L'ANALYSE À PRIORI, UN OUTIL POUR L'ENSEIGNANT[1]

Roland Charnay[2]

INTRODUCTION

Le métier d'enseignant a fortement évolué. On peut, de façon un peu caricaturale, résumer cette évolution de la façon suivante. Pendant longtemps, le maître enseignait un savoir et, pour cela, présentait des solutions que l'élève devait ensuite appliquer dans des problèmes. Cette période est loin d'être révolue. J'entendais, récemment, un enseignant dire à des élèves qui hésitaient devant un problème : *« Vous connaissez pourtant la règle du jeu. Quand je vous donne un problème, ce n'est pas par hasard. Il a quelque chose à voir avec ce qu'on a étudié, il n'y a pas longtemps ».*

Aujourd'hui, on demande au maître d'enseigner en proposant d'abord aux élèves des problèmes dont la résolution nécessite d'inventer des solutions originales que le maître cherche ensuite à faire évoluer pour aboutir à des éléments de savoir nouveaux et à des solutions plus élaborées.

On retrouve cela dans les nouveaux programmes pour l'école primaire, en France : *« Élaborées comme réponses efficaces à des problèmes, les premières notions mathématiques sont identifiées, puis étudiées dans le but d'être utilisables pour résoudre de nouveaux problèmes... Dans certains cas, la résolution des problèmes est organisée par l'enseignant pour, à partir des **solutions personnelles** élaborées par les élèves, déboucher sur une nouvelle connaissance (notion ou procédure). »* L'élaboration de ***solutions personnelles*** précède ainsi l'apprentissage des ***solutions expertes***.

Dans ce contexte, l'enseignant est amené à prendre de nombreuses décisions : micro-décisions dans le cadre de la gestion d'une séance en classe (mais qui peuvent avoir des effets importants !) et macro-décisions, notamment dans l'organisation de son enseignement, dans le choix des situations... On peut ici retenir des décisions de trois types :

- celles qui sont relatives au choix et à l'aménagement des « bons » problèmes ;
- celles qui sont relatives à la gestion, dans les phases de mise en commun, des solutions personnelles élaborées par les élèves ;
- celles qui sont relatives aux moyens de faire évoluer ces solutions personnelles, en particulier vers les solutions expertes visées.

L'ANALYSE A PRIORI

Dans ce cadre **l'analyse a priori** constitue un des outils professionnels d'aide à la décision, en permettant d'anticiper certaines réactions d'élèves et donc d'orienter certains choix de l'enseignant. Il n'existe pas à ma connaissance de définition reconnue de l'analyse a priori, bien que l'expression soit souvent utilisée.

Certains utilisent l'expression lorsqu'il s'agit de conduire « une analyse épistémologique et didactique qui précède nécessairement la construction d'ingénieries didactiques » : place et rôle de la notion en mathématiques,

1. Cet article est tiré du troisième volume des actes des rencontres sur le Rallye Mathématique Transalpin, qui vient de paraître (voir pp. 63-64). Une traduction en italien figure dans cet ouvrage. La rédaction de *Math-Ecole* remercie l'association ARMT de lui laisser publier ces pages.

2. Roland Charnay, de l'IUFM de Bourg en Bresse, est bien connu en Suisse romande par ses nombreux passages dans nos cantons, par la collection ERMEL dont il est le directeur et par sa participation active dans le cadre du RMT qui se déroule régulièrement dans le département de l'Ain. Il est aussi l'un des auteurs du nouveau manuel « Cap maths », présenté dans ce numéro en pages 39 à 47.

place dans l'enseignement des mathématiques, conceptions initiales des élèves, objectifs visés. Nous parlerions plutôt, dans ce cas, d'analyse préalable, l'analyse a priori se situant au moment du choix et de la conception d'une situation située à l'intérieur d'un processus déjà défini.

L'analyse a priori d'une situation est, pour nous, un travail d'hypothèses faites par l'enseignant, orientées vers :

1. les démarches, stratégies, raisonnements, procédures, solutions que l'élève peut mettre en œuvre dans la situation qui lui est proposée compte tenu de ses connaissances supposées : peut-il s'engager dans le problème ? a-t-il des critères pour savoir s'il a réussi ou non ?

2. les difficultés qu'il peut rencontrer et les erreurs qu'il peut commettre : en particulier, la situation permet-elle à l'élève d'engager ses conceptions erronées ?

