

11e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la deuxième épreuve

[ndlr] Voici les problèmes de la deuxième épreuve du 11e Rallye mathématique transalpin, qui s'est déroulée en mars 2003 en Suisse romande. Ces énoncés sont suivis de commentaires et résultats, en pages 44 à 56.
© ARMT 2003

1. TU JOUES AVEC MOI? (Cat. 3)

Thomas va chez François pour jouer aux billes.
Thomas a 27 billes. Lors de la première partie, il en gagne 15.

Après la deuxième partie, sa mère lui téléphone et lui demande de rentrer tout de suite à la maison. Thomas compte alors ses billes. Il en a 51.

Thomas a-t-il perdu ou gagné des billes lors de la deuxième partie? et combien?
Expliquez votre raisonnement.

2. COURSE D'OBSTACLES (Cat. 3, 4)

Mario s'est inscrit à une course d'obstacles qui se déroulera dimanche. Le premier jour d'entraînement, il a sauté un nombre impair d'obstacles.

Le lendemain, il saute le double du nombre d'obstacles du premier jour. Et ainsi de suite, il s'entraîne chaque jour en sautant à chaque fois le double du nombre d'obstacles sautés le jour précédent.

Lors du dernier entraînement, le jour avant la course, il saute 80 obstacles.

Quel jour de la semaine a-t-il commencé à s'entraîner? Combien d'obstacles a-t-il sautés ce premier jour d'entraînement? Expliquez votre raisonnement.

3. LE COUVRE-LIT DE GRAND-MÈRE (Cat. 3, 4)

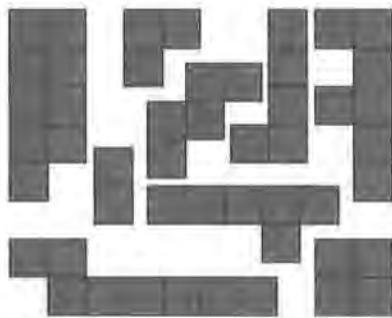
Grand-Mère a cousu un couvre-lit rectangulaire formé de carrés de même taille. Il y a 22 carrés dans la longueur et 15 carrés dans la largeur.

Grand-Mère a placé un rang de carrés bleus sur tout le bord du couvre-lit, et a fait tout l'intérieur avec des carrés rouges.

Combien y a-t-il de carrés rouges dans le couvre-lit de Grand-Mère? Expliquez votre raisonnement.

4. PUZZLES CARRÉS (Cat. 3, 4, 5)

Voici 9 pièces pour construire des puzzles carrés.
Celle du bas, à droite, est déjà un carré, de 2 carreaux sur chaque côté.



En utilisant plusieurs de ces pièces, essayez de former un puzzle carré de 3 carreaux de côté.

Puis recommencez en essayant de former un puzzle carré de 4 carreaux de côté.

Puis recommencez en essayant de former un carré de 5 carreaux de côté. Puis un de 6, et ainsi de suite.

(On ne peut pas utiliser deux fois la même pièce dans un même puzzle.)

Dessinez les puzzles carrés que vous avez pu former.

5. À TABLE, AVEC MARTHE ET SES AMIS

(Cat. 3, 4, 5)

Marthe a invité pour son anniversaire ses meilleurs amis : Anne, Lucie, Georges, Aldo, Angélique, Gabriel et Martin. Ils se mettent à table pour manger la tourte et se placent de la manière suivante :

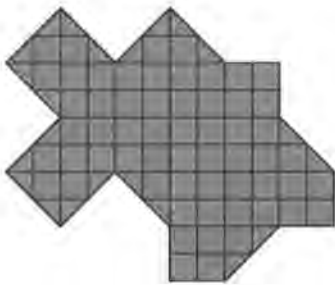
- chaque enfant est assis en face d'un autre enfant,
- Marthe et Angélique se mettent aux deux bouts de la table,
- Georges est à la gauche de Marthe,
- les prénoms de deux enfants assis l'un à côté de l'autre ne commencent jamais par la même lettre,
- chaque garçon est placé entre deux filles.

De combien de manières peuvent se placer Marthe et ses amis ?

Représentez par un dessin toutes les manières de placer les enfants que vous avez trouvées.

6. DÉCOUPAGE (Cat. 4, 5)

Catherine souhaite partager entièrement cette figure en 7 morceaux égaux. Tous les morceaux doivent être égaux, de la même grandeur et de la même forme.



Montrez où il faudrait découper la figure.

Expliquez comment vous avez trouvé votre découpage.

7. L'ÉNIGME DE MERLIN L'ENCHANTEUR

(Cat. 4, 5, 6)

Merlin l'enchanteur désire mettre à l'épreuve les compétences mathématiques du petit Semola, le futur roi Arthur.

Il lui propose l'énigme suivante :

Le serrurier de notre village a trois fils.

Lorsqu'on additionne les trois âges de ces fils, on obtient 13 mais lorsqu'on les multiplie, on obtient 36. Le plus âgé des fils aide déjà son père à l'atelier. Quel est l'âge de chacun des fils du serrurier ?

Après avoir bien réfléchi, Semola donne sa réponse.

Merlin l'enchanteur est très satisfait. Semola a vraiment trouvé la bonne solution !

Résolvez vous aussi l'énigme de Merlin et justifiez votre raisonnement.

8. LA PARTIE DE DÉS (Cat. 5, 6)

Pauline et Jimmy jouent aux dés. Pour chaque partie, chacun lance son dé une seule fois.

Celui qui obtient le nombre le plus grand gagne la partie. (En cas d'égalité, on recommence.)

Ils font 5 parties. Pauline gagne 3 fois et Jimmy 2 fois.

Et, chose étrange, lors de chacune des cinq parties, le dé de l'un des deux joueurs a montré « 1 ».

Mais Jimmy remarque que la somme de tous les nombres qu'il a obtenus vaut 6 de plus que la somme de tous les nombres obtenus par Pauline.

Indiquez les nombres que les deux enfants peuvent avoir obtenus dans les 5 parties.

Expliquez votre raisonnement.

9. L'ALBUM DE PHOTOS (Cat. 5, 6)

Elise a placé dans un album les photos prises durant ses vacances. Il y a 80 photos et Elise les a disposées sur 29 pages : dans certaines pages, elle a mis 4 photos et dans d'autres 2 photos.

Combien y a-t-il de pages avec 4 photos et combien avec 2 photos dans l'album d'Elise ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

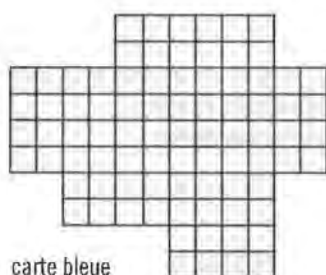
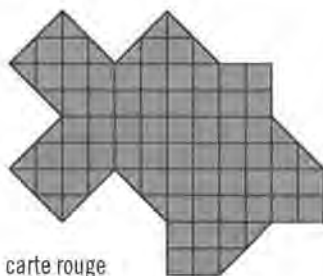
10. DES RECTANGLES, ENCORE DES RECTANGLES (Cat. 5, 6, 7)

Tracez 3 droites qui coupent un rectangle, de façon à former le maximum de nouveaux rectangles.

Dessinez votre rectangle et les trois droites.
Combien de rectangles peut-on voir en tout dans votre figure ?
Indiquez-les avec précision.

11. LES CARTES DE COULEUR (Cat. 6, 7)

Une classe de 21 élèves est divisée en groupes de trois élèves. Pour réaliser un collage chaque groupe doit recevoir un morceau de la carte rouge et un morceau de la carte bleue.



Mais attention :

- les deux cartes doivent être utilisées complètement,
- les morceaux d'une même couleur doivent être tous égaux (de même forme et de même grandeur).

Comment faut-il découper les cartes ? Expliquez comment vous avez pu effectuer les découpages.

12. QUATRE A QUATRE (Cat. 6, 7, 8)

En utilisant exactement quatre fois le nombre « 4 », et en combinant ces quatre nombres avec les opérations arithmétiques (« + », « - », « x » ou « : » et en utilisant éventuellement des parenthèses) on peut former de nombreux nombres naturels.

