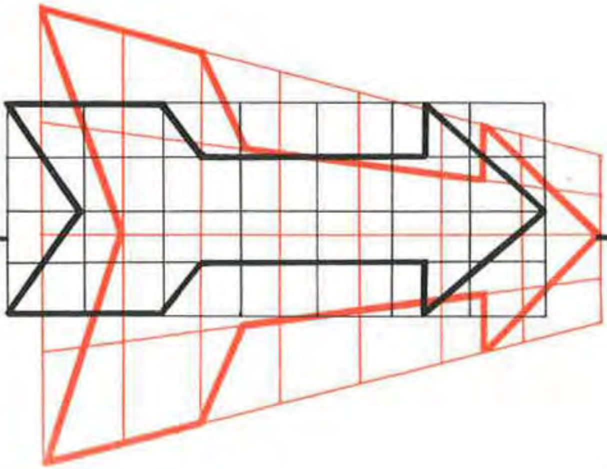
Séminaire pédagogique de
l'enseignement secondaire

73



MATH ECOLE

MAI 1976
15e ANNEE

MATH ECOLE 73

15e ANNEE MAI 1976

Editorial

De nombreuses voix dans le corps enseignant, parmi les parents, dans l'opinion publique, s'accordent pour reconnaître que la nouvelle forme prise par l'enseignement de la mathématique favorise une meilleure prise de conscience de la réalité, contribue à former des esprits curieux, intellectuellement actifs, développe les pouvoirs de raisonnement et d'abstraction.

Et pourtant une certaine opposition ne désarme pas. Sans aller jusqu'aux outrances entendues dans un pays voisin où un homme politique s'insurgeait et demandait de quel droit les instituteurs apprenaient à réfléchir et à raisonner à leurs élèves alors qu'ils étaient payés pour leur apprendre à lire, à écrire et à compter, il semble que d'aucuns se sentiraient plus à l'aise si l'école primaire se bornait à l'apprentissage des techniques élémentaires.

Comment expliquer, par exemple, l'intervention véhémente de ce professeur qui, usant de la supériorité que lui confère une formation mathématique spécialisée, invite les maîtres de l'école primaire à limiter leurs ambitions à l'acquisition des quatre opérations arithmétiques, tout le reste étant, déclare-t-il, sans grande importance pour la suite des études ?

Comment expliquer que certains professeurs de mathématique entretiennent une opposition stérile entre mathématiques modernes ou traditionnelles alors qu'ils devraient être les premiers à effectuer la synthèse de l'ancien et du moderne pour vivifier leur enseignement et l'adapter aux exigences du monde actuel ?

L'instituteur, généraliste par fonction et par conséquent non spécialiste en mathématique, peut à bon droit se sentir inquiet à l'écoute de certains avis doctement exprimés.

Nous souhaiterions ici rassurer ceux qui doutent. Certes une solide formation aux techniques de calcul numérique reste indispensable aujourd'hui comme hier, voire même plus qu'hier eu égard à l'accroissement de la demande d'éducation et à son corollaire, l'augmentation des exigences, tant au niveau professionnel que scolaire. Mais la connaissance des algorithmes n'est rien si elle ne s'accompagne pas d'un raisonnement logico-mathématique cohérent et d'une méthode efficace d'analyse du réel qui seuls permettront l'utilisation à bon escient des techniques de calcul.

Dans l'enseignement primaire moins encore qu'ailleurs, l'opposition entre des mathématiques dites modernes et une arithmétique déclarée traditionnelle n'a de signification. Les activités sur les notions d'ensembles et de relations constituent des outils puissants qui permettent à la fois de développer le raisonnement et de favoriser la construction des notions arithmétiques ou géométriques qui figuraient dans les anciens programmes. Tout est question de dosage et d'harmonie. Mais ceux qui chercheraient à dissocier les deux aspects et à «driller» tantôt le calcul, tantôt les représentations ensemblistes ou les diagrammes sagittaux, sans mettre au premier plan les raisonnements plus généraux qui s'appliquent dans ces divers domaines et sans concevoir l'enseignement de la mathématique comme un instrument global de formation de la pensée, s'exposent à des déboires aussi bien que ceux qui, après l'école primaire, se contenteraient de la mémorisation de quelques formules, théorèmes et démonstrations, sans donner l'occasion aux adolescents de résoudre de véritables problèmes et de poursuivre des activités propres à favoriser leur accession au raisonnement hypothético-déductif.

R. Hutin

Mathématique 4e année

Note liminaire

A quatre reprises déjà, Math-Ecole a présenté les ouvrages de Mathématique parus depuis 1972, sous le signe de la coordination romande et plus précisément de CIRCE I (voir Math-Ecole, numéros: 55, novembre 1972; 63, mai 1974; 67, mars 1975; 68, mai 1975).
Les auteurs de ces présentations, qui sont aussi les auteurs desdits manuels, n'ont jamais eu la prétention de décrire in extenso le contenu de la Méthodologie ou des Fiches; ils ont opté plutôt pour choisir à chaque fois un thème *dans chacune des quatre avenues du programme romand; ils ont tenté d'éclairer une démarche pédagogique non toujours explicitée dans le corps même des ouvrages.*
C'est dans la même perspective qu'on présente ci-après «Mathématique 4e année»: C. Haller, dans l'avenue ER, nous entretient sur une notion fort traditionnelle, la proportionnalité; *R. Dyens, dans l'avenue NU, décrit une activité centrée sur le* système binaire *et une autre pouvant introduire la notation des* puissances; *C. Burdet, dans l'avenue OP, a choisi la* division, *soit la plus complexe des «quatre opérations»; J. Wetzler, dans l'avenue DE, indique les étapes d'une méthodologie conduisant à la notion de* mesure.

F. B.

AVENUE ER: (Ensembles et Relations)

Application linéaire: Proportionnalité

par Charles Haller

L'orientation nouvelle donnée à l'enseignement mathématique par le programme CIRCE ne concerne pas que les futurs bénéficiaires d'«études longues», comme le prétendent certaines critiques superficielles. Si l'on renonce à donner des recettes et des trucs pour la résolution de certains types de problèmes, c'est parce qu'il vaut mieux comprendre d'abord les faits et les structures (au sens large) sous-jacents à ces problèmes.
L'activité 6 de ER constitue un exemple évident de cette démarche peut-être naïve, mais solide, qui repose sur des manipulations et des observations.
Il s'agit d'une première approche de l'application linéaire, ou fonction linéaire:

$$f : x \longmapsto ax$$

Celle-ci représente un cas particulier de la fonction affine:

$$f : x \longmapsto ax + b$$

On l'écrit aussi sous la forme $y = ax + b$.

Lorsque b est nul, on retrouve la première fonction énoncée. Alors a représente le *facteur* ou *coefficient de proportionnalité.*

On en perçoit tout de suite l'utilité; un grand nombre de problèmes dits «de la vie courante» en découlent; calculs commerciaux et professionnels de toute espèce, nombreuses applications aux techniques les plus diverses. Mais ce qui retiendra notre attention à ce niveau, c'est la notion mathématique qu'il convient de découvrir et d'assimiler.