3. l'étude des variables didactiques de la situation et les effets sur le travail de l'élève des modifications que l'enseignant peut apporter à la situation : en particulier, la notion ou la procédure visée est-elle l'outil le plus approprié pour résoudre le problème posé ?

4. l'étude des variables pédagogiques, liées à des choix d'organisation de la classe ou d'interventions de la part de l'enseignant, et de leurs effets sur le travail des élèves : en particulier, quelles sont les organisations ou les interventions qui feraient obstacle au travail souhaité de l'élève ?

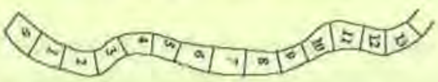
Cette définition est compatible avec l'usage qui est fait de cette expression dans le rallye mathématique, mais en allant plus loin, ce qui s'explique par le fait que, dans le cadre du rallye, l'exploitation didactique des problèmes proposés n'est pas pris en charge[3].

L'exemple d'un problème du rallye 2002 (*En sautant*, problème 4, finale 2002)

Rappelons l'énoncé de ce problème proposé pour les niveaux 3, 4 et 5 (de 8 à 11 ans).

EN SAUTANT

Une grenouille, un kangourou et un lièvre se déplacent sur la « piste » des nombres.



Ils partent tous de la case 0.

La grenouille fait toujours des sauts de trois cases, (elle arrive donc sur la case 3 après son premier saut), le kangourou fait toujours des sauts de six cases et le lièvre des sauts de quatre cases.

À son dernier saut, chaque animal arrive sur la dernière case du parcours.

Chaque animal laisse ses traces sur les cases où il pose ses pattes.

À la fin du jeu, il y a 9 cases qui contiennent à la fois les traces des trois animaux.

Indiquez le numéro de la dernière case de la piste.
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Et l'analyse a priori qui accompagnait cet énoncé :

« **Domaine de connaissances**
– Arithmétique : multiples, suites de nombres

3. Ceci est un aspect que l'ARMT a mis en discussion, soit sous forme de débat interne – voir le thème de la rencontre de Parma (*Exploitations du RMT pour la classe : du problème à la situation didactique*), soit dans les cours de formation organisés dans le cadre de plusieurs sections.

Analyse de la tâche

- Remarquer que la grenouille, le lièvre et le kangourou aboutissent après chaque saut sur des cases notées par des multiples respectifs de 3, de 4 et de 6.

- Noter, sur un ruban numérique ou dans un tableau, les cases sur lesquelles chaque animal laisse ses traces (par des couleurs ou des lettres) et constater que celles qui portent les traces des trois animaux sont celles des multiples de 12 (ppmc de 3, 4 et 6). En déduire que, en comptant la case de départ, la dernière case du parcours sera la case 96 (8 x 12 ou 12 + 12 + 12 + ...).

- Ou dessiner un ruban des nombres et y noter toutes les traces des animaux et, par comptage des 9 cases portant les trois traces, trouver que la dernière case est celle du nombre 96.

Cette analyse propose quelques procédures correctes que les élèves peuvent utiliser pour résoudre ce problème. Elles peuvent être distinguées de la façon suivante (qui répond au point 1 de l'analyse a priori) :

P_1 : réalisation effective du déplacement de chaque animal (par exemple en utilisant des pions) ou schématisation de celle-ci (ce qui peut servir de procédure d'entrée dans le problème) : si on la mène à son terme, cette procédure nécessite de dessiner la piste jusqu'à la case 98 au moins ;

P_2 : simulation des sauts et écriture des étapes de chaque animal, par comptage de *n* en *n* ou par additions itérées du type : 3 + 3 + 3 + ..., puis recherche des 9 étapes communes ;

P_3 : procédure identique, en utilisant la suite des produits du type 3k... (utilisation implicite de la suite des multiples de 3 de 4 et de 6) ; l'utilisation des suites de multiples pourrait également être explicite ;

P_4 : constater que la 1e case commune (autre que 0) est 12 et que les suivantes vont de 12 en 12, et utiliser les procédures P_2 et P_3 avec 12 ;

P_5 : mathématiser le problème en cherchant explicitement le ppcm de 3, 4 et 6 puis chercher le produit par 8 de ce ppcm.

Le choix des nombres permet que toutes ces procédures puissent être mises en œuvre avec un coût raisonnable.

