LE TANGRAM, UN JEU À FACETTES

Valentina Celi
IUFM de Créteil – Équipe Didirem Paris 7 (France)

Résumé. En commençant par un aperçu sur les origines du Tangram, cet article propose une esquisse des problèmes qui ont été soulevés et résolus par des mathématiciens et des spécialistes de mathématique récréative. Connu surtout en tant que solitaire, nous essayons d'attirer l'attention du lecteur sur les différentes possibilités de jeu que ce vieux casse-tête peut effectivement offrir.

En 1903, Sam Loyd – un véritable expert de mathématique récréative – publia un petit livre intitulé *The Eighth Book of Tan, Part 1*, dont le sujet portait sur les origines d'un jeu chinois qui, d'après l'auteur, était âgé de 4000 ans.

Des publications postérieures à ce bouquin nous apprennent que la richesse de détails bizarres qui l'accompagnaient attira l'attention de quelques érudits sur un jeu qui, par sa nature, avait déjà son charme à soi.

Et bien, les recherches jetèrent une lumière sur les sources du jeu et le coquin fut démasqué : il s'agissait d'une tromperie, l'une de plus singulières dans l'histoire des casse-tête. Le jeu au centre de cette anecdote est le Tangram. Les études menées ensuite ont mis d'accord la plupart des experts : ils estiment qu'il a été inventé en Chine au début du 19e siècle et qu'après être devenu célèbre en Orient, il a été diffusé en Occident. La légende nous dit que, pendant son exil, le Tangram fut le *compagnon* préféré de l'empereur Napoléon. Par contre, il est certain qu'Edgard Allan Poe en était très passionné : l'ensemble de pièces en ivoire gravées qu'il importa et qui sont aujourd'hui en possession de la *New York Public Library*, en sont un témoignage.

Le Tangram est constitué de sept pièces, nommées *tan*, découpées dans un carré : deux grands triangles, un triangle de taille moyenne, deux petits triangles, un petit carré et un parallélogramme (fig. 1).

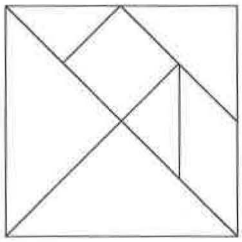


fig.1

Ces pièces peuvent être assemblées de manière à réaliser beaucoup de figures : le tangram[1] de la figure 2 en est un exemple. Dans ce cas-là, le jeu consiste à découvrir la disposition des pièces en tenant compte que celles-ci sont utilisées dans leur totalité et qu'elles ne doivent *jamais* se chevaucher. Il peut arriver qu'une figure admette plus d'une solution[2] : pour réaliser la *flèche* de la figure 2, par exemple, plusieurs dispositions des pièces sont possibles.

1. Avec ce terme on désigne une figure constituée des sept tan tandis qu'avec le terme Tangram on sous-entend le casse-tête lui-même.

2. Ce terme désigne une figure où la disposition des pièces est en évidence (cf. fig.7).

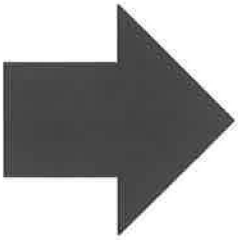


fig.2

Bien qu'il existe des exemplaires en bois et en ivoire, la manière la plus simple pour fabriquer un Tangram est d'utiliser du papier ou du carton (cf. encadrement ci-après).

Si l'on pose égale à µ la longueur du côté du tan carré, on remarquera que :

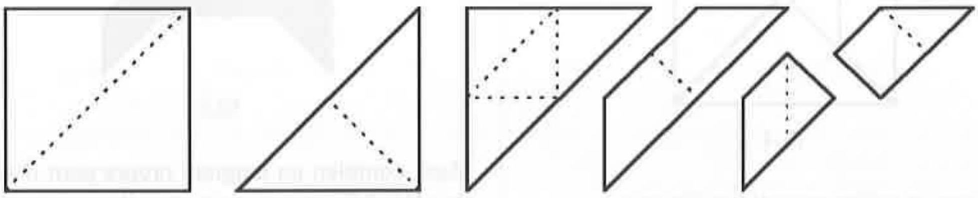
- les longueurs des côtés des divers tan sont comprises parmi les valeurs suivantes : μ, 2μ, $\mu\sqrt{2}$, $2\mu\sqrt{2}$;
- les rapports des aires de chaque tan avec celle du carré constitué des sept parties, sont des puissances de 1/2 : 1/4, 1/8, 1/16.

