# APPRENDRE LES MATHÉMATIQUES SANS PARLER L'ESPÉRANTO

Jean-Philippe Antonietti
IRDP

## Introduction

En 1997, de nouveaux moyens d'enseignement des mathématiques sont introduits dans les classes de Suisse romande. Ces nouveaux moyens n'apportent pas de grandes modifications sur le plan des contenus mathématiques. Les notions d'ensembles et de relations ne sont plus enseignées en tant que telles, l'apprentissage de la numération se fait sans recourir à d'autres bases que celle de dix, les rudiments de la topologie ne sont plus abordés directement. Mais à part la suppression de ces quelques objets épineux (Conne, 1986; Perret, 1985), l'accent est toujours mis sur la logique et le raisonnement, sur le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés, l'espace et la géométrie ainsi que sur la mesure et le mesurage.

L'innovation est d'ordre didactique. Les contenus à enseigner sont les mêmes, en revanche la manière d'enseigner qui est proposée est fondamentalement différente. Selon cette nouvelle conception, très inspirée par la didactique des mathématiques française (Brousseau, 1998), l'enseignant a comme tâche de proposer à l'élève des situations dans lesquelles le savoir à enseigner puisse émerger:

*La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des «problèmes» qu'il propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques.* (Brousseau, 1998, p. 59).

L'enseignant a donc la responsabilité de créer dans sa classe les conditions qui permettent à ses élèves de vivre à leur échelle les tribulations d'une société mathématicienne. L'approche proposée est donc résolument socio-constructiviste. Les élèves vont être les bâtisseurs de leurs connaissances qu'ils acquerront en interagissant avec leur milieu ainsi qu'en se confrontant à leurs pairs. L'IRDP suit depuis le début l'introduction généralisée de ces nouveaux moyens en Suisse romande. Deux recherches complémentaires ont été entreprises. La première, qui est en voie d'achèvement, a pour objet d'observer dans une perspective didactique, les réactions qu'une telle innovation provoque dans la classe et l'établissement (Tièche Christinat, 2001). La deuxième, réalisé par un consortium romand, vise à cerner les compétences et connaissances en mathématiques mobilisables par les élèves de 2e et 4e primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens.

L'évaluation des compétences des élèves de 2e primaire vient de faire l'objet d'une publication de l'IRDP (Antonietti et al., 2003). Dans cet ouvrage (disponible sur le site de l'IRDP: <http://www.irdp.ch/publicat/publicd.htm>), nous montrons qu'après deux années d'école primaire, les élèves manifestent des compétences qui attestent que les objectifs fixés par le nouveau plan d'étude romand sont atteints. Les écoliers savent à la fin de leur premier cycle dénombrer une collection, comparer des nombres entiers, compléter une séquence de la suite numérique, décomposer des nombres en centaines, dizaines et unités, reconnaître la valeur positionnelle des chiffres ou encore résoudre des problèmes simples en utilisant des écritures additives et soustractives... Dans le domaine arithmétique, les écoliers ont dépassé le temps de la sensibilisation et manifestent déjà de bonnes compétences. Dans le domaine géométrique, leurs acquis sont moins homogènes. Si certains semblent très à l'aise lorsqu'il s'agit de découvrir des invariants, de se représenter des transformations, de construire un pavage ou de comparer des mesures, d'autres semblent éprouver d'assez grandes difficultés dans des situations qui requièrent ces compétences. Ce domaine des mathématiques est donc pour un certain nombre d'écoliers encore en friche. L'investissement des enseignants en géométrie est probablement inégal et les différences que nous avons pu observer entre les élèves reflètent vraisemblablement souvent des décalages dans le développement spontané de notions spatiales élémentaires.

Bien que sans surprise, ces résultats sont réjouissants. Une observation vient néanmoins les ternir : les performances des élèves allophones sont systématiquement moins bonnes que celles des élèves francophones. Il est donc légitime de se demander si ces différences, attendues certes, ne sont pas accentuées par l'emploi de la nouvelle méthodologie. Dans la suite de cet article, nous allons approfondir cette interrogation à travers l'examen de l'une des tâches mathématiques proposée dans l'enquête Mathéval.