La notion de **procédure experte** dépend de ce qui peut être visé à un niveau donné, compte tenu des connaissances travaillées au niveau considéré. Dans le cadre des programmes français :

- la procédure P_5 peut constituer un niveau d'expertise pour la fin du collège,

- les procédures P_3 et P_4 peuvent être visées au cycle 3, c'est-à-dire au niveau auquel était proposé le problème pour la finale du rallye.

D'une certaine manière, l'attribution des points complète cette analyse, en signalant des réponses incomplètes ou des erreurs possibles (point 2 de l'analyse a priori).

« Attribution des points

4 Réponse correcte (96) bien justifiée (avec des calculs ou par un dessin détaillé ou liste des multiples de 12, ...)

3 Réponse 108 (la case 0 n'est pas comptée) ou 120 (cases d'arrivée et de départ non comptées) mais bien justifiées

2 Réponse 96 sans aucune explication
ni dessin,
ou les neuf cases
ou une ou deux erreurs dans le comptage
ou le marquage des sauts

1 Plus de deux erreurs dans le comptage ou le marquage des sauts

ou réponse 108 ou 120 sans explications

0 Incompréhension du problème

Les erreurs peuvent concerner :

- le choix d'une procédure inappropriée (codage 0),
- la gestion des procédures P1 ou P2 (codages 1 et 2),
- la non-prise en compte des cases départ et/ou arrivée (codages 3)

Les erreurs dans la mise en œuvre des procédures P_3 ou P_4 (calculs de multiples) ou P5 (recherche du ppcm) ne sont pas envisagées explicitement.

L'intérêt de ce premier travail d'analyse a priori est évident pour l'enseignant et donc pour la formation des enseignants. On peut le décliner dans 4 directions :

- aide à l'observation : la mise à plat des différentes procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre permet d'identifier plus rapidement celles qui sont effectivement utilisées par les élèves, y compris celles qui éventuellement n'ont pas été anticipées ;

- aide à la classification : à partir de l'observation réalisée pendant le travail des élèves, il devient possible d'opérer un classement des procédures ;

- aide à l'organisation et à la gestion de la mise en commun : choix de l'ordre dans lequel seront examinées les procédures, choix des productions les plus significatives, possibilités de rapprochement entre différentes productions, choix des élèves à solliciter...

- aide à l'aide : l'analyse a priori permet également d'anticiper les aides à apporter aussi bien pendant le travail de recherche (mise à disposition d'une piste plus longue pour certains élèves, par exemple) et surtout les évolutions possibles entre procédures qui peuvent être considérées comme voisines (allusion à la notion de Zone Proximale de Développement).

L'analyse a priori est également un outil indispensable pour envisager les aménagements à apporter à la situation pour provoquer l'apprentissage des élèves

Celle-ci permet d'envisager les différents problèmes qui peuvent être posés à partir de cette situation, par exemple :

- les sauts sont donnés, on cherche les cases communes dans un intervalle donné ;
- une ou plusieurs cases communes sont données, on cherche les sauts possibles.

Elle permet également d'identifier les variables didactiques de la situation et l'influence des choix possibles sur le travail des élèves (point 3 de l'analyse a priori). Ici, on peut considérer :

- la présence ou non de tout ou partie de la piste,
- la valeur de la case d'arrivée,
- les valeurs des sauts.

Sur une idée voisine, voici par exemple les choix effectués dans un ouvrage que j'ai mis au point pour des élèves de CE2[4], (Voir annexes) avec l'objectif d'amener les élèves à « comprendre a x b comme la position atteinte en se déplaçant, à partir de 0, de a en a (b fois) ou de b en b (a fois) », pour des élèves qui connaissent déjà la multiplication.

Les choix sont marqués dans les 3 étapes de la situation :

4. Cap Maths, CE2, guide des activités et fichier de l'élève, Hatier, 2002. Voir ANNEXES: supports de travail pour l'enseignant et pour les élèves.

