser que toutes ces notions avaient été abordées préalablement, mis à part le calcul du volume d'un « obélisque », nom inconnu des élèves qu'ils ont quelquefois remplacé avantageusement par le terme « toit de chaumière » ou « toit à quatre pans ».



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Pauline, 14 ans.

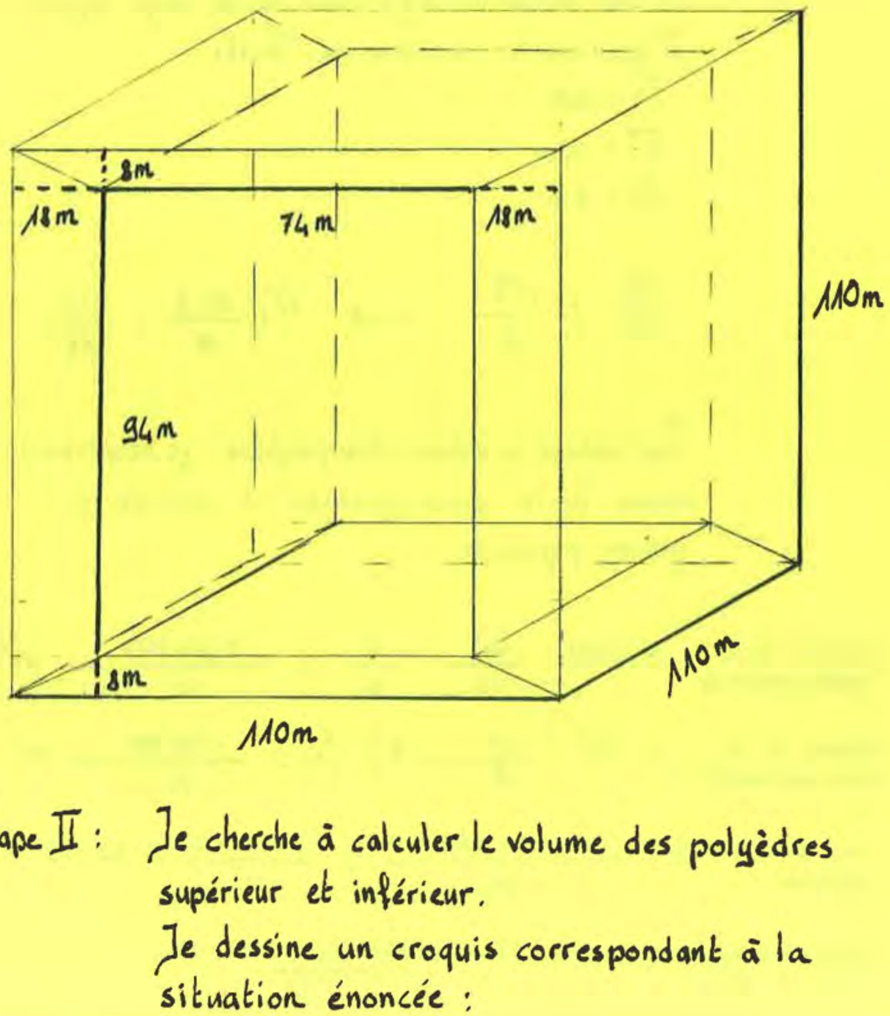
5. Quelques procédures de résolution

5.1 Calcul du volume du tronc de pyramide inférieur (ou supérieur) par soustraction des volumes de deux pyramides.

Etape I : Après avoir lu l'énoncé, je dessine un croquis du monument.