### Analyse d'une tâche

La tâche que nous allons analyser s'intitule *Les mouches de Hébus*. En voici l'énoncé :

**Les mouches de Hébus**

Hébus est un troll. Comme tous les trolls, il est absolument dégoûtant. Un nuage de mouches le suit donc en permanence. Chaque matin son ami Lanfeust lui pose quatre questions afin d'estimer le nombre de mouches qui lui tournent autour. Lanfeust propose un nombre et Hébus répond en lui disant s'il est trop grand, trop petit ou si c'est le nombre exact.

**lundi matin**

- Lanfeust propose 78, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 29, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 17, Hébus répond trop grand.
- Lanfeust propose 6, Hébus répond trop grand.

*Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ? Enumérez toutes les possibilités ?*

**mardi matin**

| Proposition de Lanfeust | Réponse de Hébus |
|---|---|
| 45 | trop grand |
| 23 | trop petit |
| 39 | trop grand |
| 27 | trop petit |

*Combien y a-t-il de mouches qui volent autour de Hébus ce matin ? Enumérez toutes les possibilités ?*

Pour ne pas trop pénaliser les élèves ayant des difficultés de lecture, les enseignants étaient invités à lire le problème à haute voix et à expliciter les termes difficiles si nécessaire.

*Les mouches de Hébus* fait référence à la relation d'ordre qui existe dans l'ensemble des entiers naturels ainsi qu'aux notions de minorant, de majorant, de bornes inférieure et supérieure. Ce problème s'apparente à *L'échelle* ou plus encore à *Qui suis-je?* ou à *Chaud, froid* qui sont proposés comme activités dans les nouveaux moyens (Ging, Sauthier, & Stierli, 1996).

Pour résoudre ce problème, il faut être capable de:

- comprendre un énoncé;
- faire des hypothèses et les vérifier;
- chercher un ensemble de solutions;
- comprendre et utiliser l'ordre qui existe dans l'ensemble des entiers naturels pour approximer un ensemble de nombres.

Beaucoup d'activités des nouveaux moyens sont prévues pour être réalisées à deux. Rappelons que l'un des credos de la nouvelle méthodologie est que la communication entre pairs fait partie intégrante du processus de construction des connaissances. C'est pour cette raison que nous avons concocté aussi, en plus des épreuves individuelles, des épreuves collectives. *Les mouches de Hébus* est l'un de ces problèmes que les élèves durent résoudre en duo.

Avant d'examiner le rôle que joue la composition des duos sur leur réussite, décrivons brièvement les différentes solutions proposées ainsi que leur fréquence.

**Première partie du problème *(lundi matin)***

Cette première partie est beaucoup plus facile que la seconde. Les propositions de Lanfeust forment une suite ordonnée et décroissante de majorants qui rétrécissent à chaque fois l'ensemble des solutions possibles. La dernière proposition est ainsi, à une unité près, la borne supérieure de l'ensemble recherché. La borne inférieure est quant à elle, le premier élément de l'ensemble des entiers naturels (nous avons admis comme solution aussi bien 0 que 1).

L'ensemble des solutions fournies par un duo peut être caractérisé par sa borne inférieure et par sa borne supérieure. A priori les réponses peuvent donc être catégorisées de la manière suivante:

Niv0 Les élèves ne répondent pas.
Niv1 Ni la borne inférieure, ni la borne supérieure de l'ensemble des solutions proposées n'appartient à l'ensemble des solutions possibles.
Niv2 L'une des bornes de l'ensemble des solutions proposées est une solution possible.
Niv3 Les solutions proposées sont toutes correctes mais il en manque.
Niv4 L'ensemble des solutions proposées est exhaustif.

Donnons quelques exemples de réponses et catégorisons-les (voir Tableau 1).

**Tableau 1.** Quelques exemples de réponses fournies au problème *Les mouches de Hébus* et leur catégorisation. Les bonnes solutions sont indiquées en gras.