Tableaux de couples

a) Nous partons d'une situation qui évoque les problèmes de partages proportionnels. Mais ceux-ci exigent une seule solution, alors que nous étudions une relation capable de nous fournir une vue générale. Voilà pourquoi nous parlons d'une *situation*.
Puisque nous travaillons dans **N**, nous utilisons des jetons. Mais des réglettes ou des noix feraient tout aussi bien l'affaire.
La première règle de partage est celle-ci:

— André prend un jeton chaque fois que Bernard en prend deux.

En même temps qu'on aligne les jetons sous les étiquettes A et B, on établit un tableau des résultats obtenus:

A	B
0	0
1	2
2	4
3	6
...	...

Puis viennent des quetsions sur ce qu'on observe. On développe également le tableau.

Deuxième règle de partage:

— Caroline prend trois jetons quand Denise en prend un.

On répète le même travail et on obtient le tableau:

C	D
0	0
3	1
6	2
9	3
...	...

On ne manque pas de proposer un cas insoluble dans nos conditions, par exemple: «Lorsque C a vingt jetons, combien en a D ?»
On remarque alors que la colonne C ne comporte que des multiples de trois.
On répète encore le même travail avec une troisième règle de partage:

— Emile prend trois jetons quand Françoise en prend deux.

Le tableau suivant est établi:

E	F
0	0
3	2
6	4
9	6
...	...

Puis des questions viennent confirmer ce qu'on a observé. On développe le tableau, on remarque que E ne reçoit que des multiples de trois, F que des nombres pairs.
La comparaison des trois tableaux permet déjà de nombreuses constatations, qu'on exprime en utilisant les termes de moitié, double, tiers, triple, multiple de...

b) L'examen d'un des tableaux ci-dessus, du dernier par exemple, permet de découvrir quelques propriétés de l'application linéaire.

E	0	3	6	9	12	15	...
F	0	2	4	6	8	10	...

On remarque que les couples du tableau nous donnent la possibilité d'en trouver un nombre illimité d'autres par addition et par multiplication.
Prenant deux couples quelconques, on peut additionner les termes concernant E d'une part, les termes concernant F d'autre part; les deux sommes forment un couple appartenant au tableau; exemple: (3 ; 2) et (12 ; 8) vont nous donner (15 ; 10).

Autre exemple observé directement dans le tableaux:

E	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	...
F	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

Pour la multiplication, on fait appel à un facteur qui n'appartient pas forcément au tableau, 5 par exemple. Ce facteur multiplie les deux termes du couple choisi et l'on va retrouver un couple du tableau. Exemple pour (3 ; 2); on obtient $(5 \cdot 3; 5 \cdot 2) = (15 ; 10)$.

Autre exemple observé directement dans le tableaux:

×5

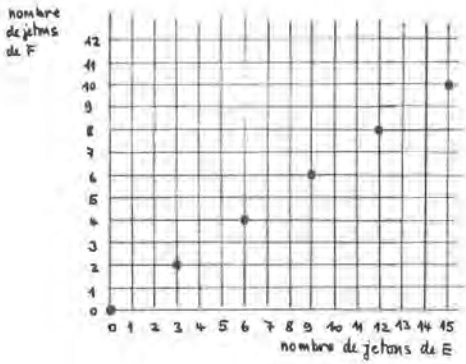
0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	...
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...

×5

On peut étendre le tableau aussi loin qu'on le veut au moyen de ces procédés.
On remarque également que les opérations inverses, soit la soustraction et la division, peuvent aussi être utilisées.
La notion de couple apparaît ici liée à une règle de proportionnalité; on n'oublie pas de proposer des contre-exemples pour bien fixer cette notion.

Représentation graphique

La représentation graphique de notre partage s'effectue sur un quadrillage, les nombres portés en abscisses représentant les parts attribuées à E, les nombres portés en ordonnées représentant celles de F. On remarque que les points sont alignés, aussi lorsqu'on intervertit abscisses et ordonnées.



Vers les «problèmes»

Voici une donnée classique que les élèves vont traiter d'une façon détaillée:

— Comment Georges et Henri se répartiront-ils 55 jetons si, à chaque tirage, Georges en prend 7 et Henri en prend 4 ?

Le tableau s'établit ainsi:

Tirages	G	H	Somme
1	7	4	11
2	14	8	22
3	21	12	33
4	28	16	44
5	35	20	55

On remarque que la colonne G contient des multiples de 7, la colonne H des multiples de 4, la colonne «Somme» des multiples de 11.

Voilà qui permet de poser des problèmes tels que:

— Lorsque Henri a 16 jetons, combien en a Georges ?
— Lorsque 44 jetons ont été répartis, quelle est la part de chacun ?
— Lorsque Georges a 210 jetons, combien de jetons ont été répartis ?
etc.

En jouant sur les différences, on aborde d'autres problèmes:

— En répartissant les jetons selon la même règle, combien Georges et Henri en ont-ils chacun lorsque Georges en a 12 de plus que Henri ?

D'où le tableau suivant:

Tirages	G	H	Différences
0	0	0	0
1	7	4	3
2	14	8	6
3	21	12	9
4	28	16	12

En observant les nombres de la colonne «Différences», on voit qu'ils sont des multiples de trois. D'autres problèmes se présentent alors:

— Lorsque Georges a 140 jetons, combien Henri en a-t-il de moins ?
— Lorsque Henri en a 60 de moins que Georges, combien de jetons a-t-on partagé ?
etc.

On voit que cette activité tend à procurer à l'élève une méthode de travail autant qu'une première idée de l'application linéaire. Le travail méthodique est rendu possible par l'emploi de bons outils, ici le tableau numérique et le graphe cartésien. Chemin faisant, on a utilisé les notions de couple et d'opération sur des couples à un niveau si concret qu'elles sont à la portée de chaque enfant.
Au cours d'une leçon, le fils d'un commerçant a remarqué: «Si on prend 100, 200, 300... dans une colonne, dans l'autre on peut trouver ce que mon papa appelle des pour-cents...» L'idée était juste malgré sa formulation incomplète. Voilà donc quelques bases solides sur lesquelles, ultérieurement, s'appuieront maints développements utiles à tous les élèves.

(suite p. 8)

- Culture et récréation:

Le Petit Archimède
Mensuel scientifico-récréatif

Il veut être:
— une revue scientifique interdisciplinaire, écrite pour des jeunes de 12 à 22 ans;
— un moyen parmi d'autres de développer un humanisme scientifique.

Il est l'œuvre d'une association (Association pour le Développement de la Culture Scientifique) régie par la loi de 1901.
Les collaborateurs du PA, ingénieurs, enseignants, chercheurs sont donc tous bénévoles.
Parmi les bonnes pages du PA, signalons:
— Le Petit Archimède construit:
 — un aéroglisseur (PA 7)
 — la casserole magnifique (PA 9)
 — un boomerang (PA 20), ...

ADCS-Abonnement - C.E.S. Sagebien - 80000 Amiens
Joindre chèque ou mandat à l'ordre de: A.D.C.S. - C.C.P. 4736-63 Lille (30 F).

