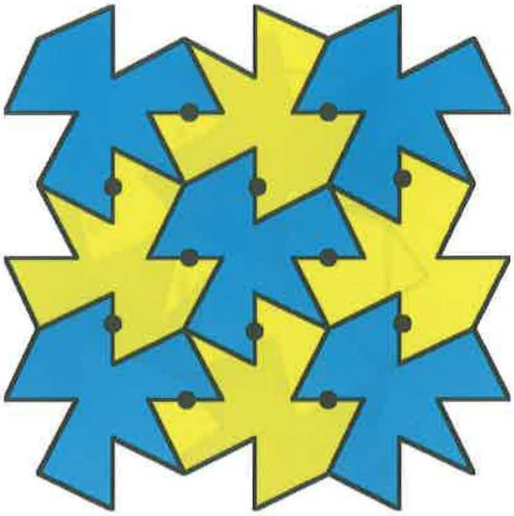
LE COIN DES PAVAGES (2)

Michel Brêchet

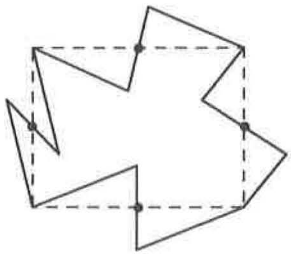


Dans le numéro précédent [1], nous avons examiné les caractéristiques d'une figure permettant de recouvrir le plan sans trou ni chevauchement par une suite de rotations d'un quart de tour. Dans cet article, ce sont les pavages par symétries centrales qui retiendront notre attention. Des pavages qui laissent libre cours à l'imagination et qui conduisent à des «œuvres» surprenantes. Et de surcroît très esthétiques, ce qui ne gâche rien.

La page de couverture de ce numéro montre un pavage par rotations d'un quart de tour ou par symétries glissées. Cependant, la figure de base est à ce point particulière qu'elle conviendrait également pour paver le plan par des symétries centrales (voir ci-dessus, à droite) dont les centres seraient les nœuds d'un réseau quadrillé. Mais comment s'y prendre pour générer un motif susceptible de recouvrir une feuille de papier à l'aide de cette seule isométrie?

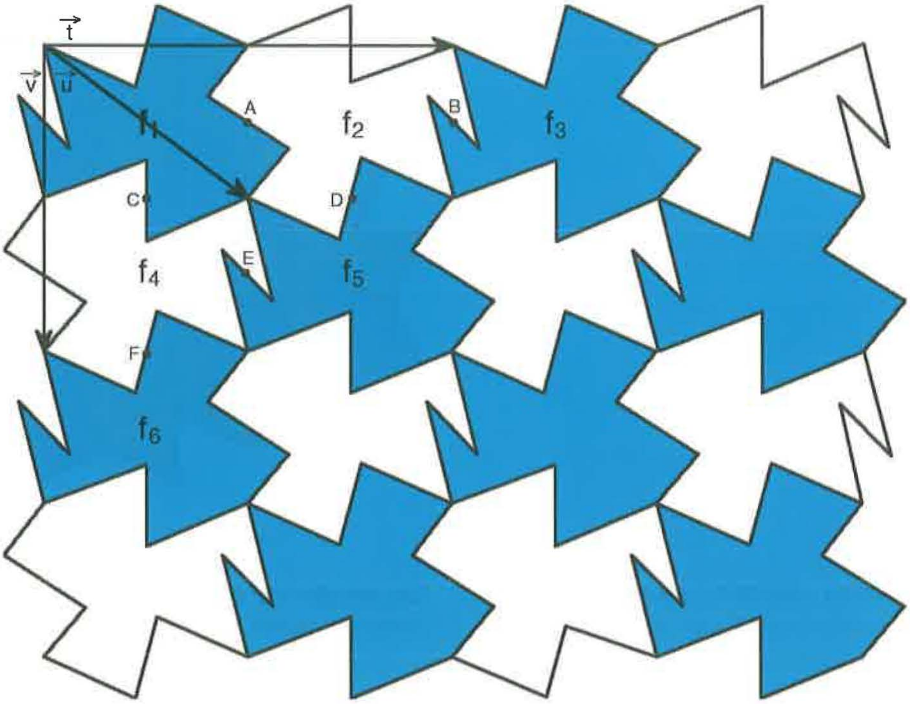
Les pavages par symétries centrales : comment faire ?

