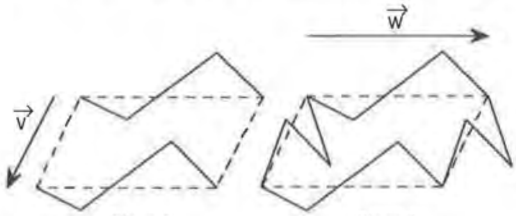
LE COIN DES PAVAGES (3)

Michel Brêchet

Les pavages par rotations d'un quart de tour et par symétries centrales ont retenu notre attention dans les numéros 207 et 208 de la revue. Pour ce troisième épisode, nous nous intéresserons au recouvrement du plan à l'aide d'une même figure, par translations uniquement. L'illustration de la page de couverture de ce numéro s'apparente à un tel recouvrement. S'apparente seulement, car deux figures sont en jeu, et non une seule. Construites à partir d'un réseau quadrillé, elles ont des formes très proches l'une de l'autre, mais elles ne sont pas superposables.

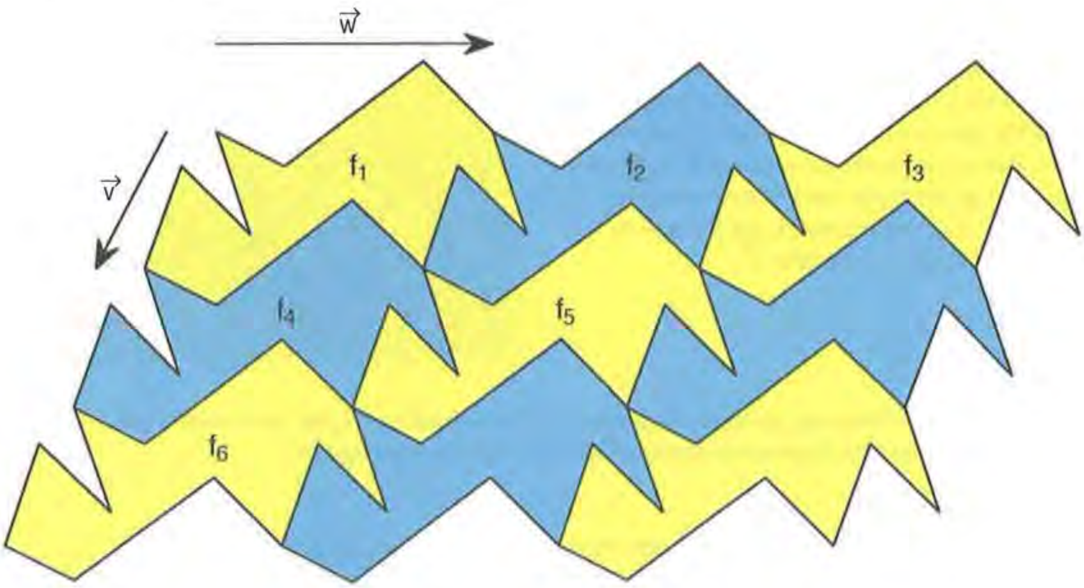
Les pavages par translations : comment faire ?

- Construire un parallélogramme.
- Déformer de la même façon deux de ses côtés opposés (étape 1, selon le vecteur $\vec{v}$).
- Faire de même avec l'autre couple de côtés opposés (étape 2, selon le vecteur $\vec{w}$).
- Paver le plan par translations.



Etape 1 Etape 2

Motif obtenu



Analyse du motif

Par construction, les polygones voisins d'une même ligne ou d'une même colonne sont images l'un de l'autre par translation :

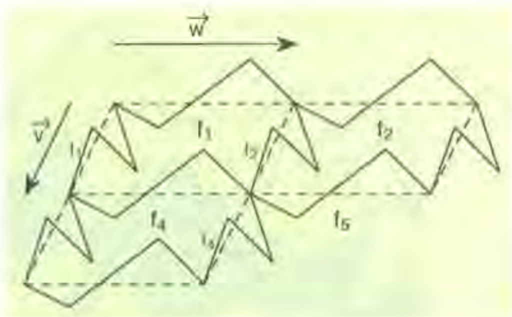
Première ligne	Deuxième ligne	...	Première colonne	Deuxième colonne	...
$f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_5$	...	$f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_5$	...
$f_2 \xrightarrow[T(\overrightarrow{w})]{} f_3$	...	...	$f_4 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v})]{} f_6$	...	...
...	...	...	...	...	...