Combien de nombres naturels impairs différents peut-on former de cette façon ?

Indiquez-les tous, clairement, comme dans les exemples suivants :

Exemples :

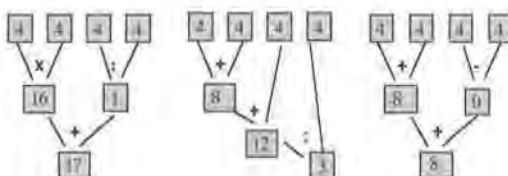
$$(4 \times 4) + (4 : 4) = 16 + 1 = 17$$

$$(4 + 4 + 4) : 4 = 12 : 4 = 3$$

$$(4 + 4) + (4 - 4) = 8 + 0 = 8$$

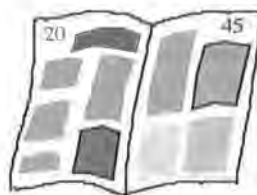
ce dernier exemple ne convient pas car il donne un nombre pair !

ou, sans utiliser de parenthèses :



13. UN QUOTIDIEN (Cat. 6, 7, 8)

Dans un quotidien formé d'un seul cahier, dans lequel 11 pages sont consacrées au sport, les pages 20 et 45 se trouvent sur la même face d'une feuille.



Combien ce quotidien a-t-il de pages ?
Justifiez votre réponse.

14. LE NOMBRE AMPUTÉ (Cat. 7, 8)

Dans un jeu mathématique, on présente aux candidats le nombre suivant :

123456789101112131415161718192021...394041424344454647484950

On leur demande de biffer 70 chiffres de ce nombre, de manière à obtenir le nombre amputé le plus grand possible avec les chiffres qui restent, sans modifier leur ordre.

Parmi tous les candidats, la petite Génia est la seule à trouver ce nombre.

Écrivez entièrement ce nombre amputé et expliquez comment Génia a fait pour le trouver.

15. LES VACANCES (Cat. 7, 8)

Lors des dernières vacances d'été, les deux frères Dumont, les deux frères Dubois et les deux frères Dupré sont allés à l'étranger: trois d'entre eux sont allés en Grèce, deux en Angleterre et un en Allemagne.

Un de leurs amis dit: « Les frères Dumont sont allés en Angleterre et les frères Dubois en Grèce ».

Un autre dit: « L'un des frères Dumont est allé en Allemagne, les frères Dubois sont allés en Angleterre ».

Un troisième dit: « Les deux frères Dumont sont allés en Grèce et, en ce qui concerne les frères Dupré, l'un est allé en Angleterre et l'autre en Grèce ».

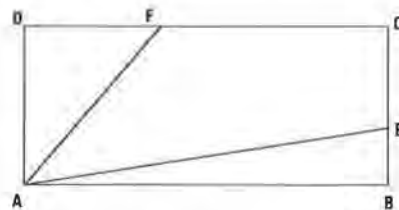
On sait que, pour chacun de ces trois amis, l'une de ses affirmations est vraie et l'autre est fausse.

Où les frères Dumont sont-ils allés en vacances? Expliquez votre raisonnement.

16. LE TERRAIN DU PÈRE FRANÇOIS (Cat. 7, 8)

Le père François veut partager son champ rectangulaire entre ses trois fils, par deux clôtures rectilignes issues du sommet A, de manière que les trois parts soient de même aire.

Ce dessin représente un premier schéma de partage, mais le père François se rend bien compte qu'il faudra l'ajuster.



Où faudra-t-il placer les extrémités E et F des clôtures, sur les côtés BC et CD pour que le partage soit équitable? Indiquez précisément la position de ces points et justifiez-la.

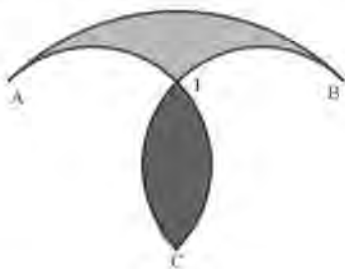
17. LA PINÈDE (Cat. 8)

Aldo possède une belle villa entourée d'un petit bois de pins. Malheureusement, ces arbres sont devenus secs pour cause de maladie et Aldo décide de les couper à la tronçonneuse. Il dit à son ami Louis qu'il réussira à effectuer ce travail en 6 heures. Louis, qui a une tronçonneuse plus puissante, affirme qu'il ferait ce travail en 4 heures.

S'ils travaillaient ensemble, combien de temps mettraient-ils pour couper tous les pins malades? Expliquez votre raisonnement.

18. LE CHAMPIGNON (Cat. 8)

Pour représenter un champignon, Daniela a dessiné cette figure, en trois arcs de cercle :



- un quart de cercle d'extrémités A et B de centre C et de 8 cm de rayon ;

- un demi-cercle d'extrémités A et C ;
- un demi-cercle d'extrémités B et C.

Elle a ensuite colorié le « chapeau » et le « pied » du champignon.

Daniela est persuadée que le périmètre du chapeau est beaucoup plus grand que celui du pied du champignon, mais il lui semble que l'aire du pied est plus grande que celle du chapeau.

Qu'en pensez-vous ?

Trouvez les rapports entre les périmètres et entre les aires des deux parties de la figure.

Justifiez votre raisonnement.

SOLUTIONS, COMMENTAIRES ET RÉSULTATS DES PROBLÈMES DE L'ÉPREUVE II DU 11^e RMT

François Jaquet

Coordinateur international de l'ARMT

Comme pour la première épreuve du 11^e RMT (*Math-Ecole 206*, pp 8 à 16), nous donnons ici quelques extraits des « analyses a priori » qui, sous leur rubrique « analyse de la tâche », présentent les solutions et quelques procédures permettant de les obtenir. Ces extraits sont accompagnés de quelques commentaires issus des résultats de la section de Belluno, de l'examen des copies de la section de Cagliari¹, des remarques des correcteurs romands et des taux moyens de « réussite » attribués aux classes de Suisse romande, notés pour chaque catégorie en regard du titre du problème. (Cette « moyenne », M, se situe entre 4 et 0, où en général, 4 signifie : réponse juste avec explications et justifications, 3 : réponse dont les explications laissent à désirer, 2 : réponse sans aucune explication, juste ou avec une légère erreur de calcul, parfois incomplète selon les problèmes, 1 : début de recherche avec tentatives cohérentes, 0 : incompréhension du problème ou procédure totalement inadaptée.)

1. TU JOUES AVEC MOI ? (Cat. 3 : M = 3,56)

Excellente réussite à ce problème de billes, du genre de ceux qui illustrent le « champ conceptuel de l'addition » selon la didactique des mathématiques.

1. Comme les problèmes du RMT sont les mêmes pour toutes les sections qui organisent l'épreuve, il est intéressant d'analyser, parfois, d'autres copies que celles des classes de Suisse romande.

L'état initial étant connu, les élèves peuvent procéder en deux étapes :

- examiner le cas de la première partie : percevoir l'état initial (27) puis le gain (15) et en tirer le nombre des billes de Thomas à la fin de la première partie par une addition : $27 + 15 = 42$
- passer à la deuxième partie et se rendre compte que l'état initial est 42 et l'état final est 51. En comparant ces nombres, déduire que Thomas a gagné des billes lors de la deuxième partie et en calculer le nombre

par une addition du genre $42 + \dots = 51$ ou par une soustraction $51 - 42 = \dots$ qui donne 9 billes gagnées.

Ils peuvent aussi considérer l'ensemble des deux parties : l'état initial est 27, l'état final est 51, en déduire qu'il y a un gain total de 24 billes, (qui se calcule par $27 + \dots = 51$ ou $51 - 27 = \dots$), et finalement considérer les gains de 15 lors de la première partie et de 24 pour l'ensemble et en déduire qu'il y a un gain de 9 lors de la deuxième partie par une opération avec des nombres qui représentent des transformations : $(+15) + \dots = (+24)$ ou $(+24) - (+15) = \dots$

Mais cette deuxième démarche, prévue a priori, n'a pas été repérée dans les copies analysées des classes de Cagliari.