- **La formation de l'esprit scientifique**

Conclusion par Gilbert Walusinski

«Axer notre enseignement sur la réflexion plus que sur l'accumulation des connaissances; donner le goût de la recherche pour le plaisir de découvrir plutôt que faire apprendre pour dégoûter de la science. Car en donnant le goût de la recherche, on donnera envie d'apprendre par surcroît. Honorer le tâtonnement expérimental qui tient de la sensibilité manuelle et de l'intelligence sans pour autant renier les plaisirs de la mathématisation, donc de l'abstraction. Assumer tous les risques que comporte cette orientation: l'école est laïque, mais ne doit pas écarter sous ce prétexte l'étude sérieuse des religions; l'école est au-dessus des luttes des partis, mais jeter un voile sur la réalité de celles-ci est la pire hypocrisie; il y a des examens et des concours, il faudra bien, de toutes façons apprendre, mais que le besoin d'apprendre soit ressenti par l'élève grâce au désir qu'il aura de comprendre ou de découvrir.
Nous ne demandons pas la Lune. Nous aimerions seulement un peu plus d'accord entre l'énoncé des principes et des buts de l'enseignement d'une part et sa pratique d'autre part. Une autre école: non plus celle où on prétend apprendre, mais celle où, *«pour de vrai»*, on chercherait. Car, du même coup, on apprendrait beaucoup et bien.»

«Cahiers pédagogiques», No 141, février 1976, p. 29

AVENUE NU: (Numération)

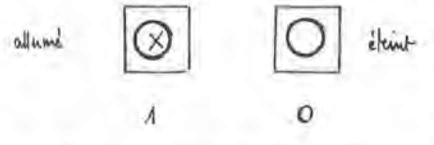
Système binaire - Notation des puissances

par Roger Dyens

Dans les méthodologies des trois premières années, les enfants ont eu largement l'occasion de faire des groupements, des échanges, et de les coder dans différentes bases. En quatrième année il s'agit, tout en évitant la lassitude, de bien préciser la valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre, de mettre en relief le processus de récurrence et d'introduire la notation des puissances.

1. Système binaire

La base deux (système binaire), peu utilisée durant les trois premières années parce que trop «mouvante», est mise quelque peu en évidence en quatrième afin de susciter de nombreuses observations sur l'organisation d'un système de numération. Elle permet donc de mieux préciser les notions indiquées ci-dessus. C'est aussi une base qui est *justifiable* aux yeux des élèves puisqu'elle est couramment utilisée dans la pratique. Dans l'activité qui concerne particulièrement cette base, des lampes allumées ou éteintes (ou les schémas qui les remplacent) rappellent les «oui - non» des jeux de ER, que l'on peut coder au moyen de 1 ou 0. Ces lampes peuvent être des lampes de poche manipulées par des élèves placés sur un rang, ou des ampoules alignées dans un abaque. Si elles sont simplement dessinées, une croix que l'on peut effacer facilement symbolise la lumière. Chacun de ces moyens permet un comptage en binaire.

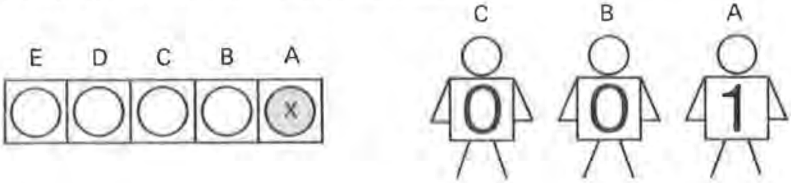


Après un temps de recherche et de tâtonnements, l'enfant indique l'arrangement trouvé qui lui permet d'enregistrer le plus grand nombre possible, avec le matériel limité (série de lampes ou leur symbole) dont il dispose, dans l'abaque. Ensuite, puisque tout système de numération implique des conventions, il faut bien en adopter à notre tour:

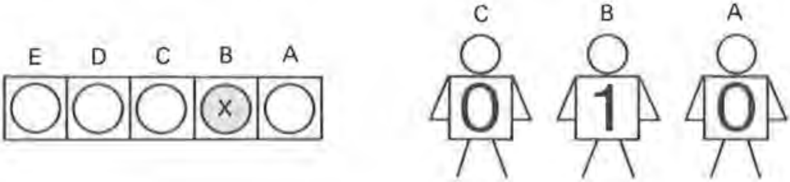
- utiliser les lampes à partir de la droite,
- n'allumer que les lampes strictement nécessaires à la compréhension du code (économie de moyens et de places).

Alors le comptage, avec un même système pour tous, peut commencer; voici un exemple tiré de la méthodologie de quatrième année.

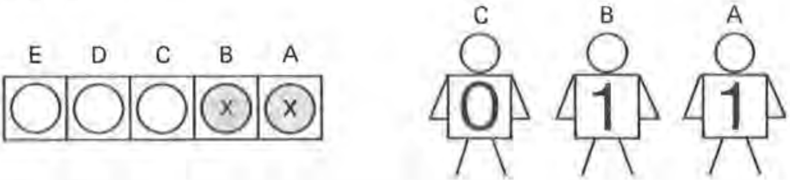
1 signal :
L'élève A reçoit le premier signal et l'affiche.



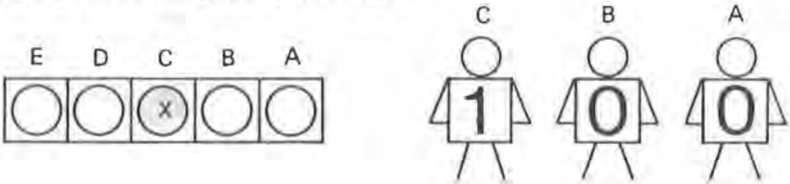
2 signaux :
L'élève A reçoit le deuxième signal mais ne peut pas l'afficher. Il pousse du coude l'élève B pour qu'il tourne son carton ; l'élève A remet le sien à zéro.



3 signaux :



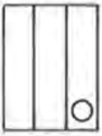
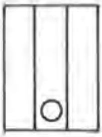
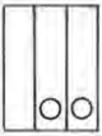
4 signaux :
L'élève A reçoit le quatrième signal mais ne peut pas l'afficher. Il pousse du coude l'élève B qui, lui non plus, ne peut pas afficher ce signal ; l'élève B pousse du coude l'élève C : ce dernier tourne son carton tandis que les élèves A et B remettent le leur à zéro.



Etc.

Emploi d'autres matériels:

On fait compter des signaux en plaçant des jetons dans un abaque ou au moyen d'un compteur formé de plusieurs cadrans à deux positions:

Nombre de signaux	abaque	compteur	code
0			0 0 0
1			0 0 1
2			0 1 0
3			0 1 1
4			1 0 0

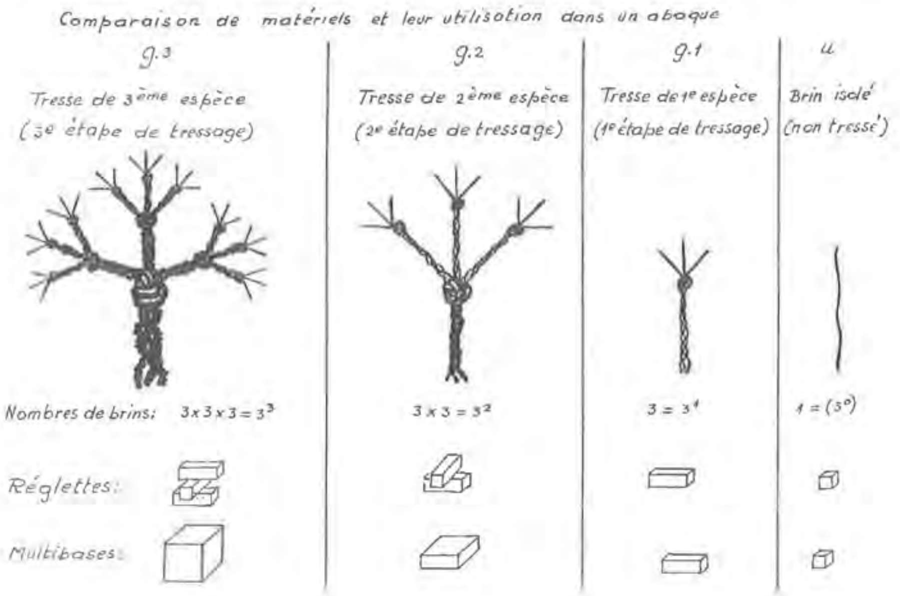
On peut pousuivre le comptage aussi loin que les élèves le désirent ; dans chaque état du compteur (ou de l'abaque) ils doivent savoir déterminer quel est le nombre de signaux donnés jusque là.