*lundi matin*

| | |
|---|---|
| Niv1: | {16} |
| | {6} |
| | {6, 29} |
| Niv2: | {**1**, **2**, **3**, **4**, **5**, 6,} |
| | {**2**, **3**, **4**, **5**, 6} |
| | {**3**, **4**, **5**, 6} |

Niv3 : **{1, 2, 3, 4}**
**{0, 1, 2, 3}**
**{5}**
Niv4 : **{1, 2, 3, 4, 5}**
**{0, 1, 2, 3, 4, 5}**

*mardi matin*

Niv1 : {39, 40, 41, 42, 43, 44, 55}
{21, 22, 23, 24, 25, 26}
{22, 23, 24, 25, 26, 27, **28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**, 39, 40, 41, 42, 43, 44}
Niv2 : {25, 26, 27, **28**}
{**30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**, 39}
{27, **28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38**}
Niv3 : **{29, 39, 30}**
**{30}**
**{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38}**
Niv4 : **{28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38}**

Le nombre et la fréquence des différents types de réponses fournies par les duos à la première partie du problème (lundi matin) sont rapportés dans le Tableau 2.

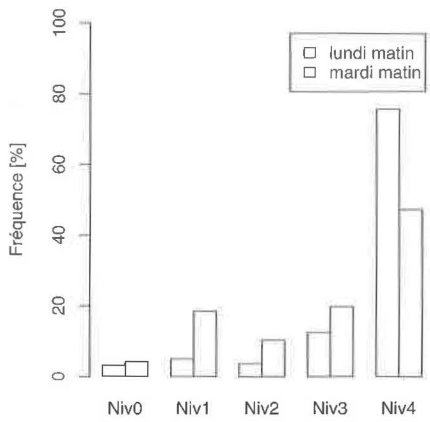
**Tableau 2.** Répartition des différents types de réponses à la première partie du problème (lundi matin).

| | Niv0 | Niv1 | Niv2 | Niv3 | Niv4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 12 | 19 | 14 | 47 | 287 | 379 [1] |
| Fréquence [%] | 3.2 | 5.0 | 1.7 | 12.4 | 75.7 | 100.0 |

Plus de trois quarts des duos fournissent l'ensemble de toutes les solutions attendues. Les autres, pour la plupart, omettent quelques solutions : ils répondent donc correctement mais ne sont pas exhaustifs (voir Figure 1).

1. Pour ces analyses nous n'avons pris en considération que le travail des duos. Nous avons donc exclu celui des trios, ainsi que les solutions fournies par des élèves ayant travaillé seuls à ce problème.

**Figure 1.** Distribution des réponses à la première (lundi matin) et à la seconde partie (mardi matin) du problème *Les mouches de Hébus*.




**Seconde partie du problème *(mardi matin)***

Caractérisons les réponses des duos à la partie du problème selon le même principe que précédemment (pour quelques exemples de réponses, voir Tableau 1).

La répartition des réponses fournies par les duos à cette seconde partie est rapportée dans le Tableau 3.

Ici un peu moins de la moitié des duos répond parfaitement. Pour le reste, une moitié *grosso modo* répond correctement mais sans être exhaustif et l'autre se fourvoie complètement (voir Figure 1).

**Tableau 3.** Répartition des différents types de réponses à la seconde partie du problème (mardi matin).

| | Niv0 | Niv1 | Niv2 | Niv3 | Niv4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 16 | 70 | 39 | 75 | 179 | 379 |
| Fréquence [%] | 4.2 | 18.5 | 10.3 | 19.8 | 47.2 | 100.0 |

**Dépendance entre la première et la deuxième partie du problème**

Il est probable que les élèves se soient déjà attelés à la première partie du problème et n'aient abordé la seconde partie qu'après avoir réussi la première. Ceci peut être étayé statistiquement: la réussite à la seconde partie de la tâche n'est pas indépendante de la réussite à la première partie[2] (voir Tableau 4). La réussite à la première partie du problème est même une condition nécessaire à la réussite à la seconde partie, quasiment aucun duo n'a réussi la seconde partie après avoir raté la première!

2. Si l'on effectue dans cette situation un test du khi carré, l'on est conduit à rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse statistique nulle selon laquelle la réussite à la seconde partie est indépendante de la réussite à la première partie.

**Tableau 4.** Réussite conjointe à la première et à la seconde tâche du problème. La réussite correspond à une solution de niveau 4 (Niv4), l'échec à une solution d'un niveau inférieur (Niv0, Niv1, Niv2 ou Niv3).

| | | *mardi matin* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Réussite | Echec | Total |
| *lundi matin* | **Réussite** | 173 | 114 | 287 |
| | **Echec** | 6 | 86 | 92 |
| | **Total** | 179 | 200 | 379 |

Voyons maintenant dans quelle mesure la composition des dyades influence leur performance.