Voici un exemple de la première procédure, avec soustraction :

- (Trad.) Réponse : dans la 2e partie Thomas en gagne 9.
Opérations² : $27 + 15 = 42$; $51 - 42 = 9$
Raisonnement : On a vu que Thomas avait 27 billes et il en a gagné 15 et en tout il en avait 42, mais à la fin, il en avait 52 et nous avons compris qu'il avait de nouveau gagné, on a fait une soustraction $51 - 42 = 9$, les billes gagnées sont 9. (Classe de troisième)

Dans deux cas sur douze (relevés par les correcteurs de Cagliari), les élèves ont remplacé la soustraction par une addition. Par exemple :

(Trad.) Opérations : $27 + 15 = 42 + 9 = 51$
Données : 27 : billes, 15 : gagnées dans la première partie, 51 : les billes en tout
Solution : Dans la 2e partie, il a gagné parce que avant il avait 42 billes. Il en a gagné 9, parce que $42 + 9$ font 51 (Classe de troisième)

2. Pour des raisons de place et de facilité, nous reproduisons toutes les opérations des élèves « en ligne », dans cet exemple et les suivants, alors qu'elles sont systématiquement disposées « en colonnes », dans les protocoles des classes de Cagliari, selon les algorithmes habituels.

Dans le champ conceptuel de l'addition, les deux opérations « addition » et « soustraction » sont placées sur un même plan. Chronologiquement, pour passer de 42 à 51, il s'agit bien d'une addition de 9 (transformation « + 9 »). La recherche du nombre inconnu à partir des données 42 et 51 ($41 + ? = 51$) se fait formellement par la soustraction $51 - 42 = 9$. La question est de savoir si, dans un cas simple comme celui-ci où le « 9 » peut se trouver mentalement, sans opération écrite, il faut absolument exiger des élèves qu'ils effectuent une soustraction par écrit au moyen d'un algorithme en colonnes ? Dans une perspective socio-constructiviste, on aurait tendance à laisser la responsabilité du choix de l'opération à l'élève ; dans un enseignement qui s'appuie sur une construction linéaire des savoirs, « brique par brique », on fait entraîner la procédure « experte » dès le moment où elle peut être utilisée. Il s'agit d'une question de didactique dont les réponses diffèrent d'un pays à l'autre, d'une région à l'autre, ou même d'un maître à l'autre, selon ses conceptions de l'apprentissage.

2. COURSE D'OBSTACLES

(Cat. 3 : M = 2,00 ; Cat. 4 : M = 2.94)

Ce problème demande de savoir remonter dans le temps, selon les jours de la semaine, et d'effectuer simultanément une série de divisions par 2 : comprendre que si la course a lieu un dimanche, le jour du dernier entraînement est un samedi, prendre la moitié de 80 pour déterminer les 40 obstacles du vendredi, les 20 du jeudi, et ainsi de suite. À ce moment, il faut encore prendre en compte une donnée de l'énoncé : le nombre « impair » d'obstacles permettant de dire que c'est le mardi que Mario a commencé à s'entraîner car il a sauté 5 obstacles ce jour-là. C'est beaucoup pour des élèves de 3e année, ce qui explique le résultat moyen. C'est plus facile en 4e année, où les élèves sont capables de maîtriser simultanément toutes les relations nécessaires ainsi que la lecture du texte.

Lors de l'élaboration du problème, la contrainte de l'énoncé : « un nombre impair d'obstacles », ne s'est pas imposée d'office face à la première version qui mentionnait seulement « un certain nombre d'obstacles ». Il paraissait implicite à de nombreux lecteurs que, puisque la moitié de 5 n'est pas un nombre naturel, on s'arrête à ce moment. Il a fallu préciser que, si l'on

n'exprimait pas clairement l'idée qu'il fallait aller le plus loin possible dans le compte à rebours, les solutions « mercredi 10 sauts ou « jeudi, 20 sauts » auraient aussi été acceptables. Ceci montre la force des habitudes ou des non-dits dans la rédaction des énoncés.

À la suite de cette rectification, on ouvrait une voie pour une stratégie non prévue initialement, mais que plusieurs classes ont utilisé. Elles ont procédé par essais successifs, à partir des nombres impairs 1, 3, 5, ... comme dans l'exemple suivant :

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, non
 3, 6, 12, 24, 48, 96, non
 5 mardi, 10 mercredi, 20 jeudi, 40 vendredi,
 80 samedi, oui.

Pour ce problème, les moyennes des classes de Cagliari et de Belluno (Cat. 3 : $M = 2,8$; Cat. 4 : $M = 3,6$), sont significativement plus élevées que celles de Suisse romande. Cette différence est vraisemblablement due aux programmes scolaires. En effet, la division et les nombres impairs sont étudiés beaucoup plus tard en Suisse romande qu'en Italie.

3. LE COUVRE-LIT DE GRAND-MÈRE

(Cat. 3 : $M = 1,81$; Cat. 4 : $M = 3,10$)

Un premier énoncé de ce problème faisait état de deux rangs de carrés dans chaque sens mais sans préciser qu'il s'agissait des bords :

« ... Il y a 22 carrés dans la longueur et 15 carrés dans la largeur.

Les carrés bleus forment quatre lignes qui traversent toute la couverture : deux dans le sens de la longueur et deux autres dans le sens de la largeur.

Les carrés qui ne sont pas dans ces quatre lignes sont rouges ... »

Lors de la consultation, plusieurs sections ont trouvé cette version trop difficile pour des élèves de 3^e année et ont demandé de placer les carrés sur les bords pour la version définitive. Le dénombrement des carrés bleus, et rouges, a en effet été laborieux pour certaines

classes de catégorie 3, dans les régions où la multiplication n'est encore qu'abordée à ce degré.

Selon l'analyse de la tâche, les élèves pouvaient procéder par dessin et comptage des carrés rouges, ce qui ne s'est produit que quelquefois, en 3^e année. Ils pouvaient aussi calculer le nombre total de carrés, par $22 \times 15 = 330$ et soustraire les carrés bleus par un calcul plus délicat, ce qu'un tiers des classes a fait. Mais, plus simplement, avec la version finale de l'énoncé, ils pouvaient constater que les carrés rouges forment un rectangle de 20 par 13 et que le nombre de carrés rouges était $13 \times 20 = 260$.

Cette procédure a été choisie par la moitié des classes, en général accompagnée d'un dessin et, souvent, du calcul du nombre total de carrés et des carrés bleus. Exemple d'une classe de troisième qui a procédé par la soustraction, délicate, des carrés bleus et a compté deux fois les carrés des angles :

$$22 \times 15 = 330, 15 \times 2 = 30, 22 \times 2 = 44, \\ 30 + 44 = 74, 330 - 74 = 256)^3$$

(Trad.) *Raisonnement* : En premier, nous avons trouvé l'aire puis nous avons trouvé le bord en multipliant le nombre des carrés de chaque côté par 2, puis en additionnant les résultats des 2 opérations nous avons trouvé combien il y a de carrés dans le bord. Enfin nous avons enlevé de l'aire le nombre de carrés du bord et trouvé le nombre de carrés rouges.

Exemple de la dernière procédure mentionnée, avec de nombreux calculs non nécessaires mais vraisemblablement comme preuve (classe de troisième) :

(Trad.) *Réponse* : Nous avons dessiné la couverture en tenant compte des mesures que l'énoncé donne et en comptant les carrés qui se trouvent au centre de la couverture.

Opérations : $13 \times 20 = 260$ nombre des carrés rouges, $22 \times 15 = 330^* - 70 = 260$

(* écrit à côté de 330 : nombre des carrés de toute la couverture)

3. Opérations en colonnes, Voir note 2 précédente

(Sur le dessin de la couverture, les carrés bleus du bord sont tous numérotés, de 1 à 69, avec trois erreurs: absence du 8 sur le premier côté et répétition du 36 et 37 au passage du sommet opposé au départ.)

