POLYDRON, LA MODÉLISATION EN MATHÉMATIQUES

UN PARCOURS MATHÉMATIQUE

Paul Gratwohl, Vivishop, Lausanne[1]

« Nul n'entre ici qui ne soit géomètre. Cette inscription, gravée sur le fronton de l'Académie de Platon pourrait bien être à nouveau inscrite à l'entrée des universités : après des siècles de division, la géométrie reprend peu à peu sa place au cœur des mathématiques. L'algèbre et l'analyse deviennent les deux versants du même édifice géométrique »

Sciences & Vie, 2/2000.

Apprendre, à prendre par les mains

Notre parcours mathématique, en géométrie et algèbre élémentaires, s'appuie sur la modélisation et la démonstration. Il montre l'interdépendance des formes géométriques et des formules algébriques, la cohérence du savoir mathématique, un savoir merveilleux aux applications infinies.

Notre parcours nous conduit à la découverte des rapports entre les formes géométriques : du cube à la pyramide, au tétraèdre, au prisme, à l'octaèdre (figure duale du cube) puis à l'octaèdre étoilé.

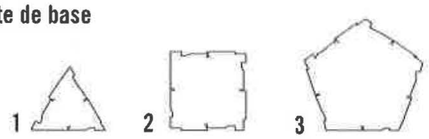
Les polygones de *POLYDRON*

Voici les 10 « modules » du matériel « *POLYDRON* 1, 2 et 4 » :

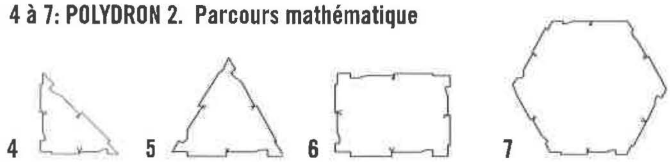
1. Le triangle équilatéral « 1 » (mesure des côtés : 1)
2. Le carré (mesure des côtés : 1)
3. Le pentagone régulier (mesure des côtés : 1)
4. Le triangle rectangle isocèle (mesure des côtés : 1, 1 $\sqrt{2}$)
5. Le triangle équilatéral « $\sqrt{2}$ » (mesure des côtés : $\sqrt{2}$)
6. Le rectangle (mesure des côtés : 1, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
7. L'hexagone régulier (mesure des côtés : 1)
8. Le triangle isocèle (mesure des côtés : 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$)
9. Le losange (mesure des côtés : 1, rapport entre la grande et la petite diagonale : $\sqrt{2}$)
10. L'octogone régulier avec carré évidé (mesure des côtés : 1)

1. [ndlr] *Math-Ecole* accueille généralement dans ses colonnes des textes d'enseignants, de mathématiciens ou de chercheurs en didactique. Aujourd'hui, nous sommes heureux de publier un article d'une personne qui a consacré le plus clair de son temps à diffuser et créer du matériel pédagogique en Suisse romande et au-delà. Chacun, ou presque, connaît la boutique Vivishop, près de la cathédrale de Lausanne, ou en a entendu parler. La plupart des enseignants romands utilisent les *Multicubes*, *Polydron*, *Construmath*... dans leur classe, matériels sur lesquels s'appuient de nombreuses propositions d'activités des moyens d'enseignement officiels. (En particulier, toutes les activités sur les polyèdres de *Mathématiques 7-8-9*, du domaine « Géométrie », au chapitre « Constructions » où l'usage du matériel *Polydron* est parfois mentionné explicitement.) Au travers des lignes qui suivent, nos lecteurs comprendront qu'un bon promoteur de matériel didactique doit dépasser le niveau de la gestion d'entreprise pour faire valoir les potentialités et les finalités profondes des objets qu'il élabore ou diffuse. Il suffit d'aller, par exemple, dans l'Encyclopédie Universalis, sous le terme « modélisation » et de constater qu'on y trouve une cinquantaine d'articles de référence sur le sujet pour percevoir la profondeur et la richesse du concept. M. Gratwohl qui n'est pas mathématicien au départ, sait communiquer son enthousiasme, avec lyrisme parfois, pour ses modèles d'objets géométriques et montre qu'il va bien au-delà des simples données techniques de ses matériels.