- Construire un rectangle, ou plus généralement un quadrilatère.
- Tracer une ligne (ligne brisée, courbe...) possédant un centre de symétrie et dont les extrémités sont deux sommets consécutifs de ce rectangle (ou de ce quadrilatère).
- Faire de même avec les autres couples de sommets consécutifs.
- Paver le plan par symétries centrales.



1. *Math-Ecole* 207, *Le coin des pavages (1)*, par le même auteur

Motif obtenu



Analyse du motif

Deux isométries apparaissent dans ce motif périodique. Par construction, les figures ayant des côtés communs sont images l'une de l'autre par une symétrie centrale :

Première ligne	**Deuxième ligne**	…	**Première colonne**	**Deuxième colonne**	…
$f_1 \xrightarrow[S(A)]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[S(E)]{} f_5$	…	$f_1 \xrightarrow[S(C)]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[S(D)]{} f_5$	…
$f_2 \xrightarrow[S(B)]{} f_3$	…	…	$f_4 \xrightarrow[S(F)]{} f_6$	…	…
…	…	…	…	…	…

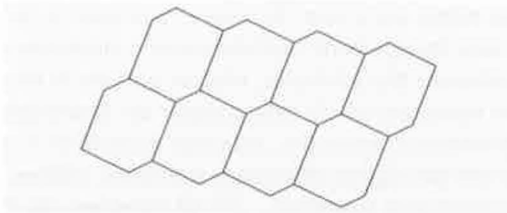
En conséquence, comme la composée de deux symétries centrales est une translation définie par un vecteur de même direction et de même sens que celui qui joint les centres de symétrie, mais de longueur double, on a :

$f_1 \xrightarrow[T(\vec{t})]{} f_2$ $\quad$ $f_1 \xrightarrow[T(\vec{u})]{} f_5$ $\quad$ $f_1 \xrightarrow[T(\vec{v})]{} f_6$ $\quad$ …

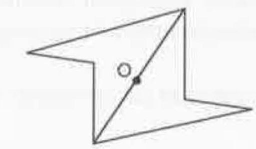
(avec $\vec{t} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$) $\quad$ (avec $\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{AD}$) $\quad$ (avec $\vec{v} = 2 \cdot \overrightarrow{CF}$)

Pourquoi ça marche ?

Remarquons tout d'abord que tout hexagone ayant des côtés opposés parallèles et isométriques pave le plan par translations successives (un hexagone ayant une seule paire de côtés opposés parallèles et isométriques pave aussi le plan, par translations et symétries centrales dans ce cas).



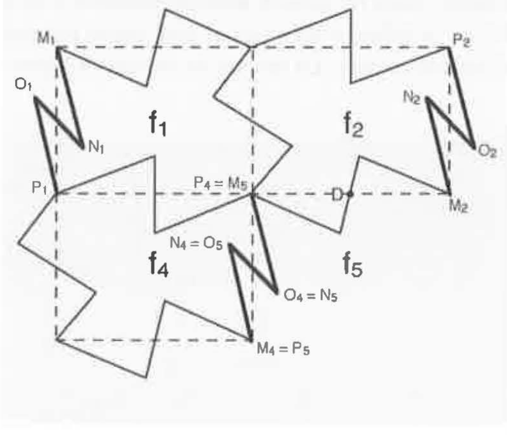
Par suite, deux copies d'un même quadrilatère convenablement juxtaposées formant un tel hexagone, on en déduit que tout quadrilatère (convexe ou non) pave le plan.



Hexagone constitué de deux quadrilatères images l'un de l'autre par la symétrie de centre O.

Revenons au motif de la page précédente. Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux car chaque ligne brisée est image d'elle-même par symétrie centrale.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, la figure initiale est construite à partir d'un quadrilatère (ici un rectangle), et tout quadrilatère permet de paver le plan par symétries centrales, comme on vient de le voir. Ainsi, le sommet M_5, image de M_2 par la symétrie de centre D, sera confondu avec le sommet P_4. De même, P_5 (image de P_2) et M_4 seront confondus. En outre, comme la symétrie centrale est une isométrie qui conserve les directions et que chaque ligne brisée possède un centre de symétrie (d'où $P_1O_1 = M_1N_1$, $P_2O_2 = M_2N_2, \ldots$) , les lignes $M_5N_5O_5P_5$ et $P_4O_4N_4M_4$ seront confondues.