Exemple d'une procédure très complète d'une classe de quatrième:

$$\begin{array}{ll} a \ (22 \times 15) = 330 & b \ (13 \times 20) = 260 \\ c \ (330 - 260) = 70 & d \ (15 + 15 + 20 + 20) = 70 \end{array}$$

(C'est la seule copie où les opérations « en colonnes », sont précédées d'une écriture « en ligne, avec parenthèses. »)

(Trad.) Raisonement: *Nous avons dessiné la couverture comme c'est écrit dans l'énoncé. Nous l'avons coloriée en bleu et en rouge. Nous avons compté les carrés bleus et nous avons fait trois opérations mathématiques.*

(Les carrés bleus sont numérotés sur le dessin, de 1 à 15 sur les deux côtés de la largeur, de 1 à 20 sur les deux longueurs restantes)

Comme prévu lors de la demande de simplification de l'énoncé, l'influence des programmes semble déterminante sur la réussite. En Suisse romande, la réussite passe de 1,81 en 3e année, où la multiplication n'est qu'abordée, à 3,10 en 4e année, où elle devient plus instrumentale. (Les correcteurs romands relèvent que sur les 16 classes de 3e, 7 classes ont « 0 points » et 4 classes ont « 4 points » alors qu'en 4e, aucune classe n'a « 0 points » et 23 classes sur 37 ont « 4 points ». Ils n'ont pas attribué le maximum de points aux procédures par comptage seul). Les classes italiennes, qui étudient la multiplication, par le modèle de l'aire du rectangle, et son algorithme beaucoup plus tôt arrivent déjà à une réussite, pour les sections de Cagliari et Belluno de plus de 3,1 en 3e (ils ont attribué « 4 points » à la procédure par dessin et comptage) et de 3,75 en 4e.

4. PUZZLES CARRÉS

(Cat. 3: M = 0,46; Cat. 4: M = 1,03; Cat. 5: M = 1,02)

Ce problème était inspiré de « Pièces en trop », de la finale du 10e RMT, moyennement réussi par les classes de 3e et mieux réussi par celles de 4e:

Aurélie a formé un carré avec les cinq pièces de son puzzle.

Malheureusement, son petit frère Théo a mélangé certaines pièces et il a encore ajouté une sixième pièce, venant d'un autre puzzle.

Voici les cinq pièces du puzzle et la pièce ajoutée:



Indiquez la pièce que Théo a ajoutée et reconstituez le puzzle carré d'Aurélie avec les cinq autres pièces. Comment avez-vous fait pour trouver la pièce en trop ?

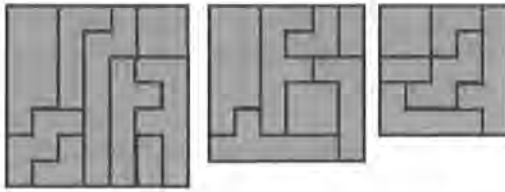
La plupart des classes avaient alors reconstitué le puzzle après découpages des pièces, mais quelques-unes seulement avaient pu justifier que la pièce en trop était l'une des deux de 6 carrés (différence entre l'aire totale des pièces, 31, et l'aire d'un puzzle de 5×5 : 25).

L'ambition était, pour le problème de « Puzzles carrés », de voir si les élèves étaient en mesure de passer du registre géométrique au registre numérique par certaines considérations sur les nombres de carrés des pièces.

L'analyse de la tâche prévoyait ceci:

- Découper les pièces ou les reproduire.
- Chercher à construire les puzzles demandés par manipulation des pièces, éventuellement après avoir vérifié numériquement que la solution est possible.
- Se rendre compte qu'il n'est pas possible de construire le carré 3×3 (si l'on part du carré 2×2 on ne peut le compléter par les pièces à disposition ou, en cherchant des pièces dont la somme des aires est 9, on n'en trouve pas qui permettent de réaliser un carré de 3×3). Pour le carré de 4×4 , il n'y a que les cinq « plus petites » pièces qui conviennent, dont la somme des aires est 19 (en carreaux). Il faudrait donc ne pas utiliser celle de 3 carreaux et l'on constate après quelques essais que la construction n'est pas possible.

- Dessiner une solution pour, 5 x 5 et 6 x 6 et 7 x 7, par exemple :



Selon les expériences de plusieurs régions, la correction a été très difficile. On ne trouve presque pas de « 4 points » et plus de la moitié des classes obtiennent « 0 point ».

La seule stratégie utilisée (et aussi prévue) a été le découpage des pièces et le réassemblage par essais successifs. Mais cette procédure prend du temps et n'est pas très précise, surtout en cas de collage, où il y a des superpositions et, parfois, des « trous ».

En incluant un quadrillage sur la feuille-réponse ou en augmentant la dimension des 9 pièces, en améliorant la qualité des photocopies pour que le quadrillage des neuf pièces apparaisse clairement, on aurait sensiblement facilité la tâche des élèves⁴.

Une seule classe romande, de 5e, a explicitement dit ne pas avoir essayé avec 8, 9 et 10 car « il n'y a que 49 petits carreaux dans les pièces et $7 \times 7 = 49$. »

Voici les critères d'attribution des points, retenus par la section de Suisse romande :

- 4 Trois carrés dessinés précisément (un de 5 x 5 un de 6 x 6 et un de 7 x 7), il y a plusieurs arrangements pour chaque taille de carré, un suffit)
- 3 Deux carrés dessinés
- 2 Un seul carré dessiné
- 1 Quelques tentatives non abouties, ou réponse « le 3 et le 4 sont impossibles », ou formation de carrés en

4. Le cas s'est effectivement présenté pour plusieurs écoles d'une section où les maîtres avaient copié le problème sur papier quadrillé de maille 1 cm x 1 cm. La réussite de leurs classes (plus de 2 points en moyenne) a été très nettement supérieure à celles des autres (moins de 1 point en moyenne), ce qui a posé un grave problème d'équité pour le classement.

- 0 Incompréhension du problème (réponse du style « on a cherché mais on n'a pas trouvé », « c'est impossible », solutions rectangulaires, ...)

En conclusion, par rapport au problème « Pièces en trop » de l'an dernier, les dimensions des carrés et le nombre de pièces ont augmenté, les questions se sont multipliées, les pièces étaient plus petites. Tout cela a contribué à faire de « Puzzles carrés » un problème inadapte aux classes de 3e à 5e, comme en témoignent les résultats. L'analyse a priori a évidemment sous-estimé les difficultés de dessin et la durée de la recherche.

5. À TABLE, AVEC MARTHE ET SES AMIS

(Cat. 3: M = 0,56; Cat. 4: M = 1,89; Cat. 5: M = 2,36)

On touche ici aux positions relatives, en géométrie.

Les élèves devaient comprendre que la table est rectangulaire et placer Marthe et Angélique aux deux bouts, puis, se rendre compte que, sur chaque long côté de la table, il y a de la place pour trois enfants.

Georges étant déjà placé à gauche de Marthe, en tenant compte que les garçons et les filles doivent être alternés, Aldo ne peut être qu'à la droite de Marthe (car il ne peut être à côté d'Angélique).

Dans la suite des enchaînements logiques, les élèves devaient encore comprendre qu'il n'y a que Lucie qui peut être assise à côté d'Aldo (Anne ne peut y être). Finalement, ils devaient constater que Martin ou Gabriel (2 possibilités) sont à côté de Lucie, puis compléter l'autre côté avec les enfants qui restent :

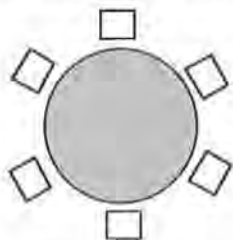
| | | | |
|--------|---------|-------|-----------|
| | Georges | Anne | Gabriel |
| Marthe | | | Angélique |
| | Aldo | Lucie | Martin |

| | | | |
|--------|---------|-------|-----------|
| | Georges | Anne | Martin |
| Marthe | | | Angélique |
| | Aldo | Lucie | Gabriel |

Un problème tout à fait analogue avait déjà été posé dans un des premiers rallyes, et mieux réussi (Cat. 3: $M \approx 1,7$; Cat. 4: $M \approx 1,9$; Cat. 5: $M \approx 2,9$ en résultats convertis, d'une échelle de 0 à 3 points à l'échelle actuelle de 0 à 4 points):

Rencontre internationale

Six chefs d'état, Australie, Belgique, Chine, Danemark, Estonie et France sont assis autour d'une table ronde. L'Australien n'est pas à côté du Belge ni du Chinois, le Belge est en face du Danois, l'Estonien est à la gauche de l'Australien, le Français n'est pas en face de l'Australien.