1 à 3: POLYDRON 1. Boîte de base



4 à 7: POLYDRON 2. Parcours mathématique



8 à 10: POLYDRON 4.

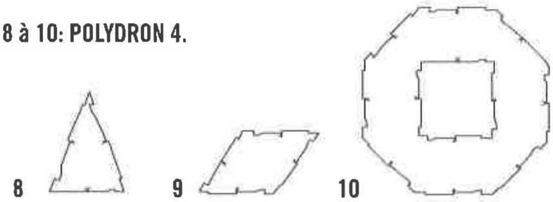


figure 1

Interactions géométriques-numériques

Dans l'inventaire précédent, les côtés des polygones de *POLYDRON* ont comme mesure 1 ou $\sqrt{2}$, en prenant comme unité de longueur le côté du carré.

Exprimée en cm, cette unité de mesure est 7 (cm). L'épaisseur des pièces est 0,3 (cm), ce qui fait que, par exemple, l'objet « cube » formé par 6 carrés a une arête extérieure de 7,3 cm et une arête intérieure de 6,7 cm. Du point de vue géométrique, on assimilera cet objet à un cube d'arête 1 (en unité de mesure de longueur) et de volume 1 (en cube unité).

On peut aussi exprimer les deux mesures des côtés de ces polygones par des lettres, comme nous le ferons par la suite, où a est la mesure du côté du carré et d celle de sa diagonale.

Avec ces notations, a^2 représentera l'aire du carré et d^2 celle d'un carré de côté d.

Le relation entre a et d est très importante en mathématiques, elle s'exprime ainsi : $d = a\sqrt{2}$. On peut l'expliquer facilement en observant les figures 2 :

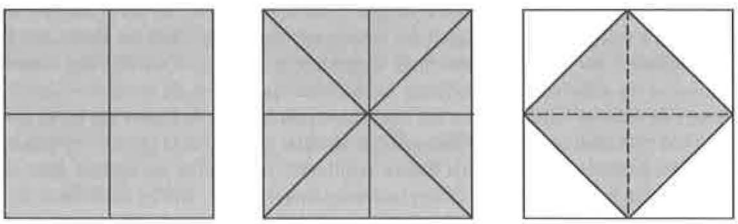


figure 2a) figure 2b) figure 2c)

La figure 2a) est un carré formé de quatre carrés unités, son côté mesure $2a$ et son aire mesure $4a^2$; on peut le recouvrir par huit triangles rectangles isocèles comme sur la figure 2b). En plaçant différemment ces triangles, on remarque que quatre d'entre eux peuvent former un carré, comme sur la figure 2c). La mesure du côté de ce dernier carré central est d. La mesure de l'aire de ce carré est d^2, c'est aussi la moitié de celle du grand carré d'aire $4a^2$, on en déduit que $d^2 = 1/2\ (4\ a^2) = 2a^2$ et que $d = a\sqrt{2}$.

Toute proportion gardée, nous pourrions ici citer Descartes : « ... Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné l'occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon, et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni de si cachées qu'on ne découvre. »

Le nombre $\sqrt{2}$ qui exprime le rapport entre les mesures de la diagonale du carré et de son côté est un nombre irrationnel (qu'on ne peut pas exprimer par une fraction). Voici quelques-une de ses approximations par des nombres décimaux : 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; 1,4142 ; 1,41421356237 (donnée par une calculatrice qui affiche douze chiffres)... Ces approximations sont toutes différentes entre elles et aussi du nombre – prononcé en français – « racine carrée de deux ». Les mathématiciens leur préfèrent l'écriture $\sqrt{2}$, plus courte et, surtout, exacte.

Les constructions géométriques à la règle et au compas permettent de représenter $\sqrt{2}$ et de nombreux autres nombres irrationnels par des segments. On s'est intéressé, depuis les Grecs, à la représentation d'un segment de même longueur qu'un cercle donné, mais sans succès. Il a fallu attendre la fin du XIXe siècle pour qu'on démontre que cette construction n'est pas possible (Lindeman 1882) et que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution au compas et à la règle.