En outre :

- les angles des tan sont multiples de 45 : 45°, 90° et 135°.

Comment réaliser un Tangram

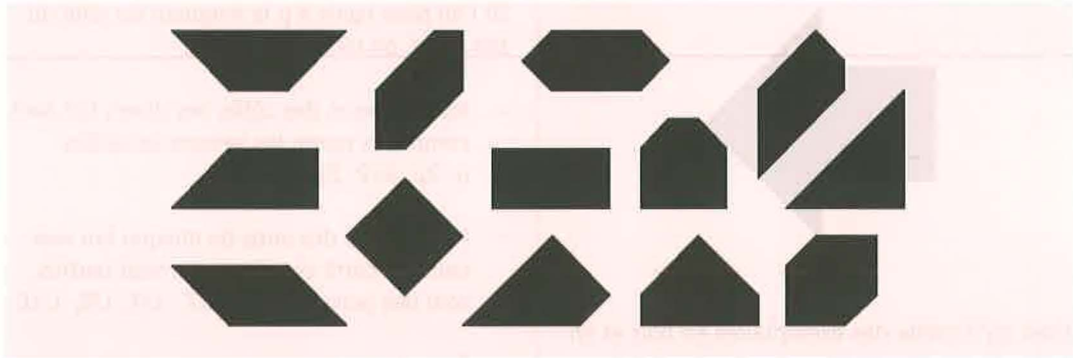
Se procurer une pièce de papier (ou de carton) en forme de carré et des ciseaux. Plier et découper le carré selon la diagonale de manière à obtenir des triangles (1). Plier et découper l'un de ceux-ci selon la hauteur relative à son hypoténuse (2) : on aura, ainsi, les deux premiers tan.



(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Plier, maintenant, l'autre triangle – la moitié du carré donné – de façon que le sommet correspondant à l'angle droit touche le milieu de l'hypoténuse (3) : en découpant, on obtiendra un autre triangle (troisième tan) et un trapèze. Plier et découper celui-ci afin d'avoir deux trapèzes rectangles (4). Plier l'un de ces trapèzes en superposant la hauteur sur la petite base (5) : on aura, ainsi, un petit triangle et un parallélogramme (quatrième et cinquième tan). Plier et découper l'autre trapèze en divisant à moitié la grande base (6) et de manière à obtenir un petit carré et un petit triangle (sixième et septième tan).

Les particularités du Tangram continuèrent, au fil des années, à séduire les spécialistes. En 1942, les deux mathématiciens chinois *Fu Triang Wang* et *Chuan Chih Hsiung* prouvèrent qu'**au moyen du Tangram il est possible de réaliser exactement treize polygones convexes**



(fig.3).

fig.3

La démonstration se fonde sur l'idée que seize petits triangles de la même taille que les petits tan triangulaires, peuvent être assemblés pour constituer les sept tan (fig.4).

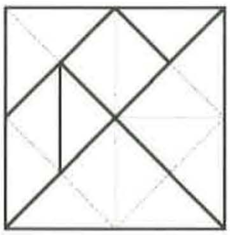


fig.4

A travers un raisonnement heuristique, les deux auteurs ont traduit le problème en termes algébriques en le reconduisant à la recherche des solutions entière d'un système d'équations.

Puisque les côtés des tan ont des longueurs précises, les résultats établis par les deux mathématiciens chinois nous ont permis de reconnaître que **le carré est l'unique polygone régulier réalisable au moyen des sept tan**.

Pour sa part, *Ronald C. Read* – spécialiste de la théorie des graphes auprès de l'Université de Waterloo – a étudié l'ensemble des *tangram propres*. Avec cet adjectif, on désigne les tangram dont le contour est *topologiquement* équivalent à un cercle. La figure 2 est un exemple de tangram propre ; par contre, celui de la figure 5 ne l'est pas puisque deux tan sont connexes seulement par un point.