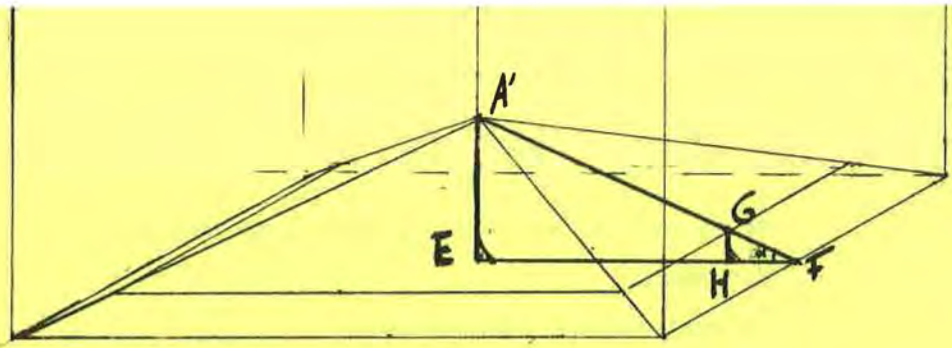
Je peux déduire deux mesures :

- 74 est obtenu en soustrayant 2·18 à 110
- 94 est obtenu en soustrayant 2·8 à 110



Etape II : Je cherche à calculer le volume des polyèdres supérieur et inférieur.

Je dessine un croquis correspondant à la situation énoncée :



Le triangle A'EF et le triangle GHF sont semblables ils ont chacun un angle droit et un angle alpha.
J'applique le théorème de Thalès.

$\overline{EF} = 55m$

$\overline{HF} = 18m$

$\overline{GH} = 8m$

$$\frac{55}{18} = \frac{A'E}{8} \longrightarrow A'E = \frac{55 \cdot 8}{18} = \frac{440}{18}$$

Pour obtenir le volume d'un polyèdre, je soustrais le volume de la "petite pyramide" à celui de la "grande pyramide".

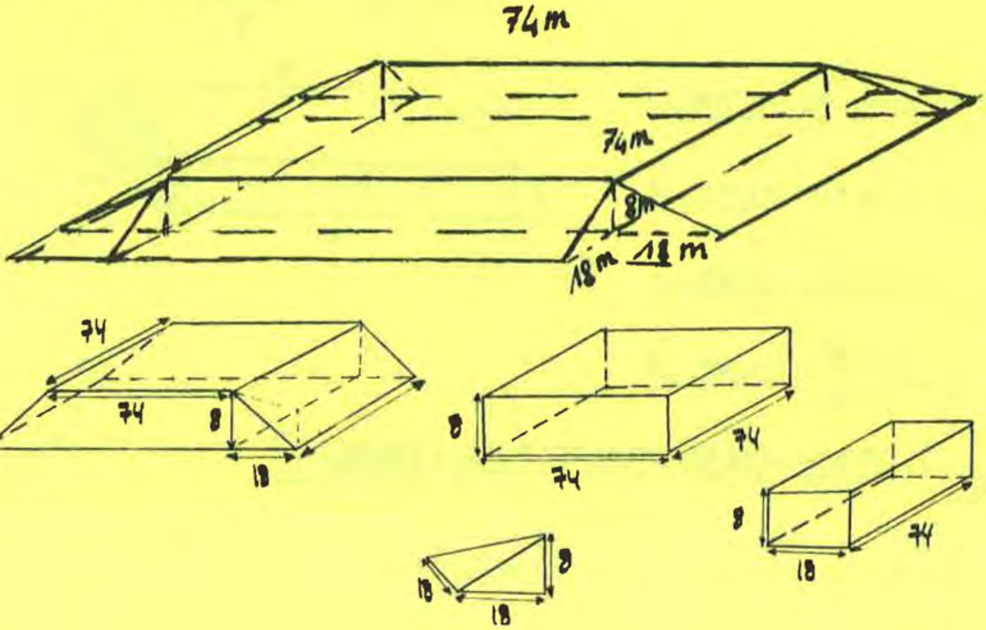
volume de la "grande pyramide" $= 110^2 \cdot \frac{440}{18} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5'324'000}{54}\ m^3$

volume de la "petite pyramide" $= 74^2 \left(\frac{440}{18} - 8 \right) \frac{1}{3} = \frac{1'620'896}{54}\ m^3$

volume d'un polyèdre $= \frac{5'324'000 - 1'620'896}{54} = \frac{3'703'104}{54} = 68'576\ m^3$

volume des polyèdres supérieur et inférieur $= 2 \cdot 68'576 = \underline{\underline{137'152\ m^3}}$

J'effectue une autre démarche afin de vérifier le volume obtenu des polyèdres supérieur et inférieur.
Je découpe un polyèdre par des plans verticaux, de manière à obtenir des solides connus : 1 parallélipipède rectangle, 4 prismes à base triangulaire et 4 pyramides.