Par des raisonnements un peu plus poussés, nous pourrions aussi représenter le nombre irrationnel $\sqrt{3}$, que nous rencontrons dans le triangle équilatéral. Ce serait, selon la figure 3, le rapport entre la hauteur d'un triangle équilatéral composé de quatre modules 1 « triangle équilatéral de côté a » et le côté d'un carré unité. (Si le carré de côté $2a$ peut être construit avec 4 modules carrés du matériel, le carré de côté $\sqrt{3}$ n'est qu'hypothétique, il ne figure pas dans les pièces de *POLYDRON*. On se réfère ici à la relation de Pythagore.)

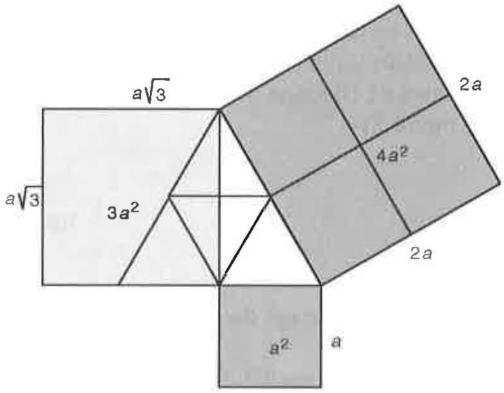


figure 3

Notre parcours va permettre d'illustrer encore quelques applications des transformations géométriques que sont la symétrie et les similitudes (agrandissements ou réductions) qu'on retrouve aussi dans d'autres domaines que les mathématiques, en architecture, en optique, en musique et plus généralement dans de nombreuses lois de l'Univers.

Une première de ces transformations est l'agrandissement de facteur 2 : pour le carré, du « petit » carré unité au « grand », la mesure du côté double, (de a à $2a$), l'aire quadruple, comme nous l'avons vu précédemment, (de a^2 à $4a^2$) et le volume, lui, est multiplié par 8 (de a^3 à $8a^3$), comme le montre la figure 4.

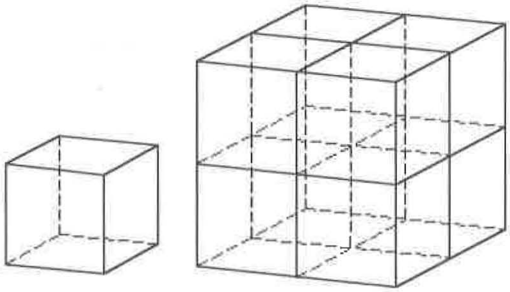


figure 4

Etape 1 : une construction du cube (a^3 et A^3)

Nous formons un « petit » cube (que nous désignerons par la suite par a^3) avec 4 ensembles de 3 triangles rectangles isocèles (module 4) : 3 de chacune des trois couleurs des modules *POLYDRON* (jaune, rouge, bleu vert). Ce cube unité pourrait aussi être construit avec 6 carrés, (figure 4) mais nous désirons mettre en évidence la structure sur laquelle nous allons nous appuyer par la suite.

Nous construisons ensuite un grand cube (que nous désignerons par A^3 ou $8a^3$) en utilisant 3 carrés unités (module 2) et 6 triangles rectangles de chacune des quatre couleurs. (Voir figure 5)

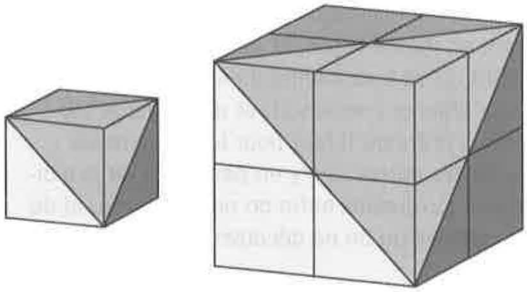


figure 5

Etape 2 : le découpage du cube (a^3)

Nous enlevons au petit cube de l'étape précédente un « coin » formé de 3 triangles d'une même couleur. Nous fermons les faces ouvertes par des triangles équilatéraux de côté $d = a\sqrt{2}$ » (module 5). (voir figures 6)

L'aire d'une base de la petite pyramide détachée mesure $1/2a^2$, la hauteur correspondante mesure a. Le volume de cette pyramide est $1/3(a)(1/2a^2) = 1/6\ a^3$