**Disposez ces six chefs d'état autour de la table.
Comment avez-vous fait pour trouver ?**

Il n'y avait qu'une solution et 6 personnages au lieu de 8, mais surtout, la table était ronde, et dessinée. Les correcteurs ont remarqué que dans le problème « A table, avec Marthe... » de nombreuses classes ont proposé quatre solutions: les deux ci-dessus et leurs symétriques, car une table rectangulaire dessinée horizontalement avec Angélique à gauche et Marthe à droite (du côté de la fenêtre comme l'a dit un groupe) représente une disposition différente de celles qui sont proposées ci-dessus. (Le barème d'attribution des points acceptait cette manière de voir). Pour la table ronde, ce problème ne s'était pas présenté, les élèves n'avaient pas « latéralisé » les dispositions car il n'y a pas de bouts de table.

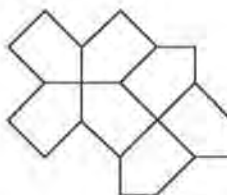
Une autre difficulté de la table rectangulaire est, pour les élèves de 3e année, le fait que les positions relatives ne sont pas du même genre lorsqu'on est sur un côté ou à une extrémité. Celui qui est au milieu d'un côté est vraiment « entre » ses deux voisins (sur un même segment) alors que celui qui est à un bout est « décalé » par rapport à ses deux voisins (avec lesquels il forme les sommets d'un triangle).

Les correcteurs ont aussi constaté des confusions de sexe à propos des prénoms de Marthe et d'Aldo.

Donc, ici comme pour le problème précédent, un petit changement d'énoncé (variables didactiques: nombre et forme de la table) peut produire des obstacles nouveaux dans la résolution.

6. DÉCOUPAGE (Cat. 4: $M = 2,70$; Cat. 5: $M = 2,80$)

Ce partage d'une figure en parties isométriques n'a pas posé de difficultés aux classes, qui ont parfaitement compris que la figure doit être partagée en 7 parties « égales » (isométriques) et qui ont procédé par essais pour trouver la solution:



7. L'ÉNIGME DE MERLIN L'ENCHANTEUR

(Cat. 4: $M = 2,02$; Cat. 5: $M = 2,31$; Cat. 6: $M = 2,77$)

Il s'agit ici de rechercher tous les triplets de nombres dont le produit est 36 ou tous les triplets dont la somme est 13. L'analyse de la tâche prévoyait que les élèves pouvaient:

- procéder de manière systématique, par exemple, à partir de la décomposition multiplicative de 36, et trouver les triplets suivants: (1; 1; 36), (1; 2; 18), (1; 3; 12), (1; 4; 9), (1; 6; 6), (2; 2; 9), (2; 3; 6), (3; 3; 4) et éliminer ceux dont la somme est différente de 13 pour ne conserver que (1; 6; 6) et (2; 2; 9). En conclure que le triplet qui détermine l'âge des fils du serrurier est (2; 2; 9) à cause de la dernière information faisant état de l'existence d'un fils aimé; ou, en commençant par les sommes, déterminer de manière systématique les triplets dont la somme est 13 et aboutir à la même conclusion que précédemment.
- Rechercher au hasard des triplets de nombres et

trouver les âges de 2, 2 et 9, sans pouvoir certifier que c'est la seule solution.

Les inventaires systématiques de l'analyse de la tâche sont apparus très rarement, et de manière la plus souvent incomplète. La grande majorité des classes ont trouvé le triplet (2 ; 2 ; 9) après quelques essais, « par chance » le plus souvent, mais elles n'ont obtenu que « 3 points ». Les « 4 points » étaient réservés aux réponses faisant apparaître l'unicité de la solution. Pour cela, il fallait envisager aussi le triplet (1 ; 6 ; 6) et le rejeter, comme l'ont fait certaines classes.

Dans le cas où les deux triplets étaient donnés comme réponse possible, les correcteurs romands l'ont acceptée pour les deux raisons suivantes : on peut envisager un enfant né en janvier, l'autre en décembre, (selon la réponse d'une classe de 4P) et les jumeaux peuvent être fille et garçon, donc l'aîné peut exister, (également proposé par une classe).

Mais plusieurs classes romandes, comme à Cagliari, ont écarté la solution (1 ; 6 ; 6) trouvée mathématiquement par avec des justifications pertinentes du genre :

- *C'est impossible car c'est des jumeaux et il n'y a pas d'aîné.*
- (Trad.) *Nous avons aussi trouvé une possibilité $6 + 6 + 1 = 13$, $6 \times 6 \times 1 = 36$. Nous l'avons écartée parce que le fils majeur doit être le seul et avoir, dans ce cas, 6 ans.*
- (Trad.) *$6 \times 6 \times 1 = 36$, il n'y a pas de fils majeur.*

Cette énigme était largement inspirée du 3e problème de la finale du 10 RMT :

3. Bonbons aux fruits (Cat. 3, 4)

Il y a trois sortes de bonbons dans le paquet de Grand-mère : à l'orange, au citron et à la fraise.

- *Il y a un nombre impair de bonbons dans le paquet.*
- *Les bonbons à la fraise sont les plus nombreux.*
- *Le nombre des bonbons à l'orange est le même que celui des bonbons au citron.*

— *Le produit des trois nombres est 36.*

Combien y a-t-il de bonbons de chaque sorte dans le paquet de Grand-mère ?

Même pour des finalistes, ce problème s'était révélé trop difficile en raison de l'incompréhension de la phrase : *Le produit des trois nombres est 36*. Les concepteurs des problèmes du 11e RMT ont donc renoncé à proposer « L'énigme de Merlin » en catégorie 3 et ont remplacé la phrase difficile par : lorsqu'on les multiplie, on obtient 36. Avec cette version simplifiée, on rencontre cependant encore, dans les réponses, des triplets du genre (3 ; 6 ; 6), (2 ; 9 ; 9), (18 ; 18 ; 1) ... conçus par certains élèves comme des triplets dont le produit est 36 car, disent-ils : $3 \times 12 = 36$, $2 \times 18 = 38$, $36 \times 1 = 36$.

Il y a, derrière ces confusions, toutes les difficultés, souvent sous-estimées, des produits de plus de deux facteurs. Il s'agit là de faire intervenir une propriété extrêmement délicate : l'associativité de la multiplication qui crée encore de sérieux obstacles à l'école secondaire, en calcul littéral en particulier.

8. LA PARTIE DE DÉS

(Cat. 5 : M = 1,50 ; Cat. 6 : M = 2,50)

Après quelques essais, les élèves se sont convaincus que Jimmy doit gagner avec les plus grands écarts possibles, de 5 (le maximum) ou de 4, et perdre avec des écarts petits, de 1 (le minimum) ou de 2.

L'inventaire des différentes possibilités est le suivant :

si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 5, les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 2 et l'on a alors des scores de $6 - 1$, $6 - 1$ contre, par exemple $(1 - 2)$, $(1 - 3)$ et $(1 - 2)$

si les écarts en faveur de Jimmy sont 5 et 4, les écarts en faveur de Pauline sont 1, 1 et 1 et l'on obtient les scores de $(6 - 1)$ et $(5 - 1)$ contre les trois scores : $(2 - 1)$, $(2 - 1)$, $(2 - 1)$

Dans plusieurs cas, les essais ont été organisés en tableaux des résultats de 5 lignes (une par partie) et de 2 colonnes (une par joueur).

Pour obtenir le maximum de points, il fallait donner les deux possibilités « (6 – 1), (6 – 1) pour Jimmy, (2 – 1), (2 – 1), (3 – 1) pour Pauline et (6 – 1), (5 – 1) pour Jimmy, (2 – 1), (2 – 1), (2 – 1) pour Pauline », avec description de la démarche et vérification. Les deux possibilités, sans explications sur la démarche avec seulement une vérification, ou une seule possibilité bien expliquée ne donnaient que 3 points. On relève une nette progression de la réussite de la 5e à la 6e année.