**Impact de la composition des duos**

Pour les épreuves collectives, les enseignants purent former les paires à leur guise. Caractérisons les dyades en fonction de la langue maternelle des élèves. Les dyades sont ainsi de trois sortes : soit les deux élèves sont allophones (AA), soit l'un des élèves est allophone et l'autre francophone (AF), soit les deux élèves sont francophones (FF).

Pour évaluer le rôle de la composition des duos sur la réussite, nous allons comparer le tableau des effectifs observés au tableau des effectifs théoriques que l'on devrait obtenir si la composition des duos n'avait aucune influence sur la réussite (voir Tableaux 5 et 6).

**Tableau 5.** Rôle de la composition des dyades sur la réussite à la première partie du problème (*lundi matin*).

Tableau des effectifs observés

| | AA | AF | FF |
|---|---|---|---|
| Réussite | 19 (53 %) | 82 (73 %) | 186 (81 %) |
| Echec | 17 (47 %) | 30 (27 %) | 45 (19 %) |

Tableau des effectifs attendus en cas d'indépendance

| | AA | AF | FF |
|---|---|---|---|
| Réussite | 27 (76 %) | 85 (76 %) | 175 (76 %) |
| Echec | 9 (24 %) | 27 (24 %) | 56 (24 %) |

**Tableau 6.** Rôle de la composition des dyades sur la réussite à la seconde partie du problème (*mardi matin*).

Tableau des effectifs observés

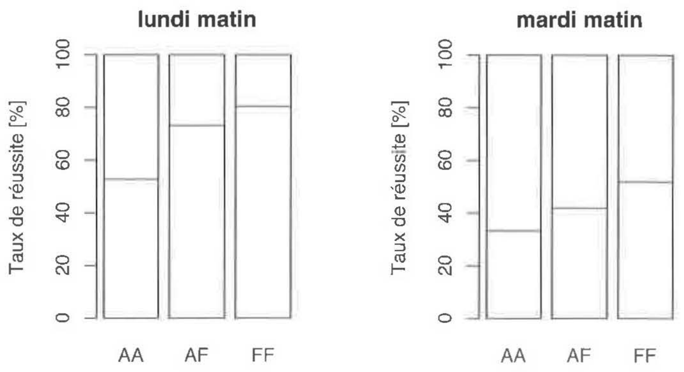
| | AA | AF | FF |
|---|---|---|---|
| Réussite | 12 (33 %) | 47 (42 %) | 120 (52 %) |
| Echec | 24 (67 %) | 65 (58 %) | 111 (48 %) |

Tableau des effectifs attendus en cas d'indépendance

| | AA | AF | FF |
|---|---|---|---|
| Réussite | 17 (47 %) | 53 (47 %) | 109 (47 %) |
| Echec | 19 (53 %) | 59 (53 %) | 122 (53 %) |

Il apparaît très clairement que la composition des dyades a une influence sur le taux de réussite [3]. Les duos formés de deux élèves allophones réussissent moins bien que ceux formés de deux élèves francophones. Les duos formés d'un élève allophone et d'un élève francophone occupent une position intermédiaire (voir Figure 2).

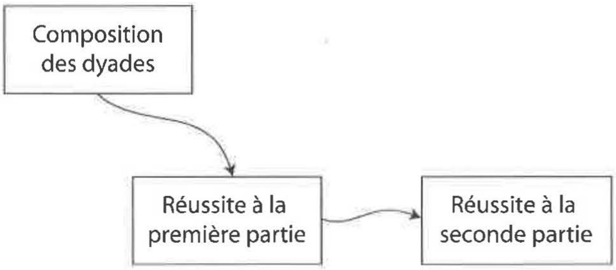
**Figure 2.** Taux de réussite en fonction de la composition des dyades. AA : les deux élèves sont allophones ; AF : l'un des élèves est allophone, l'autre est francophone ; FF : les deux élèves sont francophones.




3. L'effet est statistiquement significatif au seuil de 5% aussi bien pour la première que pour la seconde partie du problème.