En conséquence, la composée de deux translations étant une translation dont le vecteur est la somme des vecteurs des translations données, on a : $f_1 \xrightarrow[T(2\cdot\overrightarrow{w})]{} f_3$, $f_1 \xrightarrow[T(2\cdot\overrightarrow{v})]{} f_6$, $f_1 \xrightarrow[T(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})]{} f_5$, ...

Pourquoi ça marche ?

Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux car deux lignes correspondantes sont images l'une de l'autre par translation.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle s'emboîtera avec f_4. En effet, par construction, la ligne l_2 est image de l_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$ et la ligne l_4 est image de l_1 par translation de vecteur $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. Par conséquent, l_4 est l'image de l_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$.

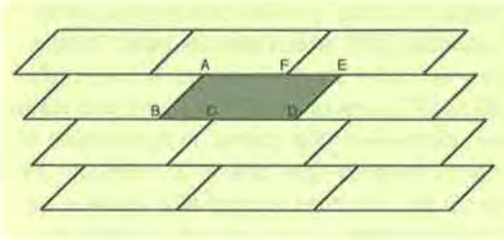


On peut bien sûr faire une démarche analogue en considérant que f_5 est construite à partir de f_4. Ce même type de raisonnement s'applique également aux autres figures.

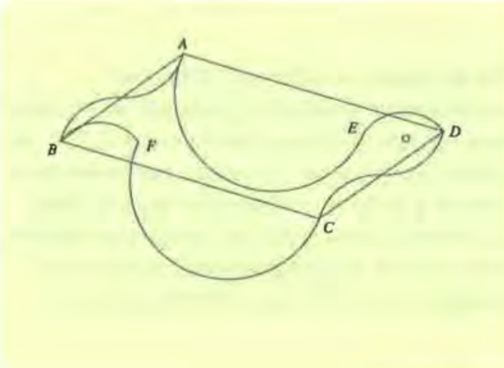
Selon la méthode décrite jusqu'à présent, deux lignes brisées opposées du pavé de base sont toujours images l'une de l'autre par une seule translation. Cependant, des parallélogrammes « décalés » pavent également le plan. Du coup, il est possible de déformer une paire de côtés opposés d'un parallélogramme – mais seulement une paire – selon deux translations et non une seule.

Dans ce pavage, on peut considérer:

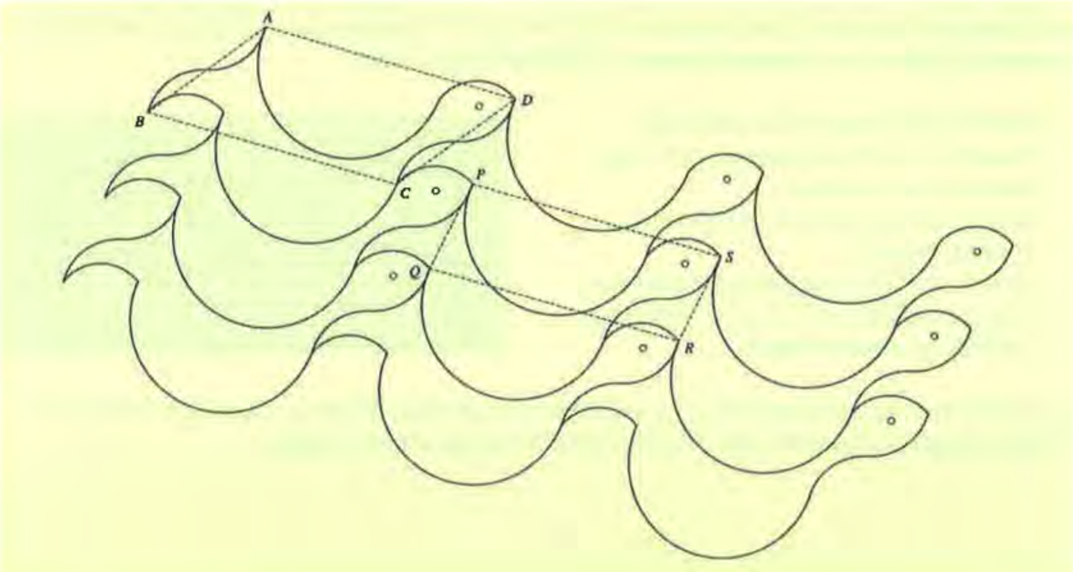
- que les côtés AB et ED sont images l'un de l'autre par une seule translation, de vecteur $\overrightarrow{AE}$;
- qu'une translation amène le segment AF sur le segment CD et qu'une une autre translation amène FE sur BC.