9. L'ALBUM DE PHOTOS

(Cat. 5: M = 2,24; Cat. 6: M = 3,00)

Il s'agit d'une variation sur un thème bien connu du RMT consistant à résoudre sans algèbre un « système de deux équations à deux inconnues ». La majorité des groupes ont suivi l'une ou l'autre des procédures prévues a priori par l'analyse de la tâche:

- Comprendre que toutes les pages doivent contenir au moins 2 photos (ce qui fait qu'il y a au moins $58 = 2 \times 29$ photos).
- Comprendre qu'il faut retirer du nombre total des photos le nombre (58) de celles qui sont utilisées pour remplir les 29 pages avec 2 photos ($80 - 58 = 22$) pour trouver le reste, qui, divisé par 2 donnera le nombre (11) de pages avec 4 photos. En déduire que le nombre de pages avec 2 photos est 18 ($29 - 11 = 18$).
- Ou déterminer des nombres cherchés par essais (simple liste des essais successifs, essais progressifs en forme de tableau... jusqu'à une préfiguration de l'équation « experte » $4x + 2(29 - x) = 80$).

D'autres ont cependant trouvé des stratégies non prévues comme :

- $29 \times 4 = 116$; $116 - 80 = 36$; $36 : 2 = 18$;
 $80 - 36 = 44$; $44 : 4 = 11$; et $44 + 36 = 80$, c'est-à-dire: faire l'hypothèse que toutes les pages ont 4 photos, constater qu'il y en aurait 36 de trop – soit 18 pages à 2 photos – puis trouver qu'il y a 44 photos sur les pages à 4 photos, c'est-à-dire sur 11 pages, avec une vérification du total des photos.

- dessin de 29 rectangles représentant les pages, puis de 2 petits carrés dans chaque rectangle représentant les photos et, par complément à 80, dessin de 2 petits carrés supplémentaires dans les 11 premiers rectangles, avec explications claires de la démarche.

Ces procédures ne sont certainement pas les plus simples, mais elles sont rigoureuses et efficaces dans le cas de ce problème. Elles méritent donc pleinement les « 4 points » des critères d'attribution: « Réponses justes (11 et 18) avec justification ». Les classes, nombreuses, qui ont trouvé la réponse juste mais qui se sont contentées de la vérifier, sans expliquer comment ils y étaient arrivés ont été créditées de « 3 points ».

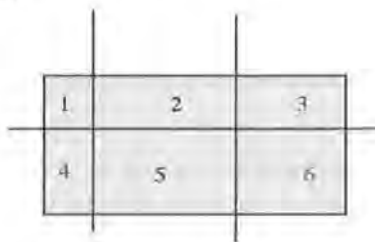
10. DES RECTANGLES, ENCORE DES RECTANGLES

(Cat. 5: M = 1,54; Cat. 6: M = 2,00, Cat. 7: M = 3,26)

Il s'agit ici d'un inventaire « classique » dans les problèmes de concours, mais original toutefois, du fait que les élèves doivent placer eux-mêmes les droites avant de compter les rectangles de manière rigoureuse.

La grande majorité des classes a compris que les trois droites doivent être parallèles à un côté ou à l'autre du rectangle initial, mais pas les trois au même côté, parce que, dans ce cas on n'obtient pas le maximum de rectangles.

C'est au moment de déterminer les différentes catégories de rectangles et de dénombrer les rectangles de chacune d'entre elles que la tâche s'est révélée plus délicate :



Les 18 rectangles

seuls: 1; 2; 3; 4; 5 et 6;

par deux: 1-2; 2-3; 4-5; 5-6; 1-4; 2-5 et 3-6;

par trois: 1-2-3 et 4-5-6;

par quatre: 1-2-4-5 et 2-3-5-6;

l'ensemble: 1-2-3-4-5-6

En 5e, une majorité de classes n'a vu que les 6 rectangles de la partition, elles n'ont reçu qu'un seul point. Les « 4 points » correspondant aux 18 triangles deviennent nombreux en 6e, et majoritaires en 7e année.

11. LES CARTES DE COULEUR

(Cat. 6: M = 2,00, Cat. 7: M = 3,56)

La deuxième figure à partager, par rapport au problème 8, n'a pas posé trop de problèmes. C'est plutôt la consigne qui n'a pas semblé très claire dans ce cas où il y a deux figures en jeu.

12. QUATRE À QUATRE

(Cat. 6: M = 2,83; Cat. 7: M = 3,20 Cat. 8: M = 2,88)

De nombreuses classes indiquent TOUS leurs calculs d'une manière peu conventionnelle. Ceci provient peut-être de l'usage de la calculatrice qui gère les priorités des opérations sans les parenthèses. En effet, en tapant « $4 + 4 : 4 + 4 =$ » certaines machines affichent 9 c'est-à-dire $4 + (4 : 4) + 4$ d'autres 6 à savoir $((4 + 4) : 4) + 4$. Enfin certains élèves écrivent $4 \times 4 = 16 - 4 = 12 : 4 = 3$ (succession des touches pressées et des résultats affichés à l'écran). Dans les attributions des points du RMT, la recherche prévaut sur la présentation des résultats. Les correcteurs de Suisse romande ont donc décidé de ne pas pénaliser ces entorses à « l'orthographe » mathématique.

La correction était rendue d'autant plus délicate que 2 réponses figuraient déjà dans les exemples, sur les 7 nombres impairs qu'on peut exprimer avec 4 « 4 ».

L'attribution des points de Suisse romande est la suivante :

- 4 Réponse complète (les 7 nombres 1, 3, 5, 7, 9, 15, 17) avec détails des calculs (16 classes de 6e, 15 de 7e et 11 de 8e)
ou les 5 nombres impairs autres que les exemples avec détails des calculs. (2 classes de 6e et 2 de 7e)
- 3 Réponse complète avec le détail des calculs, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés

conduisant au même nombre impair (doublons).
(2 classes de 6e et 2 de 8e)

ou les 5 nombres impairs autres que les exemples, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés conduisant au même nombre impair (doublons).

(3 classes de 6e et 2 de 7e)

ou 4 nombres impairs différents des exemples, avec détails des calculs (17 classes de 6e, 5 de 7e et 3 de 8e)

- 2 4 nombres impairs différents des exemples avec détail des calculs, mais avec d'autres nombres qui ne respectent pas les consignes ou avec plusieurs calculs présentés conduisant au même nombre impair. (4 classes de 6e, 1 de 7e et 2 de 8e)
ou 2 à 3 nombres impairs différents des exemples avec erreurs et doublons ou sans erreur (10 classes de 6e, 4 de 7e et 4 de 8e)
- 1 1 nombre trouvé (différent des exemples) avec ou sans erreurs ajoutées (3 classes de 6e)
ou plusieurs nombres trouvés mais nombreuses réponses fausses laissant supposer une incompréhension du problème (1 classes de 6e et 1 de 8e)
- 0 Incompréhension du problème (2 classes de 6e, 2 de 7e et 3 de 8e)

Malgré l'attention portée aux critères d'attribution des points lors de l'analyse a priori, il y a toujours des imprévus et, par conséquent, des débats délicats entre les correcteurs. C'est le prix à payer pour la crédibilité des résultats des épreuves du RMT et de leur valeur pédagogique. D'autres compétitions procèdent plus simplement, par dichotomie entre réponses « entièrement justes » et les autres, sans relever toutes les erreurs ou réponses partielles.

13. UN QUOTIDIEN

(Cat. 6: M = 2,59; Cat. 7: M = 3,03; Cat. 8: M = 3,00)

Analyse de la tâche :

- Découvrir que les 11 pages consacrées au sport n'ont pas d'influence sur la solution du problème.