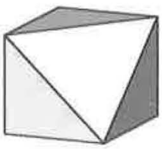


figure 6 a)
La partie restante
($5/6\ a^3$)

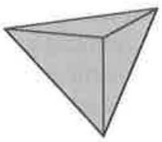


figure 6 b)
la pyramide détachée
($1/6\ a^3$)

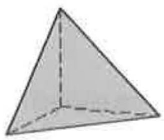


figure 6 c)
la pyramide détachée
dans une autre position ($1/6\ a^3$)

Nous construisons un nouveau solide en assemblant quatre parties identiques à la partie restante du cube précédent (figure 6a) selon le modèle décrit à la figure 7.

Nous utiliserons ce solide ultérieurement.

...

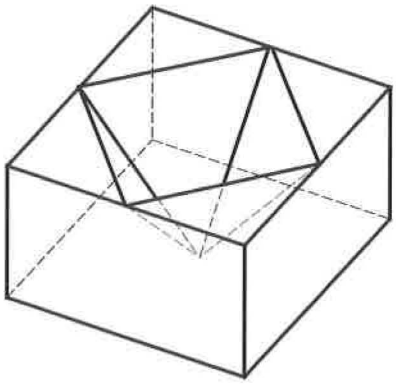
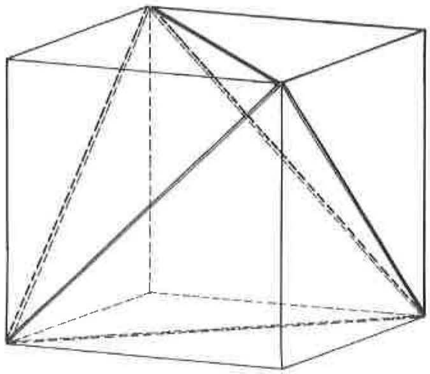


figure 7

Etape 3 : du cube au tétraèdre

Nous retirons du grand cube de l'étape 1, 4 pyramides de base $A^2/2$ et de hauteur A. Inscrit dans le cube, nous découvrons un tétraèdre. Nous le construisons avec 16 triangles équilatéraux « $\sqrt{2}$ » (module 6) : 4 pour chacune des faces. Le cube A^3 est ainsi décomposé en quatre pyramides, dont le volume total est $4(1/6\ A^3) = 2/3\ A^3$ et un tétraèdre régulier inscrit dans le cube, dont le volume vaut donc $A^3 - 2/3\ A^3 = 1/3\ A^3$.

figure 8



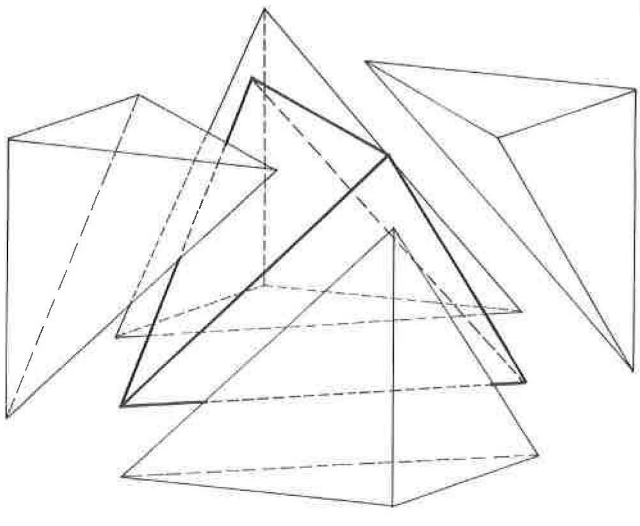


figure 9

Etape 4 : pyramide à base carrée

En assemblant les 4 pyramides de base $A^2/2$ et de hauteur A, nous formons une pyramide à base carrée D^2, de hauteur A, de volume $2/3\ A^3$, comme nous l'avons vu aux étapes 2 et 3.

Nous assemblons aussi 4 petites pyramides de base $a^2/2$ et de hauteur a.