⚠ Dans les représentations ci-dessus, c'est la notion de valeur positionnelle des chiffres dans l'écriture d'un nombre qui est développée, et non celles d'échange et de groupement.

Ce type d'activité peut être repris avec d'autres bases.

2. Notation des puissances

Dans les classes où le matériel Cuisenaire avait été introduit, les enfants se metaient très tôt à écrire la décomposition de nombres en puissances successives de la base (par exemple 142 en base cinq: $1 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 2 \times 5^0$). Les réglettes permettent en effet d'illustrer d'une manière parlante cette forme de décomposition d'un nombre. Il en va de même d'ailleurs à l'aide des blocs multibases, matériel complémentaire des réglettes et utilisable parallèlement à celles-ci. Mais, l'expérience l'a montré, c'est seulement après les nombreuses manipulations de matériels non structurés (en effectuant des groupements et des échanges durant les trois premières années), que les «croix» et les «tours» de réglettes, ainsi que les blocs multibases prennent toute leur signification pour l'enfant et lui permettent de saisir et d'utiliser la notation des puissances. Il lui faut vraiment du temps pour comprendre la «dynamique» de l'exponentation, c'est-à-dire la différence, quant à l'ordre de grandeur, entre les nombres représentés par 2^2 et 2^8, par 2^4 et 5^4, etc. En outre, il confond longtemps, par exemple, 2^3 et 2×3, 3^3 et 3×3; il intervertit volontiers 3^4 et 4^3 (surtout s'il a découvert que $2^4 = 4^2$), etc.
En quatrième année, pour tenter de remédier à ces inconvénients, nous proposons un matériel non structuré nouveau: des brins à tresser. Les étapes successives du tressage rappellent les différentes espèces de groupements. Elles constituent une passerelle supplémentaire pour arriver à la notation et à l'emploi des exposants. Après cette activité, la manipulation des matériels structurés, qui permettent un travail rapide, contribue alors utilement à la consolidation des connaissances.



Quelques types d'exercices tirés des fiches d'élèves.

A. Cherche les codes en base dix.

base trois

	1	0	0	0
		2	0	0

$3^3 =$ $3 \times 3 \times 3$ $= 27$

$2 \times 3^2 =$ $2 \times (3 \times 3)$ $=$ ______

base quatre

	1	0	0	0
		2	0	0

______ = ______ = ______

______ = ______ = ______

base cinq

	1	0	0	0
	4	0	0	0

______ = ______ = ______

______ = ______ = ______

base deux

	1	0	0	0
1	0	0	0	0

______ = ______ = ______

______ = ______ = ______

B. Complète selon le modèle.

$123 = 100 + 20 + 3$

$123 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1$

$123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 3 \times 1$

385 = ______ + ______ + ______

385 = ______ + ______ + ______

385 = ______ + ______ + ______

604 = ______

604 = ______

604 = ______

La division

par Charles Burdet

Dans l'avenue **Opérations** de l'ouvrage «Mathématique 4e année», une place importante est réservée à la *division*. Deux activités lui sont consacrées, deux aspects sont abordés, celui des situations et celui de la technique. Dans le premier cas, l'accent est mis sur le sens de cette opération. L'élève est conduit à reconnaître les situations qui induisent une division, il est amené à faire la distinction entre la *division exacte* — qui est l'opération inverse de la multiplication — et la *division euclidienne* — dans laquelle le résultat est constitué d'un couple de nombres, le quotient et le reste.
Dans le second cas, c'est l'apprentissage d'un mécanisme qui est visé.
Nous retiendrons ici le second aspect, celui de la technique. Il s'agit de rendre l'élève capable d'*effectuer une division avec aisance et sûreté*..
Le chemin qui conduit à ce but est long, il n'est généralement pas facile. Ce n'est pas à la fin de la quatrième année qu'il pourra être définitivement atteint. Dans ce domaine, la hâte est mauvaise conseillère. La plupart du temps, elle conduit à des désillusions; elle peut même provoquer chez certains élèves un blocage.
On peut envisager plusieurs méthodes. Celle qui consiste à fournir dès le début de l'apprentissage un modèle fini n'est certainement pas la meilleure. L'élève ne peut que reproduire, appliquer une règle; il n'a pas l'occasion de construire, voire de créer.
Remarquons que dans l'emploi d'un algorithme, quel que soit cet algorithme, on fait inévitablement intervenir d'une manière plus ou moins masquée:

- les principales opérations de l'arithmétique, c'est-à-dire l'addition, la soustraction et la multiplication;
- plusieurs propriétés concernant ces opérations, principalement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition;
- des processus variés, par exemple:

  la décomposition d'un nombre,
  l'approximation,
  l'estimation d'un produit,
  la recherche d'économie.

Dans l'ouvrage romand, l'élève est d'abord mis en situation de construire *l'algorithme des soustractions successives*. Dans cette première phase, le

maître se contente de présenter une situation et de jouer le rôle de catalyseur. Au moment opportun, il intervient discrètement, fait ressortir un point particulier. Dans ce climat de travail, l'élève a la possibilité de présenter son idée, d'examier celle de son voisin, de confronter différents points de vue. Une part importante est donc laissée au tâtonnement, à la recherche.
Dans un deuxième temps, la matière sur laquelle travaille l'élève le conduit à faire des observations, à mettre en évidence certaines propriétés, à les expliciter. Elle l'incite ainsi à affiner progressivement sa technique, à la rendre plus économique, plus efficace. C'est dans une phase ultérieure, située au-delà de la quatrième année, que l'élève aura élaboré un algorithme essentiellement sûr et aussi suffisamment rapide.
La matière propre à faire ressortir diverses propriétés de la division, les séries d'exercices qui aident l'élève à porter son attention sur un point précis dépendent du degré de préparation et de l'intérêt de la classe.
Il n'est donc pas possible de proposer dans une méthodologie un cheminement, un travail programmé.
Les exercices de la méthodologie de quatrième année n'ont d'autre prétention que celle de donner au maître quelques idées; ils ont la valeur d'exemples, de suggestions.