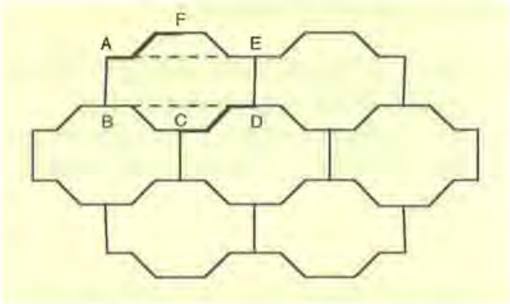
En exploitant ce résultat, qui à première vue paraît bien banal, on peut recouvrir sans trou ni superposition une surface plane. Dans l'exemple ci-contre, la ligne courbe d'extrémités A et B et celle d'extrémités D et C sont images l'une de l'autre par une seule translation, de vecteur $\overrightarrow{AD}$. Les déformations des côtés AD et BC ne sont en revanche pas images l'une de l'autre par une translation unique. En effet, l'arc AE a pour image l'arc FC et l'arc ED a pour image l'arc BF. Deux translations sont donc en jeu dans cette ultime phase.



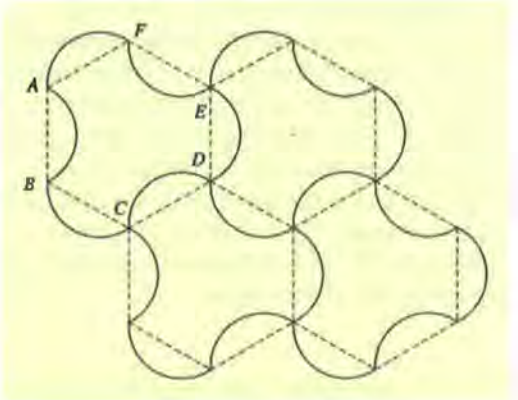
On peut ainsi générer facilement des pavages fort divers les uns des autres. Leur analyse montre en dernier ressort qu'ils auraient aussi pu être créés – mais avec plus de subtilité dans le cas où l'on souhaite obtenir des pavés figuratifs – selon la méthode décrite en début d'article, à savoir par le biais de deux translations de vecteurs parallèles aux côtés du parallélogramme de base (ici le parallélogramme PQRS).



Relevons encore que de nombreuses places publiques sont recouvertes de pavés images l'un de l'autre par translations. Ici, les côtés AB et DE du rectangle ABDE n'ont subi aucune déformation. Par contre, la ligne brisée AF a pour image la ligne brisée CD, alors que FE va sur BC. En outre la ligne AFE possède un axe de symétrie, ce qui accroît le degré de régularité du pavage.



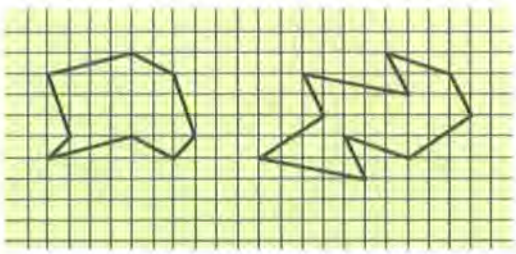
On terminera ce petit tour d'horizon, certainement incomplet d'ailleurs, en signalant que la page de couverture du numéro 207 de *Math-Ecole* montre un pavage par translations réalisé à partir d'un hexagone régulier. Mais on pourrait aussi y voir un pavage par rotations d'un tiers de tour, car les déformations sont images deux à deux par rotations de 120°.



En classe

La translation est certainement la transformation du plan la plus facile a appréhender, car elle conserve les directions et les longueurs. Nul besoin d'une grande gymnastique de l'esprit pour reconnaître deux figures images l'une de l'autre par un tel mouvement. Créer un motif périodique à l'aide d'une seule figure et par translations uniquement est donc une activité qui est à la portée des élèves dès l'âge de 13 ans, voire bien plus jeunes. En travaillant sur du papier quadrillé et en utilisant au besoin une paire de ciseaux, ils pourraient tour à tour :

- paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre, ou pourquoi pas d'une autre de leur invention ;
- décrire les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- générer une figure permettant de paver le plan par translations, s'ils n'ont pas accompli cette tâche précédemment.



La recherche d'un pavé adéquat laisse aux élèves une certaine liberté de manœuvre. C'est sans doute la phase la plus motivante de cette petite séquence d'apprentissage.