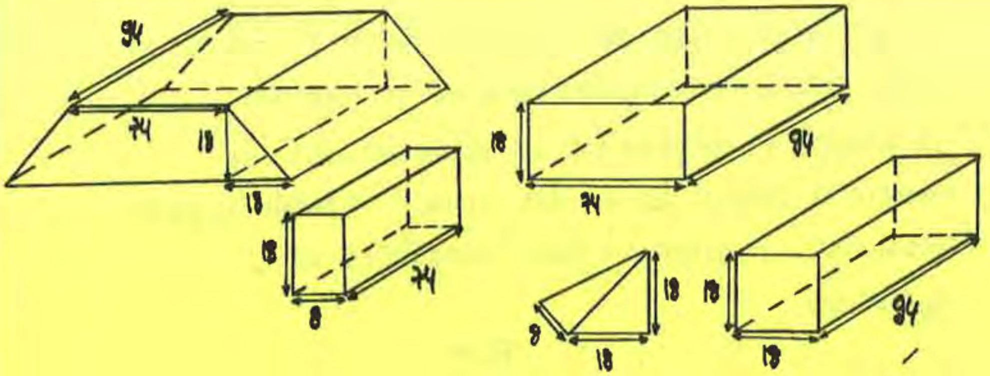


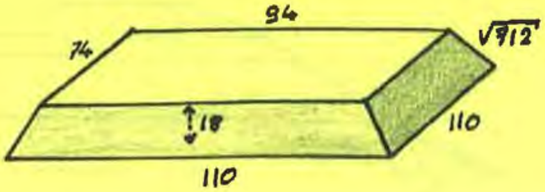
volume du parallélipipède $= 74^2 \cdot 8 = 43'808 \text{ m}^3$

volume des prismes à base triangulaire $= \dfrac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 18 \cdot 8 \cdot 74}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 21'312 \text{ m}^3$

volume des pyramides $= \dfrac{4 \cdot 18^2 \cdot 8}{3} = 3456 \text{ m}^3$

5.3 Calcul du volume du solide latéral par découpage en solides élémentaires





$$V = 74 \cdot 18 \cdot 94 = 125208 \text{ m}^3$$

$$V = 8 \cdot 18 \cdot 74 = 10656 \text{ m}^3$$

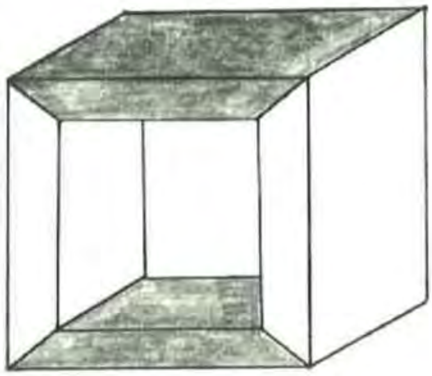
$$V = 18 \cdot 18 \cdot 94 = 30456 \text{ m}^3$$

$$2V = 4\,\frac{8 \cdot 18^2}{3} = 3456 \text{ m}^3$$

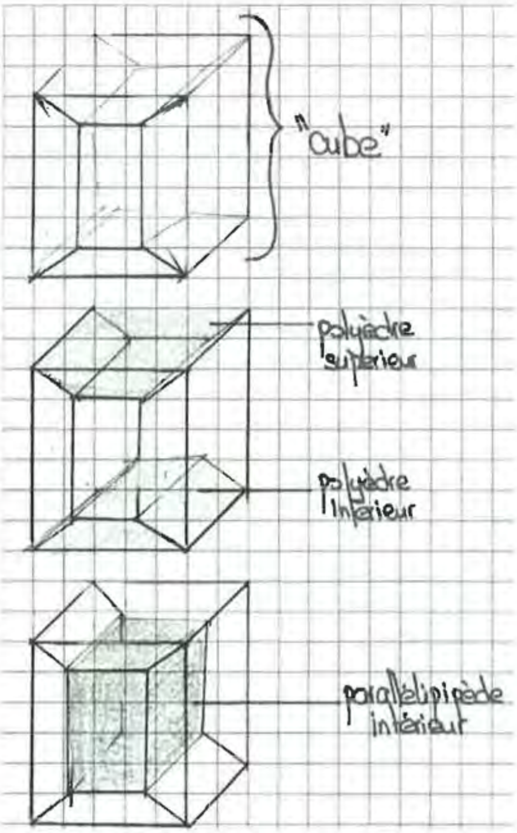
$$V_{tot} = 2(125208 + 10656 + 30456 + 3456) = \underline{339552 \text{ m}^3}$$