Nous en citerons quelques-uns:

I. a)

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
34	9	____	____
35	9	____	____
36	9	____	____
37	9	____	____
38	9	____	____
____	____	____	____

On remarque que, lorsque le diviseur est le nombre 9, le plus grand reste possible est 8. On peut aussi classer les nombres qui donnent un reste de 0 dans la division par 9, ceux qui donnent un reste de 1, ceux qui donnent un reste de 2, etc.

b)

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
34	____	9	____
35	____	9	____
36	____	9	____
37	____	9	____
38	____	9	____
____	____	____	____

Dans de nombreux cas, il n'est pas possible de compléter la ligne. En chercher la raison, c'est préciser que le reste est nécessairement inférieur au diviseur.

c)

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
34	______	______	9
35	______	______	9
36	______	______	9
37	______	______	9
38	______	______	9
___	______	______	___

Une méthode d'investigation peut être trouvée aisément dans cette situation. On constate que certaines lignes ne peuvent être complétées de plusieurs manières.

d)

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
______	9	2	______
______	9	3	______
______	9	4	______
______	9	5	______
______	9	6	______
______	___	___	______

Pour chaque ligne, plusieurs réponses sont possibles. En déterminer le nombre, c'est indiquer les différents restes que l'on peut obtenir lorsque le diviseur est 9.

II. Voici la page d'un calendrier dont le premier jour coïncide avec le lundi:

D		7	14	21	28
L	1	8	15	22	29
M	2	9	16	23	30
M	3	10	17	24	31
J	4	11	18	25	
V	5	12	19	26	
S	6	13	20	27	

1. Un tel tableau est le point de départ à de nombreuses observations, par exemple:
   — tous les dimanches correspondent à un multiple de 7;
   — les nombres correspondants à un jour donné ont le même reste dans la division par 7;
   — les jours d'une même semaine ont le même quotient dans la division par 7.
   — etc.
2. On peut étendre les observations aux nombres supérieurs à 31, en imaginant que le calendrier proposé est celui du mois de janvier et poser des questions telles que:
   — Quel jour de la semaine sera le 140e jour de l'année ?
   — Entre le 100e et le 120e jour de l'année, quels sont ceux qui tombent sur un lundi ?
   — Le 100e et le 105e jour de l'année sont-ils dans la même semaine ?
   — etc.
3. On constate que le tableau qui est présenté peut donner lieu à une exploitation riche et fructueuse. Il permet de mettre en évidence tantôt l'importance du reste, tantôt celle du quotient.

La présentation de situations comme celles qui sont données ci-dessus à titre d'exemples n'élimine pas les exercices d'entraînement. Ceux-ci sont aussi nécessaires. Qu'ils viennent à leur heure. Les donner trop tôt empêche les élèves d'accorder tout le temps qui est nécessaire au travail d'approche, au tâtonnement expérimental.

(suite ci-contre)

● «La mathématique s'introduit seulement lorsque des *questions* sont posées, qu'il s'agisse de problèmes techniques, pratiques ou de curiosité scientifique. Ces questions fournissent des informations que la mathématique a pour objet de traiter de manière efficace, en se servant seulement des ressources de l'intelligence, en dépassant les limites du simple bon sens et en visant à dépasser les questions initiales pour devancer en quelque sorte d'autres questions».

Propos du professeur Hirsch, de la faculté des sciences de l'université de Bruxelles, rapportés par le professeur Louis Jéronnez.

● **15e Rencontre internationale du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique**

Du 24 au 27 août 1976, au Lycée Royal de Namur, domaine de Haute-Anhaive, Jambes.

Thème: Situations pédagogiques.

«Nombreuses sont aujourd'hui les personnes prenant conscience de la profonde mutation qui travaille l'école, et plus généralement notre monde. Il importe plus d'épanouir que de consommer, d'éduquer que d'instruire, d'être que d'avoir.
Quel esprit doit animer notre enseignement ? Comment œuvrer concrètement pour nous rapprocher progressivement de cet avenir que nous entrevoyons ? Telles sont les questions qui nous interpellent aujourd'hui avec plus d'insistance que jamais. Telle est sans doute la tâche difficile et exigeante qui requiert désormais la plus grande part de nos efforts communs.»

Les activités de mesurage

par Josée Wetzler

— *Qu'est-ce que le mètre, Lebrac ?*
— *! ...*
— *Qu'est-ce que le système métrique ?*
— *! ...*
— *Comment a-t-on obtenu la longueur du mètre ?*
— *Euh !*
Trop éloigné de La Crique, Lebrac, les oreilles à l'affût, le front effroyablement plissé, suait sang et eau pour se rappeler quelque vague notion ayant trait à la matière. Enfin, il se remémore vaguement, très vaguement, deux noms propres cités: Delambre et La Condamine, mesureurs célèbres de morceaux de méridien.
Malheureusement, dans son esprit, Delambre s'associait aux pipes en écume qui flambaient derrière la vitrine de Léon le buraliste. Ainsi, hasarda-t-il, avec tout le doute qui convenait en si grave occurence:
— *C'est, c'est, Lécume, et Lecon... Lecon !*

Extrait de «La guerre des boutons», de Louis Pergaud

Dans *Mathématique quatrième année*, «Lécume et Lecon» ont perdu toute l'importance qu'ils avaient aux yeux du maître de Lebrac et de La Crique. En effet, les temps ont changé et la pédagogie ne préconise plus d'imposer un système, mais bien de le construire peu à peu.
Dans ce but, le programme romand, dès la deuxième année primaire, invite l'enseignant à utiliser toutes les occasions fournies par la vie scolaire pour pratiquer des activités de mesurage, multiplier jeux et expériences afin d'établir des comparaisons et de permettre ainsi aux enfants de découvrir eux-mêmes:

a) la nécessité d'un système de mesure;
b) les relations existant entre les diverses unités.

Au cours des quatre premières années primaires, la méthodologie romande propose différentes activités portant sur l'étude de la mesure; on peut y relever les principales étapes suivantes:

1. Comparaisons qualitatives essentiellement intuitives;
2. Première approche de la mesure à l'aide d'un élément de référence arbitrairement choisi;
3. Utilisation d'unités arbitraires et non conventionnelles; expression de la mesure:

   — par un nombre entier;
   — par un encadrement.

4. Approche de la mesure par itération de l'unité;
5. Utilisation de différentes unités arbitraires utilisées simultanément pour exprimer une même mesure;
6. Utilisation d'un système de référence avec unité, multiples et sous-multiples, en relation avec les notions d'échanges et de groupements en différentes bases.

Nous nous efforcerons, à travers un exemple, celui de la mesure des surfaces, de mettre en évidence ces différentes étapes.

1. On présente à un enfant deux surfaces, par exemple le dessus du pupitre du maître et le dessus d'une table d'élève, en lui demandant de désigner la plus grande des deux.
En général, l'enfant peut répondre spontanément car il procède par estimation visuelle et cela lui apparaît comme une évidence. En première année par exemple, lorsqu'il effectue des exercices de sériation, il compare de façon directe les éléments deux à deux.
Par contre, lorsqu'on choisit judicieusement deux surfaces (une longue et étroite avec une autre plus courte et plus large, par exemple) et qu'on demande à l'enfant de les comparer, il y a des hésitations et des contradictions. La nécessité de recourir à la mesure s'impose.

2. Un élève (ou l'enseignant) propose alors d'utiliser une unité arbitraire quelconque, par exemple des cahiers ou des carrés de papier; on dispose ces cahiers sur les deux surfaces à mesurer de façon à recouvrir entièrement (ou à peu près) celles-ci. On peut ensuite, par simple comptage, déterminer la plus grande des deux surfaces. Si dans un premier stade, les résultats des comparaisons sont exprimés oralement afin de mettre en place un vocabulaire précis, ils sont ensuite notés dans des tableaux.