- **étape 1 :** case arrivée : 24 ; sauts de 3, de 4 et de 5 ; piste suggérée, mais non visible en totalité
  - ◊ permettre à tous les élèves d'entrer dans la situation
  - ◊ laisser le choix de la procédure
  - ◊ y compris celle qui consiste à dessiner la piste
- **étape 2 :** case arrivée : 72 ; sauts de 8, de 9 et de 10 ; piste suggérée, mais non visible en totalité
  - ◊ dessiner la piste devient plus coûteux, mais pas impossible
  - ◊ le choix de nombres comme 8 et 9 rend les calculs de 8 en 8 ou de 9 en 9 un peu plus difficiles (mais pas insurmontables) et peut inciter au recours à la multiplication (table, d'autant plus que 8 x 9 = 72 !), le choix de 10 peut faciliter ce recours à la multiplication
  - ◊ ce choix est fait pour que procédures additives et procédures multiplicatives soient utilisées et que, au cours de la mise en commun, l'équivalence puisse être mise en évidence
- **étape 2 bis :** le guide pour le maître suggère de poser la même question avec la case 160 et des sauts de 16 en 16, 4 en 4 et 20 en 20 si trop peu de procédures multiplicatives ont été utilisées à l'étape 2
- **étape 3 :** entraînement individuel (fichier)
- **étape 4 :** nouveau problème (recherche des sauts, la case d'arrivée étant connue), l'utilisation de procédures de déplacements effectifs ou additives devient maintenant beaucoup plus coûteuse.

On voit bien, pour l'auteur du dispositif, la nécessité de ce travail d'analyse a priori.

Ajoutons enfin l'analyse liée aux variables pédagogiques (point 4 de l'analyse a priori) :

- **étape 1 :** individuelle pour permettre à chacun d'entrer dans la situation et, pour l'enseignant, noter ceux qui, en particulier, confondent valeur du saut et nombre de sauts (le guide du maître suggère qu'une piste effective puisse être mise à disposition de ceux qui n'ont aucune procédure d'entrée)
- **étape 2 :** par équipes de deux pour favoriser échange sur les procédures et contrôle mutuel

EN FORMATION

L'intérêt en formation est double :

- montrer que certaines tâches importantes de l'enseignant se situent hors de la classe, et ne se limitent pas au travail de correction ;
- préparer l'enseignant à anticiper les effets de certains de ses choix, l'analyse a priori nécessitant de les situer non seulement par rapport à l'organisation du savoir (c'est ce que fait plutôt l'analyse préalable) mais par rapport aux interactions entre l'élève et le savoir : élève et savoir sont ainsi au centre de l'analyse a priori.

Plusieurs modalités de formation peuvent être proposées, illustrées à partir de l'exemple choisi :

- analyse a priori d'une situation (points 1 et 2) ;
- choix d'une mise en œuvre de la situation, notamment organisation de classe, matériel, aide (point 4) ;
- préparation de la mise en commun ;
- confrontation avec des travaux d'élèves : confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori ;
- modifications à apporter à la situation, en fonction d'un objectif d'apprentissage (point 3) ;
- analyse d'une proposition d'enseignement (cf. Cap maths CE2 – annexes) et décryptage des choix opérés par les auteurs.

ANNEXES

1. La fiche guide (Extrait du guide des activités pour le maître, Cap Maths, Hatier, 2002)

40 min — individuel, puis par équipes de 2

matériel par équipe :
- *fiche recherche 23*
- feuilles pour chercher

Activité 3 Rendez-vous sur une piste (1)

Il s'agit de trouver les différentes valeurs de sauts qui permettent d'atteindre une position donnée et de déterminer le nombre de sauts correspondant. Progressivement, le recours à la multiplication sera reconnu comme pertinent pour résoudre ce type de problème.

❶ Résolution individuelle du problème 1

Ce premier problème doit permettre à chaque élève de s'approprier la situation, au besoin en expérimentant effectivement les déplacements sur la piste.
Il est important de préciser au départ que le rendez-vous est réussi si les deux personnages se retrouvent exactement sur la même case et non sur des cases voisines.

Lors de la mise en commun, on se limite à enregistrer les réponses et procédures utilisées, sans privilégier de procédure particulière. C'est le problème suivant qui devrait inciter à recourir aux résultats connus de la table de multiplication.

Le premier problème a été choisi pour favoriser le plus grand éventail possible de procédures :
- déplacement effectif ;
- recours à l'addition itérée (ou au comptage de n en n), procédure en général la plus fréquente ;
- recours à la multiplication (résultats connus de la table).

Certains élèves confondent « longueur d'un saut » et « nombre de sauts ». Le recours à une expérience ou à une schématisation peut aider à lever cette ambiguïté.