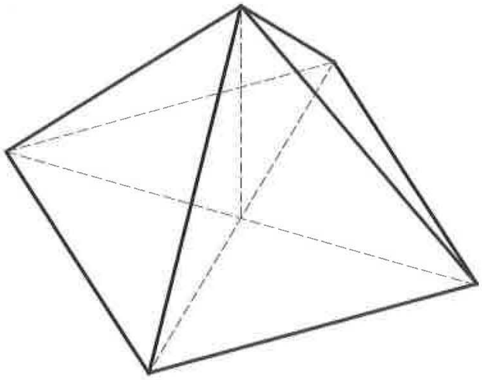


figure 10

Etape 5 : de la pyramide au prisme oblique

En assemblant la pyramide à base carrée (étape 4) et le tétraèdre (étape 3), nous formons un prisme de base triangulaire équilatérale (constituée de 4 triangle équilatéraux « $\sqrt{2}$ »), dont la hauteur est celle du tétraèdre. Une des faces obliques de ce prisme oblique est la « base » carrée de la pyramide de l'étape 4, les deux autres faces obliques sont des losanges, constitués de deux triangles équilatéraux : faces du tétraèdre. Comme ce prisme est constitué des cinq mêmes solides que ceux du grand cube de l'étape 3, son volume est le même que celui du cube : A^3.

Si on calcule l'aire de la base du prisme ($d^2\sqrt{3}$) et sa hauteur ($2\sqrt{6}/3d$) ou si on les tire d'un formulaire, la formule du volume d'un prisme (base x hauteur) permet de retrouver le volume précédent, par un calcul algébrique, à partir du modèle géométrique.

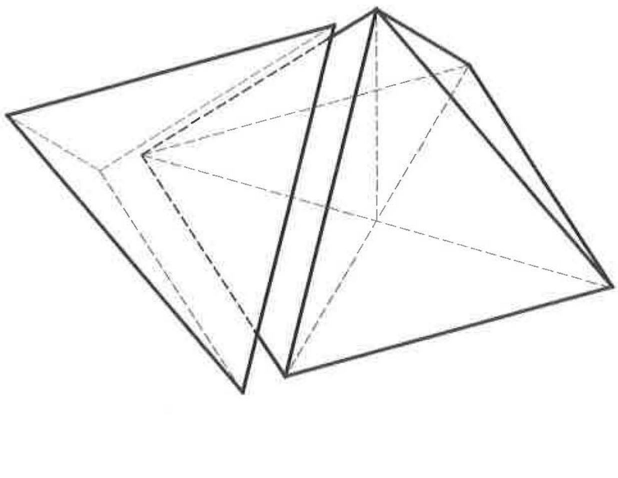


figure 11

Etape 6 : du tétraèdre à l'octaèdre

Du tétraèdre de l'étape 3, nous pouvons extraire 4 petits tétraèdres et découvrir **l'octaèdre, inscrit dans le cube et dans le tétraèdre**. Ce passage du cube à sa figure duale, l'octaèdre, par l'intermédiaire du tétraèdre a quelque chose de « merveilleux » et certains pourraient y voir une préfiguration des « symétries continues » des physiciens de la relativité.

Plus modestement, on peut ici constater que la dualité entre le cube et l'octaèdre se constate par l'identité de leurs axes et plans de symétrie et de leurs axes de rotation, par le fait que chaque face du cube correspond à un sommet de l'octaèdre et, réciproquement, que chaque face de l'octaèdre correspond à un sommet du cube. On peut aussi penser à une répétition à l'infini de la chaîne : cube – tétraèdre – octaèdre – cube – tétraèdre – octaèdre – ... en imaginant le petit cube (a^3), maillon suivant, qu'on pourrait inscrire dans l'octaèdre de la figure 12.