Une analyse, à peine plus sophistiquée (Agresti, 1990), montre que la composition des dyades n'a un effet direct que sur la première partie du problème, la plus simple. Sur la seconde partie, l'effet n'est qu'indirect et s'exerce par l'entremise de la réussite à la première partie. Le schéma causal complet est donc celui présenté dans la Figure 3. Ce résultat suggère que les difficultés rencontrées par les duos constitués d'élèves ne partageant pas la même langue maternelle sont principalement langagières. Ces duos ont plus de peine à comprendre ce qui leur est demandé mais cet obstacle surmonté, lorsque enfin le problème fait sens pour eux, ils sont capables d'agir, de coordonner leurs actions et de réfléchir comme les dyades francophones.

**Figure 3.** Influence de la composition des dyades sur la réussite du problème *Les mouches de Hébus.*




Les soi-disantes compétences mathématiques que nous avons évaluées ne portent donc pas exclusivement sur la pertinence et la profondeur des réflexions mathématiques des élèves mais aussi sur leur compréhension de la langue française. Espérons qu'en classe les enseignants réussissent à rendre les tâches mathématiques compréhensibles et faire ainsi en sorte que la langue ne soit pas une embûche car « comme tout se tient en une discipline entièrement déductive, l'échec ou l'incompréhension portant sur tel ou tel chaînon entraîne une difficulté croissante dans la suite des enchaînements, de telle sorte que l'élève désadapté sur un point ne comprend plus la suite et en vient à douter de plus en plus de lui : des complexes affectifs, souvent renforcés par l'entourage, finissent alors par bloquer une initiation qui eût pu être toute différente » (Piaget, 1969, p. 65).

## Discussion

Nous disions en introduction que les élèves allophones étaient systématiquement moins performants que les élèves francophones. Comme la réussite à une tâche de groupe dépend, dans une certaine mesure, des compétences de ses membres, il se pourrait que les résultats que nous venons de décrire soient biaisés et ne soient finalement que le reflet des compétences mathématiques individuelles. Dans cette optique, les duos d'élèves allophones seraient moins performants simplement parce qu'en moyenne les compétences des élèves allophones sont moins bonnes. Nous avons donc refait les analyses en contrôlant le niveau des compétences individuelles (Long, 1997) mais les conclusions restent les mêmes. Les élèves allophones sont doublement désavantagés : non seulement lorsqu'ils ont à résoudre des problèmes individuellement, mais aussi lorsqu'on leur demande de travailler en groupes.

## Conclusion

Les nouveaux moyens impliquent souvent une très bonne maîtrise de la langue française et valorisent les comportements et les attitudes plus fréquemment rencontrés parmi les écoliers d'origine sociale plus favorisée, ils nuisent ainsi peut-être à l'établissement d'une plus grande équité à l'école. Nous ne pouvons que souhaiter qu'à l'avenir ces inégalités s'atténuent. Rappelons que l'école et l'enseignement des mathématiques en particulier doivent permettre à tous de s'approprier les formes symboliques et les connaissances nécessaires au jugement et au raisonnement et devraient, selon les idéaux de l'école émancipatrice, viser à améliorer pour le plus grand nombre les conditions d'assimilation et d'acquisition des connaissances indispensables à une vie intellectuelle, esthétique et sociale aussi riche et variée que possible.

## Bibliographie


Agresti, A. (1990). *Categorical data analysis.* New York: Wiley.

Antonietti, J.-Ph. (Ed.). (2003). *Evaluation des compétences en mathématiques en fin de 2e année primaire: Résultats de la première phase de l'enquête Mathéval.* Neuchâtel: IRDP.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Conne, F. (1986). *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire.* Lausanne: Couturier-Noverraz.

Ging, E., Sauthier, M.-H., & Stierli, E. (1996). *Mathématiques 1-2P.* Neuchâtel: Commission romande des moyens d'enseignement.

Long, J. S. (1997). *Regression models for categorical and limited dependent variables.* Thousand Oaks: Sage.

Perret, J.-F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres.* Berne: Lang.

Piaget, J. (1969). *Psychologie et pédagogie.* Paris: Denoël.

Tièche Christinat, C. (2001). « L'innovation en mathématiques et ses priorités: Le regard des enseignants de Suisse Romande », *Math-Ecole,* 196, 13-16.