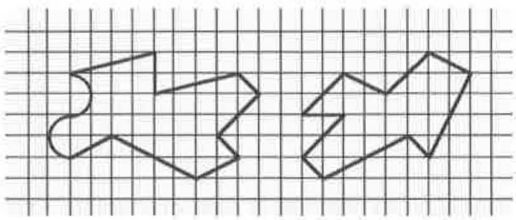
Cette démarche peut également être menée en considérant que la figure f_5 est l'image de la figure f_4 par symétrie centrale. Ce même type de raisonnement s'applique par ailleurs aux autres figures.

En classe

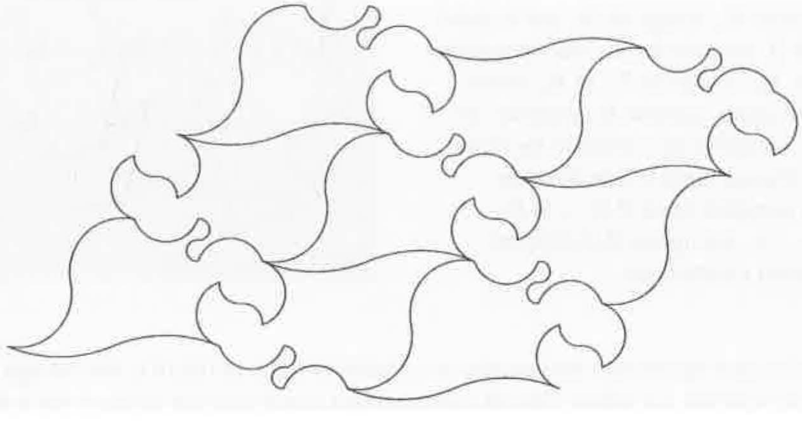
L'étude des transformations du plan figure dans tous les programmes romands des degrés 5 à 9, et même dans ceux des degrés précédents parfois. La réalisation de pavages trouve donc sa place dans les leçons de mathématiques. Outre des connaissances spécifiques, elle développe des compétences très générales, liées de près ou de loin à l'apprentissage des mathématiques : reconnaître et reproduire des formes, analyser des figures géométriques pour en extraire mentalement les différents éléments constitutifs, anticiper la position d'une figure déplacée par une isométrie, imaginer puis créer des figures répondant à certains critères, adapter des essais successifs, tenir compte de ses erreurs pour progresser... On dit volontiers que l'enseignement des mathématiques doit aussi contribuer à l'épanouissement de la personnalité des élèves et au renforcement de la confiance qu'ils ont en eux-mêmes. La confection de motifs périodiques est une piste tout à fait intéressante pour œuvrer dans cette direction, car elle permet aux élèves d'agir sur les problèmes qu'ils résolvent (ils inventent, testent, observent, expliquent, rectifient, optimisent...), d'agir en fait sur les mathématiques. Et donc de conduire consciemment leurs progressions, attitude fondamentale requise par tout apprentissage.

A propos des pavages par symétries centrales, le maître pourra demander aux élèves :

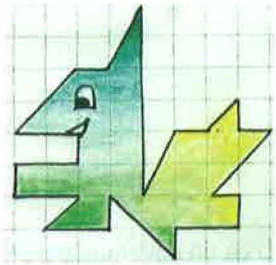
- de paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre (ou d'une autre qui convient) ;
- de décrire ensuite les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- de générer enfin une figure permettant de paver le plan par symétries centrales.