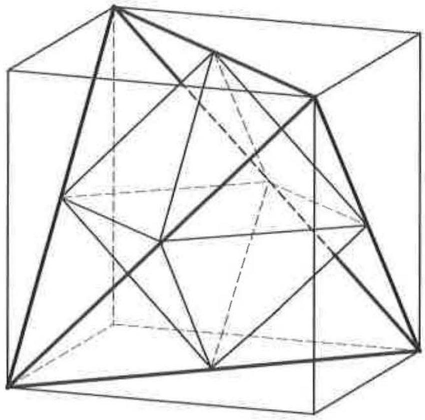


figure 12

Pour le calcul du volume, on retrouve les similitudes et les facteurs correspondant aux dimensions : chacun des quatre petits tétraèdres extraits est l'image du grand par une similitude de facteur 1/2 : entre la longueur des arêtes, le rapport est 1/2, entre les aires, le rapport est 1/4 et entre les volumes, le rapport est 1/8.

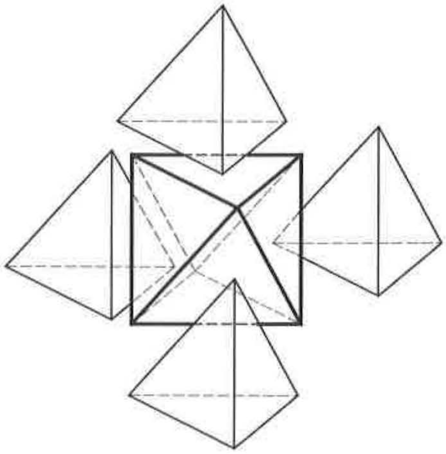


figure 13

Le volume du tétraèdre est le 1/3 du volume du grand cube (étape 3) : $1/3A^3$

On retire 4 petits tétraèdres dont le volume est, pour chacun, 1/8 du grand, il n'en reste donc que la moitié : $1 - 4(1/8) = 1 - 1/2 = 1/2$

La moitié du tiers est le sixième : $(1/2)(1/3) = 1/6$.

Le volume de l'octaèdre est donc égal à 1/2 de celui du tétraèdre et à 1/6 de celui de l'octaèdre : $1/6A^3$.

Etape 7 : de la pyramide au « sablier »

Nous reprenons l'assemblage de l'étape 2 de notre parcours mathématique. Cet assemblage se présente sous forme de parallélépipède avec, en négatif, une pyramide à base carrée.

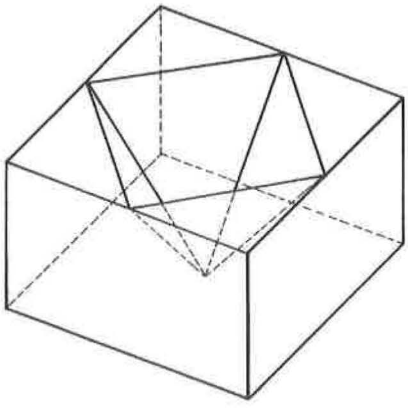


figure 14

Nous construisons cette pyramide en positif. Elle comprend 4 petites pyramides, base $a^2/2$, hauteur a. Son volume correspond à 2/3 a^3 4 (1/6 a^3).

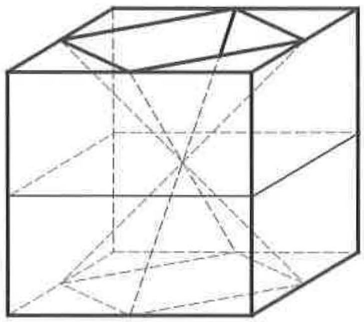


figure 15

Etape 8 : rapport de volumes

Nous avons déjà vu que 8 cubes a^3 forment un grand cube A^3.

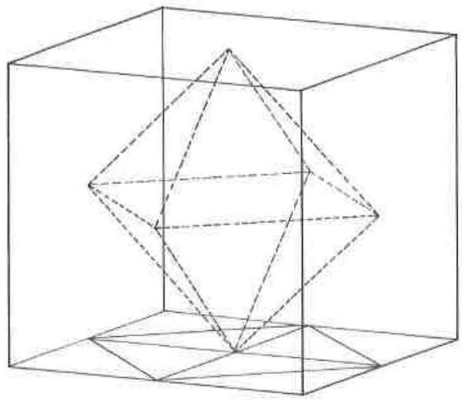
En détachant de chaque petit cube 1/6 de son volume (étapes 2 et 7), nous créons un octaèdre en négatif (figure 16).