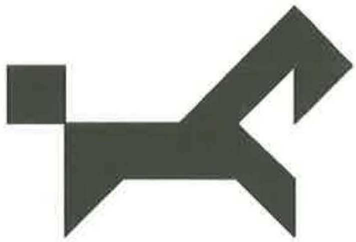


fig.5

Mais, **combien un tangram propre peut-il avoir de côtés ?** Read a répondu à cette question grâce au recours à la *géométrie combinatoire*, en considérant la solution d'un tangram propre comme un *graphe plan connexe*. Sans entrer dans le détail, nous disons seulement que sa démonstration prouve que les côtés qui constituent le contour d'un tangram propre, sont au plus vingt-trois.

Read a aussi étudié le sous-ensemble des tangram propres constitué de ceux qu'on définit *tangram compacts*. Supposons que, dans le Tangram, les longueurs des côtés de l'angle droit du petit triangle mesurent 1 ; par conséquent, la longueur de son hypoténuse est $\sqrt{2}$. Automatiquement, quel que soit le tan, les côtés n'auront qu'une de ces longueurs ou le double ; on pourra, ainsi, affirmer que les côtés de toute pièce sont constitués d'un ou de deux segments dont la longueur est 1 ou √2 (fig.6).

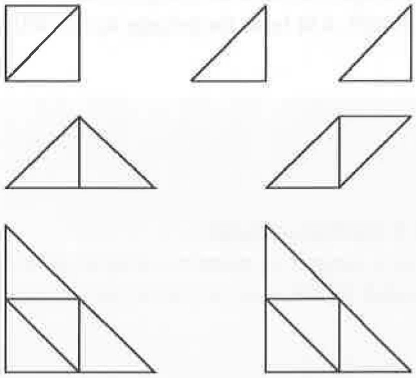


fig.6

Donc, en réalisant un tangram, si les segments de longueur 1 ou √2 coïncident respectivement avec des segments de longueur 1 ou √2, on dira que ce tangram-là est compact. Le tangram de la figure 7 en est un exemple.

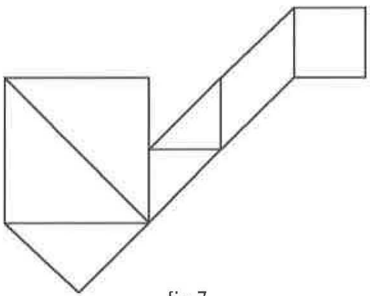


fig.7

En sachant que le tangram de la figure 8 est compact, essayez de trouver sa solution.

fig.8

Même les 13 polygones convexes sont compacts *mais* – attention ! – le contraire n'est pas vrai : pour vous convaincre, observez le tangram de la figure 9, plus loin.

Une des questions concernant ce genre de tangram est la suivante : **combien un tangram compact peut-il avoir de côtés, au plus ?** En posant égale à 1 la longueur du côté du tan carré, les longueurs des côtés des six autres tan seront égales à 1, 2, √2, 2√2. Il est possible, alors, d'envisager le périmètre total des tan comme la somme de vingt segments de longueur unitaire et dix segments dont la longueur est égale à √2 de façon qu'il soit constitué, dans sa totalité, de trente segments. Toutefois, si l'on assemble les tan, les côtés contigus sont perdus et, comme le tangram doit être connexe, il y a au moins six lignes selon lesquelles les pièces coïncident ; par conséquent, il faudra soustraire au périmètre au moins douze segments. C'est ainsi qu'on déduit qu'**un tangram compact peut avoir au plus 18 côtés** (fig.9).

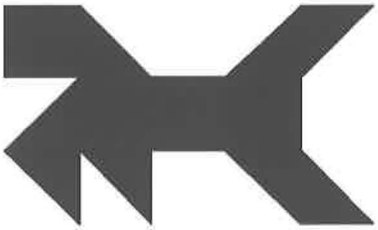


fig.9

Martin Gardner – l'un des plus célèbres spécialistes en matière de jeux mathématiques – a réussi à tirer partie des spéculations intellectuelles de Read : en exploitant les propriétés des tangram compacts, il a conçu trois jeux qui se différencient par rapport à la manière la plus commune de jouer avec le Tangram. Il s'agit de jeux de compétition qui demandent la connaissance de quelques-unes des caractéristiques exposées plus haut.