3. De la même manière, collectivement ou par groupes, les enfants mesurent toutes les surfaces possibles. On emploie les mêmes unités pour mesurer des surfaces différentes, mais aussi des unités différentes pour mesurer une même surface.
On aboutit à plusieurs constatations:

a) Une surface peut rarement s'exprimer par un nombre entier d'unités arbitraires.

Exemple: on mesure plusieurs couvertures de livres avec des gommes.

Couverture	Aire en unités «gommes» plus de...	moins de...
A	9	15
B	10	14
C	6	10

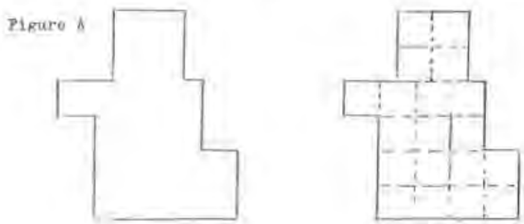
Les mesures de A, de B et de C ne donnent pas des nombres mais des encadrements:

$$9 < \text{aire de A} < 15$$
$$10 < \text{aire de B} < 14$$
$$6 < \text{aire de C} < 10.$$

b) L'utilisation de grandes unités ne permet pas toujours de différencier deux surfaces dont les aires sont voisines; on améliore la précision de la mesure en utilisant des unités plus petites.
c) En mesurant deux surfaces A et B à l'aide de feuilles de papier par exemple, on constate que A est plus grande que B car il a fallu pour recouvrir A un plus grand nombre de feuilles de papier que pour recouvrir B.
En reprenant la même activité avec une autre unité, par exemple des demi-feuilles de papier, on constate qu'à nouveau A est plus grande que B; ce résultat ne dépend donc pas de l'unité choisie.

4. Les enfants ne disposent pas d'un nombre suffisant de pièces unités pour recouvrir entièrement la figure à mesurer; il est donc nécessaire d'en tracer le contour et de les déplacer sur la surface à mesurer.

Exemple tiré de «*Mathématique quatrième année*, DE jeu 5:

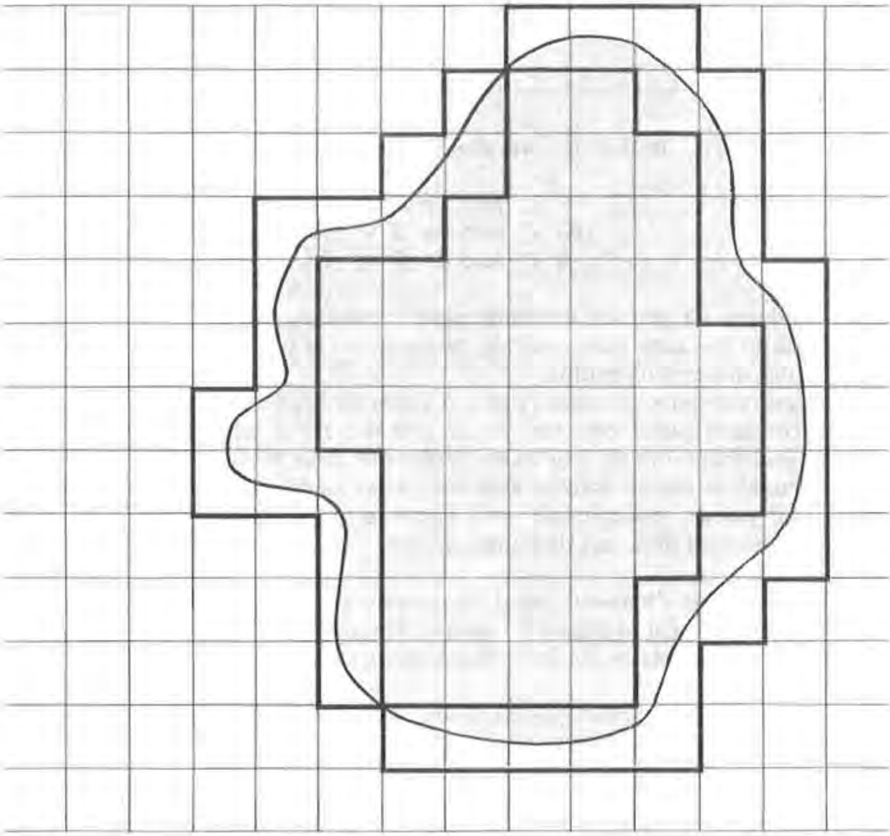


La figure A comprend un nombre exact de surfaces carrées (19).

— A-t-on pu déposer des surfaces carrées sur toute la surface A ? (non, car on n'en avait pas suffisamment).

Le bord de la surface à mesurer ne suit pas toujours les lignes d'un quadrillage; dans ce cas, la surface à mesurer est encadrée par deux surfaces dont les bords suivent les lignes d'un quadrillage. Exemple: fiche DE-37, quatrième année.

Choisis une unité de mesure et dessine-la.



Quelle est l'aire de la surface limitée par la ligne rouge? ______

Quelle est l'aire de la surface limitée par la ligne verte? ______

Encadre l'aire de la surface ombrée U.

______ < aire de U < ______

5. Lorsqu'il n'est pas possible de mesurer entièrement une surface avec l'unité choisie, certains enfants peuvent avoir l'idée d'améliorer la précision de la

mesure en utilisant des unités plus petites. S'il existe une relation entre les unités choisies (moitié ou quart de l'unité principale, par exemple), la mesure peut s'exprimer de différentes façons.

Exemple tiré de *Mathématique quatrième année*, DE jeu 5:

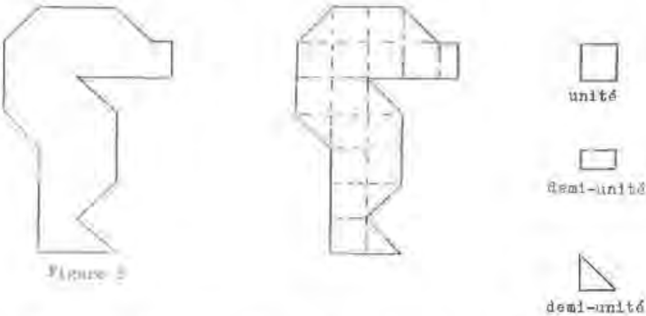


Figure 5

La surface B comprend quatorze surfaces carrées, une surface rectangulaire et six surfaces triangulaires.

— Faites un tableau pour indiquer le résultat:

Aire de B		
□	▭	◺
14	1	6

— Comment exprimer ce résultat en surfaces carrées seulement ? (deux surfaces rectangulaires valent une surface carrée, deux surfaces triangulaires également; une surface rectangulaire et six surfaces triangulaires valent donc trois surfaces carrées et demie; l'aire est donc 17 et demi).