- Observer, sur un journal ouvert ou sur un modèle, les paginations des feuilles lorsqu'elles sont séparées: (pages impaires à droite, « sauts » de 2 en 2 d'une feuille à l'autre...). En déduire que le recto de la feuille « 20 et 45 » est suivi du recto des feuilles « 18 et 47 »; « 16 et 49 », « 14 et 51 » jusqu'à « 2 et 63 ». Découvrir qu'au verso de cette dernière feuille, on a les pages 1 et 64 et que, par conséquent, le quotidien a 64 pages.
- Ou découvrir, toujours par des observations, que dans un quotidien ou une revue, la somme des deux numéros de page disposés sur le même côté d'une feuille est constante et vaut un de plus que le nombre de pages de la revue. Dans le cas présent: $20 + 45 - 1 = 64$.
- Ou calculer le nombre des pages intérieures qui précèdent la feuille indiquée, de 21 à 44, c'est-à-dire 24 pages, et calculer le nombre des autres pages, jusqu'à 20 y compris et dès 45 y compris, c'est-à-dire $40 = 20 \times 2$ et finalement faire la somme pour arriver au nombre total de pages: $24 + 40 = 64$.
- Ou observer qu'il y a 19 pages qui précèdent la page 20 et, par conséquent, 19 pages aussi qui suivent la page 45 et donc que le nombre total des pages du journal est $45 + 19 = 64$.

Voici les commentaires des correcteurs des classes romandes:

1. Le taux de réussite totale (« 4 points ») varie peu d'un niveau à l'autre: 48% en 6e et 7e, 51% en 8e.
2. La majorité des classes (46 au total) ayant réussi utilisent la résolution de la pagination, avec presque toujours la liste complète des pages d'un feuillet jusqu'à 1 – 64 et souvent également jusqu'à 32 – 33.
3. Seules 14 classes (dont 10 de 6e, 3 de 7e et 1 de 8e) utilisent une résolution basée sur le nombre de pages ($45 + 19$ ou plus rarement $20 + 24 + 20$). Il est étonnant de constater que cette résolution est plus prisée en 6e! 4. Seules 5 classes (4 en 6e et 1 en 7e) se laissent abuser par les 11 pages de sport. À noter: la quasi-totalité des classes ayant réussi le problème passe sous silence la non-influence de ces 11 pages!

14. LE NOMBRE AMPUTÉ

(Cat. 7: M = 1,10; Cat. 8: M = 1,33)

Ce problème s'est révélé très difficile et a déconcerté les élèves. Les calculs eux-mêmes ne sont pas compliqués, mais c'est l'appropriation qui présente des obstacles et, surtout, les connaissances de notre système de numération qui ne sont pas disponibles. On s'en rend compte à la lecture de l'analyse de la tâche:

- Observer le nombre donné et comprendre qu'il a $9 + (41 \times 2) = 91$ chiffres ou l'écrire complètement (ce que de nombreuses classes ont fait). Comprendre ensuite que le problème consiste à choisir les 70 chiffres à biffer, pour n'en conserver que 21.
- Se rendre compte que, parmi les nombres de 21 chiffres, le plus grand est composé de chiffres « 9 » uniquement, mais que, dans le cas présent, il faut se contenter de celui qui a le plus grand nombre possible de chiffres « 9 » au début (ce qui n'a pas été perçu par la grande majorité des classes).
- Comprendre alors qu'il faut biffer successivement les 8 premiers chiffres, laisser le « 9 », biffer la suite des chiffres « 10111213...1617181 » (il y en a 19) et conserver le « 9 » (de « 19 »), biffer la suite des chiffres « 021222324...27282 » (il y en a de nouveau 19) et conserver le « 9 » (de « 29 »), etc.
- Calculer que, en atteignant le « 9 » de « 39 », on a déjà biffé $8 + (3 \times 19) = 65$ chiffres et qu'il n'en reste plus que 5 à biffer, ce qui ne permet pas d'aller jusqu'au « 9 » de « 49 ». Il reste maintenant le nombre 9999404142434445...
- Comprendre que Génia a trouvé sa solution en biffant encore les quatre chiffres « 0 », « 1 », « 2 », « 3 » — dont la valeur est inférieure à 4 — qui apparaissent après la séquence « 9999 » et l'un des chiffres « 4 » qui se présente après cette séquence.
- Noter le nombre amputé le plus grand possible: 99994444454647484950.

L'incompréhension d'un problème de ce genre est générale. Les taux de réussite sont encore significativement

plus bas dans les autres sections qu'en Suisse romande. Il semble que, dans les programmes scolaires de tous les pays, la numération et ses principes sont considérés comme « acquis » lors des premières années de l'école primaire et qu'on ne s'y intéresse plus du tout au-delà. Cette constatation rejoint celles qui concernent les problèmes des épreuves précédentes sur le même thème, par exemple « Le vieux compteur » (problèmes 3 et 9 de l'épreuve I du 11e RMT, commentés dans *Math-Ecole* 206), « La chasse aux trois » (problème 3 de l'épreuve I du 10e RMT, commenté dans *Math-Ecole* 201)... Il paraîtrait judicieux de laisser la numération à l'étude tout au long de la scolarité pour renforcer les connaissances bien superficielles que les élèves ont de notre système de base dix.

15. LES VACANCES

(Cat. 7: M = 2,33, Cat. 8: M = 2,85)

En italien, les noms des frères étaient « Monti », « Collina » et « Prati » – qui n'ont pas pu être traduits littéralement par « Desmontagnes », « Descollines » et « Delaprairie ». Cette suggestion topographique nous a valu une belle réponse, d'une classe italienne:

*I fratelli Monti sono andati in vacanza in Grecia.
Per risolvere questo problema ci siamo affidati alla cartina fisica dell'Europa.
Dalla nostra ricerca è risultato che in Inghilterra c'è maggioranza di pianure, in Germania prevalgono le colline e in Grecia vi sono soprattutto monti con una bassa percentuale di colline,
Quindi: Inghilterra: 2 Prati, Germania: 1 Collina;
Grecia: 2 Monti + 1 Collina'*

(Trad. Les frères Dumont sont allés en vacances en Grèce.
Pour résoudre ce problème, nous nous sommes référés à la carte de géographie physique de l'Europe.
D'après nos recherches, il s'avère que l'Angleterre est en majorité composée de plaines, en Allemagne ce sont les collines qui sont les plus nombreuses, alors qu'en Grèce il y a surtout des montagnes, avec un faible pourcentage de collines. Donc, en Angleterre: les 2 « Delaprairie », en Allemagne: 1 « Descollines », en Grèce: 2 « Desmontagnes » et 1 « Descollines ».)

Au-delà de cette anecdote on peut relever la bonne réussite des classes de Suisse romande qui ont su analyser chacune des phrases, émettre des hypothèses et éliminer celles qui étaient contredites par d'autres affirmations de l'énoncé, selon l'analyse de la tâche:

- Analyser chacune des phrases sachant qu'une donnée est exacte et l'autre fausse. Si on suppose que dans la première phrase, la première information est exacte, sur les frères Dumont, la seconde est fausse, sur les frères Dubois. L'hypothèse serait alors: « Les Dumont sont allés en Angleterre, les Dubois ne sont pas allés en Grèce ». Dans ce cas, les informations de la seconde phrase seraient les deux fausses, parce qu'un des Dumont ne pourrait être allé en Allemagne et les deux Dubois en Angleterre.

Il faut donc changer d'hypothèse dans la première phrase et considérer comme vraie l'information sur les frères Dubois (les deux en Grèce) et fausse celle qui concerne les frères Dumont. Dans la deuxième phrase, l'information sur les Dubois est donc fausse et celle disant qu'un des frères Dumont est allé en Allemagne est vraie.

Dans la troisième phrase, l'information sur les frères Dumont est alors fausse et celle qui concerne les frères Dupré vraie (l'un en Angleterre et l'autre en Grèce) est vraie.

À ce point, il ne manque que l'autre frère qui est allé en Angleterre. Par exclusion, on en déduit que c'est un des frères Dumont.

Certes, les « 4 points: réponse exacte (l'un en Angleterre et l'autre en Allemagne) avec explications claires et correctes » ne sont pas majoritaires car la rigueur des déductions logiques n'est pas toujours suffisante, mais la solution juste est presque toujours présente.