Le volume total de la Grande Arche vaut donc 476'704 m³.

5.4 Une autre manière de calculer le volume des solides latéraux



Dans la représentation ci-contre, on peut mettre en évidence un cube, 1 « parallélépipède rectangle intérieur », 2 troncs de pyramide (grisés) et 4 « obélisques » (les solides latéraux).



$$V_{\text{polyèdres latéraux}} = \frac{\left(V_{\text{cube}} - V_{\text{poly. inf. et sup.}} - V_{\text{paral. intérieur}}\right)}{2}$$

$$= \frac{\left(110^3 - 137'152 - 74^2 \cdot 94\right)}{2}$$

$$= \frac{679'104}{2} = \underline{\underline{339'552\ m^3}}$$

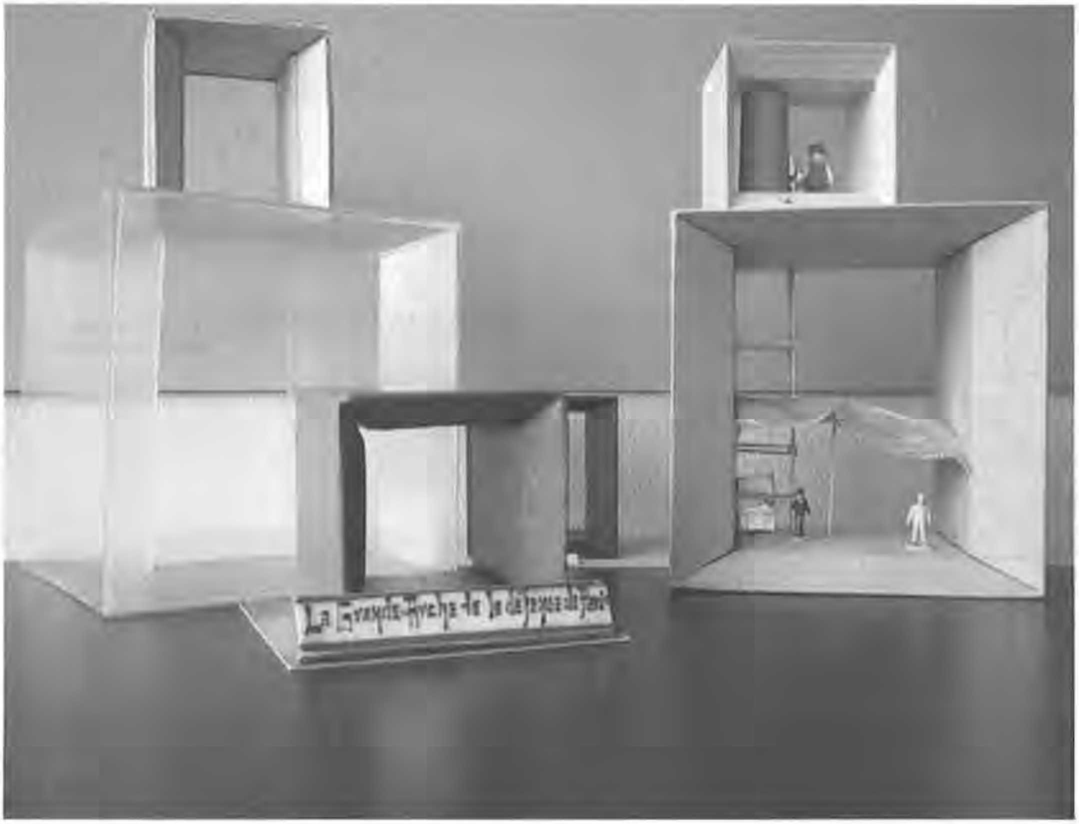
$$V_1 = 137'152 + 339'552 = \underline{\underline{476'704\ m^3}}$$