Aire de B		
□	▭	◺
14	1	6
17	1	—

6. Au lieu de prendre des demi-unités ou des quarts d'unités (système de base deux) les enfants peuvent imaginer, par exemple un système de mesure de base quatre:

Il est nécessaire de mener de pair ces activités et celles qui sont proposées pour les groupements et les échanges dans l'avenue numération.
Après avoir également travaillé avec un système de mesure en base dix, les enfants aboutissent naturellement au système d'unités *conventionnelles*, dont ils ont senti le besoin pour pouvoir transmettre le résultat de leurs recherches à quelqu'un d'étranger à la classe, par exemple. Rappelons, en effet, que la *seule* utilité de ce système conventionnel est de rendre la communication plus aisée et sans ambiguïté.

A propos de «machines»

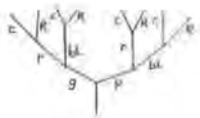
par M.-C. Andrès

Rappelons que le terme «machine» est un moyen pédagogique pour travailler la notion d'opérateur. Mais il doit être évident que, concrètement, aucune «machine» utilisée à l'école ne changera jamais ni la couleur, ni la forme, etc.
Par conséquent la notion d'opérateur est un concept relativement abstrait malgré le terme «machine».
D'autre part, la définition de l'ensemble sur lequel l'opérateur agit doit également être claire et non ambiguë.
*Etant donné que, sur le plan mathématique, l'ensemble source et l'ensemble but forment le même ensemble, concrètement, on aura avantage à n'utiliser également qu'*une collection d'objets.
C'est au niveau de la symbolisation que les élèves seront ainsi placés dans l'obligation de représenter, de noter, plusieurs fois, le même ensemble.
Il est important voire indispensable d'utiliser l'écriture conjointement à la manipulation afin de garder une trace écrite de ce qui s'est passé.

Les machines non numériques

1. *Travail collectif*

Matériel:
— une série de 8 formes:
carré - rond
rouge - blanc
grand - petit
— une boîte en carton qui figure une «machine».



La maîtresse demande aux enfants de nommer les machines qu'ils connaissent:

une machine à écrire
une machine à coudre
une machine à laver le linge
une machine à laver la vaisselle, etc.

M. — A quoi servent les machines ? Que font-elles ?
E. — Elles travaillent.
M. — Font-elles n'importe quoi ?
E. — Elles font le travail qu'on *veut* qu'elles fassent.
M. — Que met-on dans une machine à laver la vaisselle ?
E. — De la vaisselle sale. La machine lave et on ressort de la vaisselle propre.
M. — Peut-on ressortir de la machine des chaussettes ?
E. — Non ! Parce qu'on ne les y a pas mises avant.
M. — J'ai apporté une «machine», malheureusement pas une vraie. Voici ce ce que je veux mettre dedans.

La maîtresse présente aux enfants les surfaces suivantes:

Les enfants décrivent ce qu'ils voient. Puis la maîtresse place ces surfaces dans la «machine».

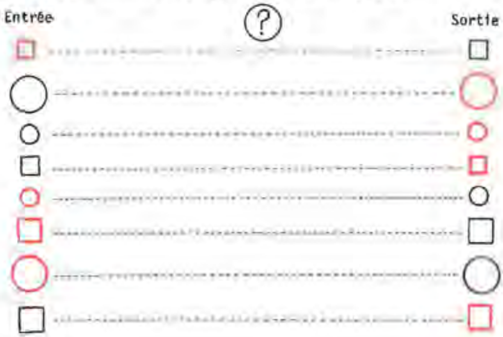
Elle dessine au tableau les mêmes surfaces sans rien dire aux enfants.

Les enfants disent spontanément:

— Il manque une forme.

M. — Laquelle ? Comment le savez-vous ?
E. — Vous avez dessiné au tableau ce qu'il y a dans la machine et il manque le petit carré rouge.

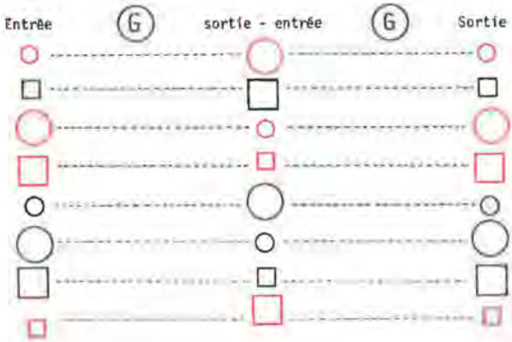
La maîtresse demande aux enfants d'observer les transformations qu'elle veut que la machine fasse, et dessine ce qui suit au tableau:



La maîtresse montre distinctement chaque pièce qui se trouve à l'entrée de la machine puis la pièce transformée à la sortie de la machine.
Lorsque les enfants ont découvert le travail de la machine (dans ce cas «change la couleur»), ils l'indiquent à la place du point d'interrogation (un C). Puis ils proposent un autre travail à faire faire à cette machine. Il est bien entendu que le matériel proposé va induire le choix de l'opérateur. La machine ne peut pas faire n'importe quoi.
Lorsque le choix est fait, les enfants viennent chercher dans la machine la pièce qui convient, après la transformation.

Remarque: Les enfants, n'ayant à disposition qu'une seule série de formes, prennent conscience que leur activité porte sur une *relation dans un ensemble.*
La représentation écrite au tableau noir suppose une difficulté supplémentaire, celle qui consiste à dessiner *deux fois le même ensemble.* Il est donc essentiel de respecter ces deux démarches.

Les enfants effectueront le même travail avec la machine qui change la grandeur.
Dans l'étape suivante, les enfants feront le travail avec deux «machines» successives, puis ils chercheront une machine qui remplace le travail des deux.



La maîtresse fait observer ce tableau.

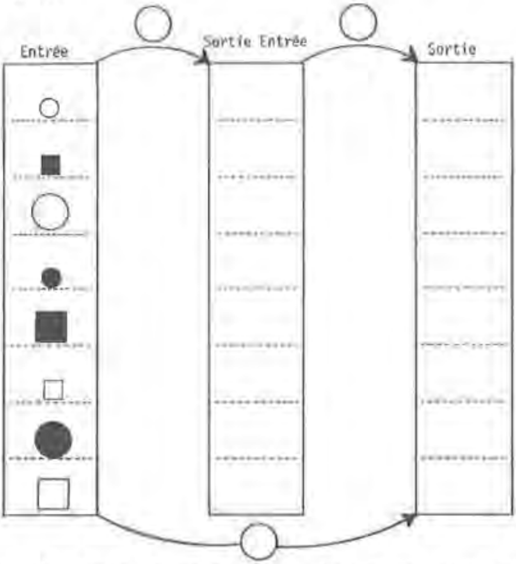
E. — Les machines font le même travail.
— A la sortie de la deuxième machine c'est de nouveau comme à l'entrée de la première machine, etc. ...

M. — Ne pourrait-on pas trouver une seule machine qui fasse le travail de ces deux, de manière que si l'on met ceci dans la machine (les formes placées dans la première machine), il ressorte cela (les formes qui sortent de la deuxième machine) ?

La maîtresse désigne l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Les enfants constatent qu'il s'agit d'une machine qui ne fait rien. Ils indiquent Ⓡ à l'opérateur.
Le même travail est effectué avec deux opérateurs qui changent la Ⓕorme ou deux opérateurs qui changent la Ⓒouleur.

2. *Activité en petits groupes de 2 ou 3 enfants chacun, travaillant simultanément*

Matériel:
— Chaque groupe a une feuille préparée par la maîtresse (voir ci-dessous);
— et une petite boîte avec une série de formes correspondant à celles dessinées sur la feuille.