16. LE TERRAIN DU PÈRE FRANÇOIS

(Cat. 7: M = 1,12; Cat. 8: M = 1,33)

L'analyse de la tâche prévoyait des méthodes générales (algébriques) de résolution ou des stratégies s'appuyant sur des exemples numériques:

- Comprendre que les deux clôtures (deux segments) sont disposées de façon que les trois parties ainsi formées soient équivalentes, c'est-à-dire que leur aire soit le tiers de l'aire du rectangle.

- Désigner par a et b les dimensions du rectangle (respectivement base et hauteur ou vice-versa), exprimer l'aire (ab) et calculer l'aire que doit avoir chaque partie : $(ab)/3$

Comprendre que b est un côté du triangle ADF et a un côté du triangle ABE.

$$\text{Calculer } DF = 2\left(\frac{ab}{3}\right) : b = \frac{2}{3} a \text{ et } EB = 2\left(\frac{ab}{3}\right) : a = \frac{2}{3} b$$

et conclure que le point E doit être à une distance $2/3b$ du sommet B et le point F à une distance $2/3a$ du sommet D.

- Ou mesurer les dimensions du rectangle de la figure, à la règle (cm.7,8 et cm.3,6) et en calculer l'aire (28,08), puis l'aire de chaque partie (9,36); calculer la mesure de BE ($18,72 : 7,8 = 2,4$) et la mesure de DF ($18,72 : 3,6 = 5,2$), et placer ensuite les segments.

- Ou choisir pour le rectangle des mesures hypothétiques (par exemple: dimensions 15 et 6), faire un dessin sur papier quadrillé ou un schéma et les calculs correspondants comme précédemment, pour en conclure que les points E et F sont aux deux tiers des côtés correspondants, à partir de B et de D respectivement.

Mais il faut bien l'avouer, même si la formule de l'aire du triangle est bien connue en 7e et 8e, elle reste limitée aux problèmes « d'application directe » où la figure est donnée et il ne reste qu'à mesurer et appliquer l'algorithme de calcul « base fois hauteur, divisé par 2 ».

17. LA PINÈDE (Cat. 8 : M = 1,81)

Ce type de problème était « classique », avant les réformes de l'enseignement des mathématiques de la deuxième partie du XXe siècle. On le résolvait selon des méthodes bien rodées – mais aussitôt oubliées après l'étude du chapitre des « baignoires et des rencontres de cyclistes ou autres personnages mobiles ». L'algèbre qui s'est substituée à l'arithmétique à l'école secondaire,

ne semble pas fournir aux élèves des instruments plus efficaces, comme le disent les correcteurs de Suisse romande :

« Aucune classe ne résout ce problème par équation ! Cela est normal car en 8e l'outil équation ne leur est pas encore très familier ! . Autre commentaire : problème juste ou faux !!! Réponses justes (4 points) Réponses fausses (0 et 1 pt) Il n'y a pas de milieu, aucune classe n'a obtenu 2 ou 3 points ! »

Il paraissait pourtant, selon l'analyse de la tâche faite a priori (ou la pinède complète est représentée par 12 carrés, plus petit commun multiple de 6 et 4) que les élèves avaient les moyens de s'en tirer, pour autant qu'ils aient quelques rudiments de calcul des fractions ou une bonne maîtrise de la linéarité :

- En une heure, Aldo couvre 2 carrés et Louis en couvre 3, donc, ensemble, 5 carrés; si 5 carrés correspondent à 60 minutes, 1 carré correspond à 12 minutes et, par conséquent, ils mettront 2 heures et 24 minutes.

- Ou utiliser des fractions et une équation du premier degré pour rechercher la solution, en choisissant l'heure comme unité de temps : $1/4 + 1/6 = 5/12$ du travail effectué en 1 heure ; $1/12$ correspond à 12 minutes, c'est-à-dire $1/5$ d'heure, et ainsi les deux amis mettent ensemble 2 heures et 24 minutes.

18. LE CHAMPIGNON (Cat. 8 : M = 1,96)

Résultats mitigés à ce problème⁵ qui requiert la connaissance des relations entre le rayon, la longueur de la circonférence et l'aire du disque ainsi que la maîtrise des

5. Même pour la Suisse romande où les classes des degrés 7 et 8 participantes au RMT sont en majorité issues des sections pré-gymnasiales des différents cantons, par rapport aux classes italiennes totalement hétérogènes, où les taux de réussite à ce genre de problème, à exigences cognitives ambitieuses, sont nettement inférieurs.

calculs avec le nombre π (et non pas 3,14 ou la valeur donnée par la calculatrice).

- Observer la figure, la redessiner ou la subdiviser pour comprendre comment s'articulent ses différentes parties, que le rayon de chacun des deux demi-cercles est la moitié du rayon du quart du « grand » cercle, AB, que les deux demi-cercles se divisent chacun en deux parties égales, AI et IC d'une part, BI et IC d'autre part, que le triangle ABC est rectangle en C, ...
 - Le calcul des périmètres peut se faire algébriquement ou en prenant la valeur du rayon. Si r est le rayon des « petits » cercles, le périmètre du « pied » est $2(2\pi r/4) = \pi r$, le périmètre du « chapeau » est $\pi r + 2\pi(2r)/4 = 2\pi r$, c'est-à-dire le double de celui du « pied ». Avec une valeur de $r = 4$, on trouve 4π et 8π ou des approximations comme $\approx 12,56$ et $\approx 25,12$ (à ne pas confondre avec les nombres réels)
 - La comparaison des aires peut se faire par soustraction. Celle d'un demi-pied (segment de disque) est la différence entre l'aire d'un quart de disque et celle d'un triangle (fig. 1). L'aire du pied est $2\pi r^2/4 - 2r^2/2 = \pi r^2/2 - r^2$
- L'aire du chapeau est celle d'un quart de « grand disque » à laquelle on soustrait successivement le

triangle et les deux « petits » segments de disque (v. fig. 2): $\pi(4r^2)/4 - 4r^2/2 - (\pi r^2/2 - r^2) = \pi r^2/2 - r^2$ et l'on constate ainsi l'équivalence des deux figures. Avec la valeur de $r = 4$, on trouverait $8\pi - 16$, avec l'approximation scolaire de π par 3,14 l'aire de chaque partie serait $\approx 9,12$.

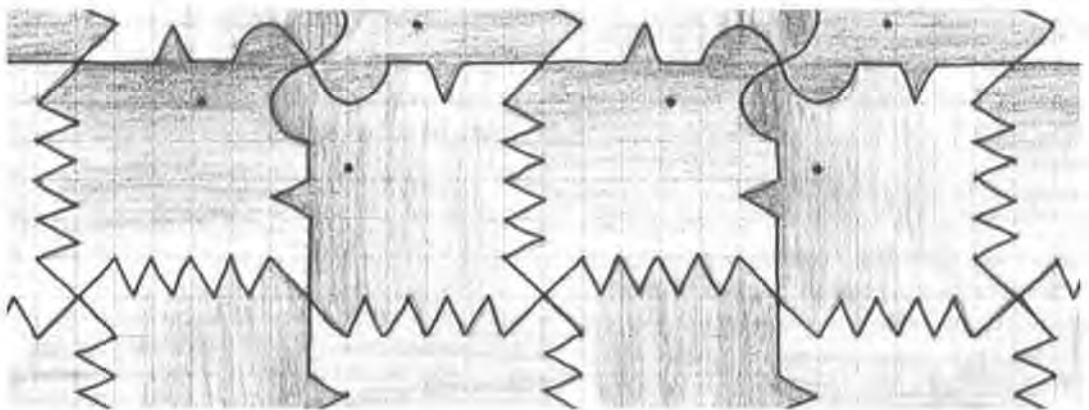
- On peut aussi ne pas effectuer les calculs en affirmant de manière explicite que, par exemple, les « petits » segments de disque valent le quart du « grand » étant donné que le rayon de ce dernier est le double de celui des premiers.



fig. 1



fig. 2



Pavage par rotations d'un quart de tour réalisé par Guillaume, 14 ans.