6. La maquette

6.1 Le choix d'une échelle et les calculs qui en découlent :

mesures de la maquette (en cm)	mesures de la réalité (en cm)	mesures de la réalité (en m)	
1 :	250		
44	11'000	110	
37,6	9'400	94	
29,6	7'400	74	
7,2	1'800	18	
3,2	800	8	
~ 7,9	$\sqrt{388} \cdot 100$	$\sqrt{388}$	Mesures des hauteurs des faces rentrantes inférieures et latérales
~ 10,2	$\sqrt{648} \cdot 100$	$\sqrt{648}$	

6.2 Les constructions



En bois, en fer, en plexiglas, en carton et même en chocolat...

7. Brève analyse a posteriori

La tâche demandée aux élèves, même s'ils ont la possibilité de travailler par groupes, est considérable. N'oublions pas que la rédaction d'un compte rendu prend du temps et que la construction de la pyramide, au-delà du choix du matériau, demande précision et minutie. Le temps imparti me semble donc adéquat.

Les élèves ont rencontré deux difficultés majeures.

La plus grande réside essentiellement dans la représentation du solide décrit par l'énoncé par un dessin géométrique correct. Cela ne va pas de soi, loin s'en faut. Beaucoup de temps s'écoule jusqu'à ce que les deux solides clés du problème, c'est-à-dire le tronc de pyramide et l'« obélisque », ne soient mis en évidence.

La représentation d'un objet de l'espace à trois dimensions par une figure du plan de la feuille est, en soi, un thème d'étude complet : celui de la perspective qui a occupé peintres et mathématiciens durant de nombreux siècles. La photo elle-même, qui est aussi une figure du plan, obéit à d'autres règles de perspective que celles que l'élève peut construire spontanément. Celui-ci doit d'abord « décoder » la photo pour s'imaginer le solide, à l'aide des informations du texte, puis revenir à un dessin plus dépouillé dans le plan de sa feuille.

La deuxième a trait au calcul même du volume de ce solide peu ordinaire, voire surprenant. Les élèves sont généralement habitués et confrontés à des solides plus traditionnels : parallélépipèdes rectangles, pyramide, tronc de pyramide, (demi-) sphère... Or, si les deux solides inférieur et supérieur de l'arche peuvent être reconnus comme des troncs de pyramides – eux-mêmes conçus comme des solides déterminés par deux pyramides – il n'en va pas de même pour les deux solides latéraux. Ceux-ci doivent être « construits » réellement ou par dessin pour en percevoir les caractéristiques : deux « bases » situées dans des plans parallèles, l'une carrée et l'autre rectangulaire (!), quatre faces de forme trapézoïdale qui, si on les prolongeait jusqu'à l'axe de la Grande Arche, donneraient deux triangles et deux trapèzes. Un découpage de l'« obélisque » en solides élémentaires exige donc de bonnes facultés de représentation spatiale !

Les travaux présentés et les commentaires précédents montrent la richesse des savoirs mobilisés lors de la résolution de ce problème.

Pour ce qui concerne l'organisation du travail, il convient de préciser que j'ai la chance de pouvoir travailler avec ce groupe d'élèves durant 7 périodes par semaine, en cours de mathématiques (5) et en cours de mathématiques appliquées (2). Les élèves sont donc au courant de mes attentes, réciproquement ils savent ce qu'ils peuvent attendre du maître lors de la résolution d'un problème.

Pour celui de la Grande Arche, le contrat a été clairement défini : une fois le problème distribué, mis à part les encouragements du maître, l'entière résolution leur était dévolue, sans aide de ma part, si ce n'est pour des questions liées au matériel.