Quelques groupes d'enfants cherchent ce qui se passe si on prend un premier opérateur Ⓒ et un deuxième opérateur Ⓕ ,puis remplacent ces deux opérateurs par un seul (dans ce cas ⒸⒻ).

D'autres groupes font le même travail en commençant par l'opérateur Ⓕ puis avec l'opérateur Ⓒ .
Dans un travail avec toute la classe, les enfants sont amenés à confronter leurs résultats entre eux et constatent que l'opérateur Ⓒ suivi de l'opérateur Ⓕ revient au même que Ⓕ suivi de Ⓒ .

$$C \ast F = F \ast C$$

Le même travail pour vérifier la commutativité, l'associativité, l'élément neutre et la symétrie peut être effectué de cette manière.

Les machines numériques

Matériel:
— des petites assiettes avec des jetons collés soit:
0 1 2 3 4 5 6.
— un grand carton figurant la machine.

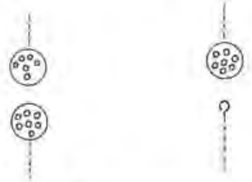
Travail avec une demi-classe placée devant le tableau.
Discussion à propos des machines, leur travail, ce qu'elles reçoivent comme éléments (revision), etc.
La maîtresse fait observer aux enfants les assiettes.
Elle les met dans la machine et dessine au tableau le graphe de la relation.

Les enfants vont découvrir le travail de la machine. Ils l'indiquent à la place du point d'interrogation (ajoute 1 ou +1).

Ils remarquent que:

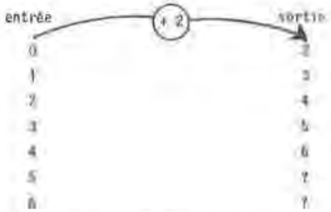
— l'assiette vide ne peut ressortir car un nombre naturel plus 1 ne peut donner 0;
— l'assiette avec 6 jetons n'a pas d'image à la sortie, car il n'y a pas d'assiette avec 7 jetons dans la machine.

Les enfants proposent de mettre une assiette avec 7 jetons afin que 6 ait une image; on constate alors que le problème se reposera pour le nombre 7.



En poursuivant ce travail, les enfants prennent conscience qu'en réalité on peut placer tous les nombres **N** dans la machine, ainsi les nombres mis à l'entrée de la machine auront toujours une image.
La maîtresse propose d'écrire à la place de chaque assiette le symbole numérique correspondant.

Les enfants proposent une autre machine:



Ils viennent prendre dans la machine l'assiette correspondante.
A l'occasion de cette nouvelle activité, les remarques faites précédemment vont ressurgir (voir ci-dessus).

La maîtresse va faire observer le graphe.

	entrée	sortie	
Les enfants sont amenés à observer la suite des nombres placés à l'entrée de la machine. Il y a toujours 1 de plus.	0 1 2 3 4 5 6	2 3 4 5 6	Même remarque à propos des nombres placés à la sortie de la machine.

La machine ajoute 2 à tous les nombres placés à l'entrée.

Nous allons faire fonctionner deux fois de suite la machine.

entrée	$\xrightarrow{+1}$	sortie = entrée	$\xrightarrow{-1}$	sortie
0		1		0
1		2		1
2		3		2
3		4		3
4		5		4
5		6		5
6		?		?

$$\xrightarrow{\quad\quad\quad\quad \pm 0 \quad\quad\quad\quad}$$

Par souci d'économie, on va faire faire en une fois le même travail à la machine. Les enfants constatent que la machine ferait le même travail si en une fois elle n'enlève rien et n'ajoute rien.
Les enfants sont amenés à observer les nombres à l'entrée de la première machine, à la sortie de la première machine; idem pour la deuxième machine.
On remarquera que pour les machines numériques il y a une nouvelle difficulté. L'opérateur est de même nature que les éléments de l'ensemble sur lequel il travaille. Ce qui n'était pas le cas pour les machines non numériques (voir plus haut).

● Travail de groupe et non-directivité à l'école maternelle et dans l'enseignement élémentaire

par Lucien Brunelle et Odile Chappuis.

Voilà un petit ouvrage (90 pages) plein de sève et d'à-propos. «Le remplacement du préceptorat par une entreprise d'Instruction publique n'a de sens qu'en mettant l'énergie recélée par une classe, en tant que collectif, au Service de l'auto-formation de chacun de ceux qui la composent, dans le sens d'une élévation de sa capacité d'auto-gestion intellectuelle, morale et civique.» C'est faire prendre conscience des forces inemployées du groupe. Et, du fait de ce non-emploi, ces mêmes forces luttent les unes contre les autres et s'annihilent. Tout comme les molécules de gaz dans un récipient. C'est le désordre, c'est l'entropie. C'est aussi l'échec — ou presque, c'est enfin la lassitude des enseignants, voire leur épuisement. Si, en revanche, on sait organiser ces forces — qui sont forces vitales —, elles deviennent moyens de la formation des individus qui, se formant les uns par les autres, en viennent à savoir de mieux en mieux s'auto-former. C'est l'école de la personne. Encore faut-il savoir faire vivre utilement, sainement, éthiquement, les groupes. Car les forces mises en jeu et, du même coup, libérées, peuvent produire le meilleur ou le pire. Les auteurs ont le mérite d'avoir vu les risques et de ne jamais biaiser avec les exigences morales de la société actuelle. Il s'agit d'un ouvrage bien pensé, sans prétention académique, mais combien propre à guider en toute sécurité, qui veut se lancer dans l'exploitation des puissances individuelles et communautaires des enfants. A commencer par la maternelle.
«Faire du travail de groupe ce n'est donc pas purement et simplement mettre un certain nombre d'élèves en rond. Pas davantage qu'il suffit de brûler l'estrade pour faire de la Pédagogie Freinet. Cela revient au contraire à restructurer la tâche de telle sorte qu'un nombre déterminé d'élèves puisse être mis en possession de tous les éléments nécessaires à la réponse, la participation de chacun étant requise pour l'effectuation de la tâche d'ensemble.» Lucien Brunelle fait partie du Groupe de rénovation des institutions pédagogiques; Odile Chapuis enseigne à l'Ecole normale de Versailles.

I.R.D.P. S. Roller

J. A. 2000 NEUCHATEL 7 MAIL

Monsieur René HUMAIR
Directeur du séminaire péda-
gogique de l'enseignement
secondaire
Avenue Du Peyrou 4

2000 NEUCHATEL 10

TABLE DES MATIERES

Edouard Claparède

Pour marquer, en 1973, le centième anniversaire de sa naissance, une manifestation a eu lieu à Genève réunissant psychologues et pédagogues.
Les communications faites à cette occasion ont été réunies en une **plaquette** à paraître en juillet 1976.
Prix de souscription Fr. 10.— (jusqu'au 15 juillet); au-delà de cette date Fr. 15.—.
Verser la somme au CCP 12 - 985 de la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de Genève. Mentionner au dos: **Plaquette Claparède.**

Comité de rédaction:	*Abonnements:*
Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet, L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame, D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin, F. Oberson, J.-J. Walder, S. Roller, rédacteur, Mlle L. Cattin, secrétaire-comptable.	Suisse F 10.—, Etranger F 12.—, CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an. Institut romand de recherches et de documentation pédagogiques; 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel. (Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311