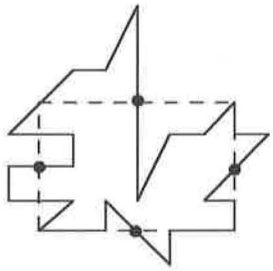
Selon ce scénario, la figure initiale proposée aux élèves ne doit être ni trop simple, ni trop complexe. On peut par exemple partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme dont les côtés ont été déformés (voir ci-dessus). Les élèves pourraient certes sans trop de difficultés recouvrir une feuille quadrillée à partir d'un quadrilatère quelconque déformé (en utilisant si nécessaire des ciseaux ou un logiciel de dessin). Mais ils seraient alors probablement incapables de retrouver les propriétés de la figure initiale, et par là même d'en inventer une, étape cruciale pour ne pas dire incontournable de cette séquence d'apprentissage. La recherche du quadrilatère de base du pavage suivant illustre ces propos :



Et maintenant place aux travaux d'élèves, qui allient persévérance, créativité et connaissances mathématiques bien entendu (voir également à la page 4).

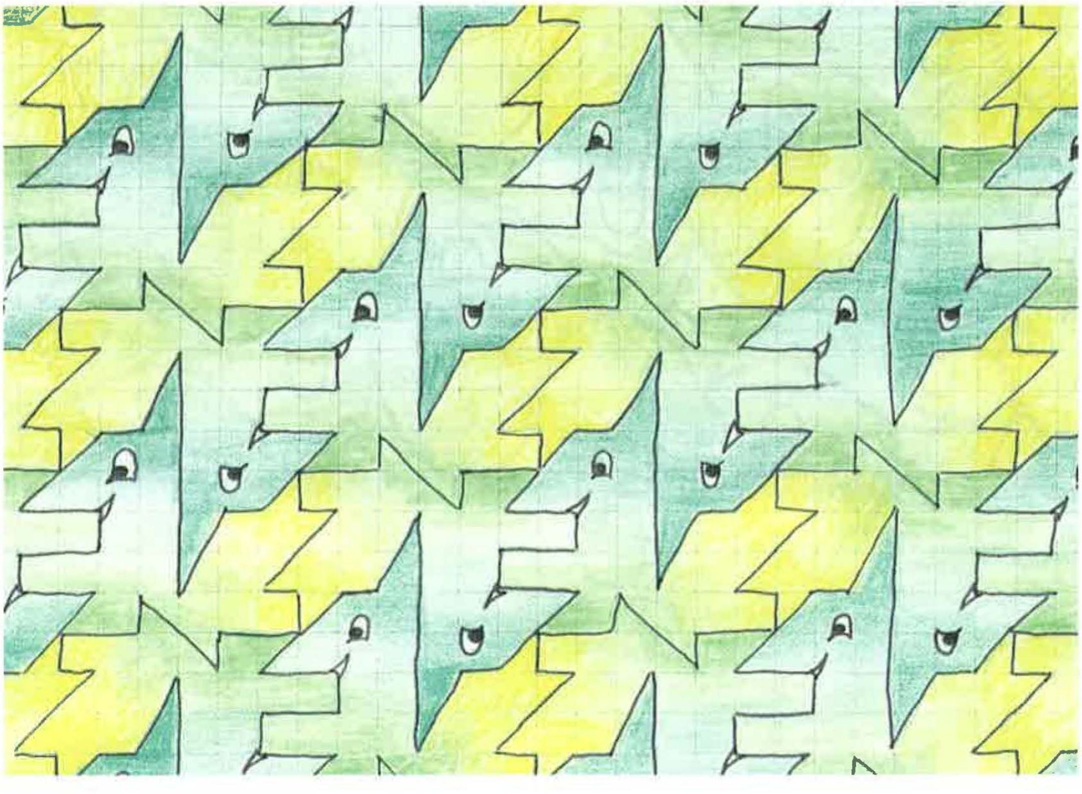


Ce joli dessin, imaginé par Fanny (14 ans), pave-t-il le plan par symétries centrales successives ?

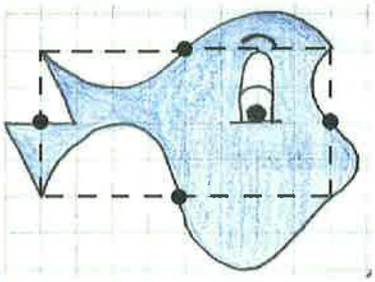


Oui, car il a été élaboré à partir d'un rectangle dont les côtés déformés possèdent un centre de symétrie !

Il mène en conséquence à une « œuvre » toute empreinte de régularités :



Ici, la déformation est plus évidente, mais non moins figurative (Arlinda, 14 ans) :



D'où un aquarium peuplé de poissons semblables :