L'analyse a priori du problème m'a convaincu qu'ils possédaient tous les outils nécessaires pour résoudre le problème, encore fallait-il les mobiliser à bon escient. Evidemment, il y a eu énormément d'interactions dans et entre les groupes qui ont favorisé l'émergence et la validation du calcul du volume.

Si les élèves ont fait preuve d'autonomie dans leur travail, celle-ci peut aussi être considérée comme le fruit du travail effectué en cours de mathématique et du type d'enseignement pratiqué dans lequel mises en commun, relances individuelles ou par groupes, contrôles intermédiaires, aides à la validation et appuis ponctuels sont courants.

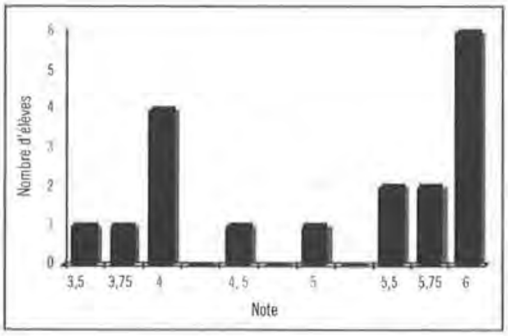
La classe a pris par moments des allures de véritable laboratoire, les élèves faisant réellement des mathématiques.

Nous vivons à l'époque à laquelle les mots mathématiques, enseignement et problèmes sont difficilement dissociables : « Faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes » peut-on lire sur la première page du plan d'études romand 1-6.

« I do believe that problems are the heart of mathematics »[2] s'exclame Paul R. Halmos. Nul doute que « La Grande Arche de la Défense » s'inscrit totalement dans cette philosophie de l'enseignement des mathématiques.

2. *Problems for Mathematicians, Young and Old*, Mathematical Association of America, 1993

Voici les résultats obtenus par les élèves :



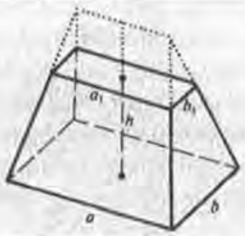
A noter que des élèves travaillant dans le même groupe n'obtiennent pas forcément le même résultat, leurs productions – la maquette mise à part – n'étant pas forcément identiques

8. Pour aller plus loin...

Trouvé dans un ancien formulaire de mathématiques et cité par un moyen d'enseignement en vigueur en Suisse romande[3] :

Tas de sable ou obélisque

$$V = \frac{h}{6}[ab + (a + a_1)(b + b_1) + a_1b_1]$$



Il me semble judicieux de montrer que cette formule correspond bien aux calculs liés à un découpage de l'« obélisque » en 9 solides élémentaires : 1 parallélépipède rectangle, 4 pyramides, 4 prismes droits à base triangulaire isométriques deux à deux.

$$V = V_{parall.\ rect.} + 4V_{pyramide} + 2V_{prisme\ droit} + 2V_{prisme\ droit}$$

$$V = a_1b_1h + 4\frac{a-a_1}{2}\cdot\frac{b-b_1}{2}\cdot h\cdot\frac{1}{3} + 2\frac{b-b_1}{2}\cdot h\cdot a_1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{a-a_1}{2}\cdot h\cdot b_1\cdot\frac{1}{2}$$

$$= a_1b_1h + \frac{(a-a_1)(b-b_1)h}{3} + \frac{(b-b_1)a_1h}{2} + \frac{(a-a_1)b_1h}{2}$$

$$= a_1b_1h + \frac{abh}{3} - \frac{ab_1h}{3} - \frac{a_1bh}{3} + \frac{a_1b_1h}{3} + \frac{a_1bh}{2} - \frac{a_1b_1h}{2} + \frac{ab_1h}{2} - \frac{a_1b_1h}{2}$$

$$= \frac{a_1b_1h}{3} + \frac{abh}{3} + \frac{ab_1h}{6} + \frac{a_1bh}{6} \quad = \frac{h}{6}(2a_1b_1 + 2ab + ab_1 + a_1b)$$

$$\boxed{= \frac{h}{6}\left[ab + (a+a_1)(b+b_1) + a_1b_1\right]}$$

3. *Math 9 NE*, Jaquet et Calame