Les 8 pyramides enlevées au cube de volume 1/6 a^3 forment un octaèdre régulier. Son volume est $8(1/6\ a^3) = 8/6\ a^3 = 1/6(8\ a^3) = A^3$.

Nous retrouvons ici le résultat de l'étape 6 :
le volume de l'octaèdre régulier inscrit dans le cube est le 1/6 du volume du cube.

On remarque aussi sur la figure 16, comme on l'avait vu dans la figure 12, que les 6 sommets de l'octaèdre sont les milieux des 6 faces du cube, et que, si on imaginait un petit cube inscrit dans l'octaèdre, les 8 sommets de ce cube seraient les milieux des 8 faces de l'octaèdre, illustrant la dualité de ces deux polyèdres réguliers.

Nous construisons un parallélépipède de base carrés ($d^2 = 2a^2$), de hauteur A, avec 8 triangles rectangles isocèles et 8 rectangles (modules 2 et 4 *POLYDRON*). Son volume est $A\ 2a^2 = 2a2a^2 = 4a^3$. L'octaèdre dont les 8 faces sont des triangles équilatéraux « $\sqrt{2}$ » (module 5) est inscrit dans le parallélépipède. Le volume de l'octaèdre, considéré ici comme celui de deux pyramides à bases carrées, est le 1/3 du volume du parallélèpipède.



figures 16

Une fois encore, un calcul nous permet de retrouver les résultats précédents : $1/3(4a^3) = 1/6(8a^3) = 1/6A^3$.
La modélisation géométrique vient de nous donner une nouvelle illustration du calcul algébrique.

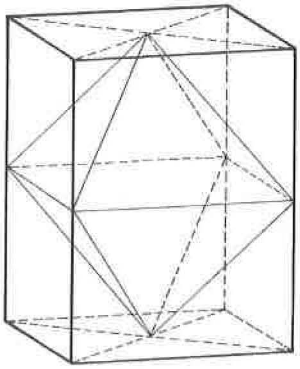


figure 17

Etape 9 : l'interdépendance des formes

Le volume de l'octaèdre étoilé inscrit dans le cube est égal à 1/2 du volume du cube.

En ajoutant à chacune des 8 faces de l'octaèdre régulier un tétraèdre, nous formons l'octaèdre étoilé, un polyèdre d'une beauté et d'une conception géométrique parfaites. Ce polyèdre, un ensemble de deux tétraèdres imbriqués, s'inscrit merveilleusement dans le cube.

Les 8 petits tétraèdres ajoutés à l'octaèdre ont ensemble le même volume que le grand tétraèdre inscrit dans le cube : $1/3\ A^3$ (étape 6). Nous y additionnons le volume de l'octaèdre, $1/6\ A^3$: $1/6\ A^3 + 1/3\ A^3 = 1/2\ A^3$ pour le volume de l'octaèdre étoilé.

Une démonstration complémentaire donne la preuve du rapport entre les volumes du cube et de l'octaèdre étoilé. Pour recréer un cube A^3 à partir d'un octaèdre étoilé, nous devons y ajouter 24 pyramides de volume $1/6a^3$ (voir étape 2), l'équivalent de 4 cubes a^3.

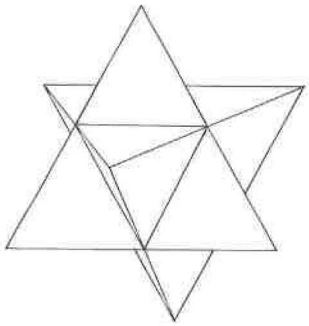


figure 18

Les quelques lettres de l'alphabet suffisent à exprimer un savoir universel. Il en est de même de quelques principes mathématiques, de quelques formes géométriques élémentaires.

L'importance que nous y accordons est donc pleinement justifiée.

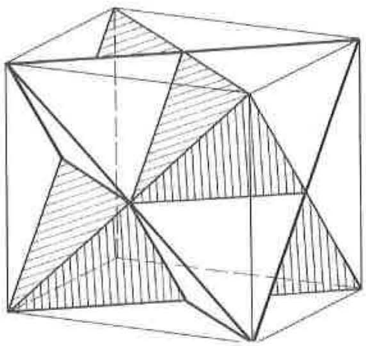


figure 19