Les deux premiers jeux se terminent très tôt : vu qu'un tangram compact ne peut avoir moins que trois et plus que dix-huit côtés, une manche ne se déroule qu'en quinze coups. En plus, puisqu'il s'agit de réaliser des tangram compacts, il est interdit de déplacer des pièces qui laissent un trou ou qui divisent la figure en parties connexes seulement par des points.

Une variation applicable à ces deux jeux consiste, avant chaque coup, à choisir quelle pièce l'adversaire va déplacer. Cela obligera à suivre non seulement sa propre stratégie mais aussi à tenir compte de celle de l'autre joueur et, éventuellement, à la tenir davantage sous contrôle.

PLUS DE TROIS

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer un triangle[3].
Règles du jeu: chacun à leur tour, les joueurs choisissent une pièce à déplacer. La nouvelle position de celle-ci doit être telle que le nouveau tangram obtenu a plus de côtés qu'avant. Le joueur qui, en premier, ne peut plus jouer, échoue.

MOINS DE DIX-HUIT

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer le chien de la fig.9, ou bien un autre tangram compact de dix-huit côtés.
Règles du jeu: chacun à leur tour, les joueurs déplacent une pièce de manière que le nouveau tangram obtenu ait moins de côtés qu'avant. Le premier à se trouver dans l'impossibilité de jouer, échoue.

De plus longue durée, le jeu décrit ci-après, est tel que des coups de théâtre sont possibles: il peut arriver qu'à son tour, un joueur – sûr d'effectuer le coup décisif – ne puisse plus jouer.

PLUS OU MOINS

Joueurs: 2.
Matériel: un Tangram dont les pièces sont assemblées de manière à constituer un tangram de dix ou onze côtés (par exemple celui de la fig.8).
Règles du jeu: chacun à son tour, le joueur déplace une pièce de façon à obtenir un tangram ayant un nombre supérieur de côtés tandis que l'autre joueur doit procéder à l'inverse. Il est interdit de déplacer deux fois consécutives le même tan. Si le premier joueur (celui qui doit augmenter le nombre de côtés) réussit à réaliser un tangram ayant dix-huit côtés, il gagnera. L'adversaire gagnera s'il arrive à constituer un tangram ayant trois côtés. Si l'un des deux joueur ne peut plus jouer, il échoue.

3. Pour constituer un triangle, les sept pièces peuvent être assemblées de deux manières différentes !

Pour les débutants, il vaut mieux jouer en utilisant des tan tels que ceux de fig.7 : cela facilitera la recherche d'une disposition compacte des tan. A chaque coup, il vaut mieux aussi noter le nombre de côtés de chaque nouvelle figure.

Bien que les possibilités d'assemblage des sept tan soient innombrables, il existe des figures qu'on ne peut pas effectuer au moyen du Tangram. Donc, maintenant, c'est à vous de résoudre le problème suivant : parmi les tangram de la figure 10, lequels ne peut-on pas réaliser ?

Et, pour conclure, voici une dernière question : en utilisant les sept tan du Tangram (c'est-à dire le casse-tête complet), est-ce qu'on peut réaliser deux carrés superposables ? Une petite suggestion : examinez attentivement la disposition des tan dans la figure 1 et si cela ne vous aide pas du tout, essayez de résoudre le problème en recourant à quelques petits calculs. Pour ce faire, souvenez-vous des caractéristiques numériques mentionnées au début. Bonne chance et surtout ne vous découragez pas : le Tangram, comme tout casse-tête, est aussi un jeu de patience !

fig.10

Références bibliographiques

CELI V. (1994), *Dal Tangram all'Equivalenza : aspetti storici e matematici*, Mémoire de maîtrise, Université « La Sapienza », Rome

FU TRAING WANG, CHUAU CHIH HSIUNG (1942), *A Teorem on the Tangram*, The American Mathematical Monthly, pp. 596-599

GARDNER M. (1988), *Time Travel and Others Bewilderments*, Freeman Reprint, New York

READ R.C. (1970) *Il tangram, Rompicapo Cinese*, Del Poligramma, Torino