❷ Résolution par équipes du problème 2

Les élèves doivent garder une trace écrite de la manière dont ils ont procédé car ils auront à en rendre compte lors de la mise en commun.
On s'intéresse cette fois-ci plus à l'efficacité des procédures qu'à leur variété.

Par exemple, certains auront encore compté ou additionné de 8 en 8 ou de 9 en 9 (ce qui est fastidieux), alors que d'autres auront utilisé le fait que $8 \times 9 = 72$, ce qui valide d'ailleurs les propositions de deux des personnages : 8 sauts de 9 et 9 sauts de 8 !
D'autre part, la facilité de calcul avec 10 aura permis à certains élèves de remarquer que $7 \times 10 = 70$ et $8 \times 10 = 80$, et que l'on ne peut donc pas atteindre 72 en sautant de 10 en 10.

Les autres recherches peuvent être proposées aux élèves plus rapides.

Dans ce 2ᵉ problème, la taille du nombre à atteindre et le fait de travailler par deux devraient inciter à recourir au calcul, voire favoriser l'utilisation de la multiplication.

S'il apparaît que trop peu d'élèves ont utilisé la multiplication pour résoudre le 2ᵉ problème, on proposera un 3ᵉ problème en augmentant sensiblement la taille du nombre à atteindre
Par exemple : 160, en proposant des sauts de 16 en 16, de 4 en 4 et de 20 en 20.

❸ Exercice sur fichier

- *fichier de l'élève p. 106, exercice 2*

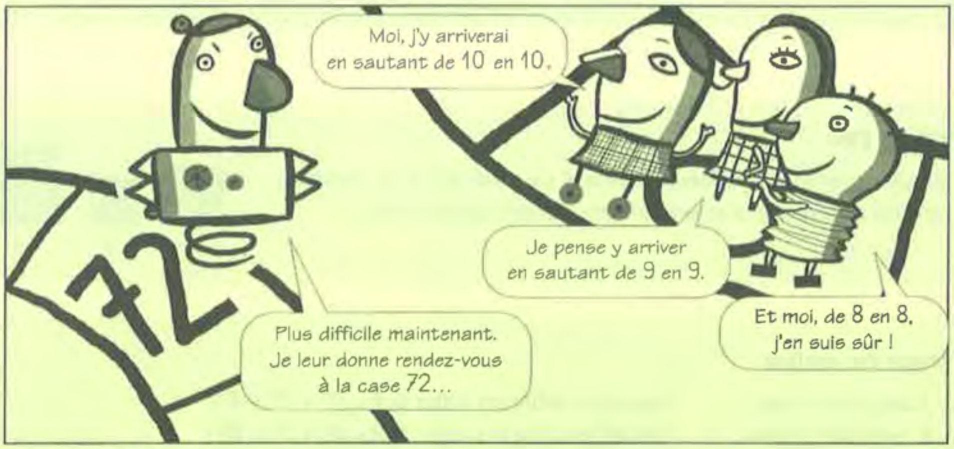
2. La fiche guide (Extrait des fiches photocopiables du guide des activités, Cap Maths, Hatier, 2002)

Fiche recherche 23

Rendez-vous sur une piste (1)

- Millie a-t-elle raison ? Si elle a raison, combien devra-t-elle faire de sauts pour rejoindre Idix ?
- Géomie et Plix pourront-ils rejoindre Idix à la case 24 en partant de la case 0 ?

Si oui, combien de sauts devront-ils faire chacun ?



- Ont-ils raison ?
- Trouve d'autres sauts possibles pour arriver à 72.

Aides, conseils

Tu peux écrire toutes les positions par lesquelles va passer chaque personnage, mais ce sera long. Cherche des solutions plus rapides.

Autre recherche

Trouve tous les sauts possibles qui permettent d'atteindre 54 en partant de 0.

3. L'extrait du fichier de l'élève (Extrait du fichier de l'élève, Cap Maths, Hatier, 2002)

Travail de grec

En utilisant la règle (non graduée), l'équerre et sans faire de calcul, construire un carré qui ait pour aire la somme des aires des trois carrés donnés.

Le temps des cerises

1, 2, 3 nous irons au bois… Quel est le chiffre des unités de $A = 1^{23} + 2^{31} + 3^{12}$?
4, 5, 6, cueillir des cerises… Quel est le chiffre des unités de $B = 4^{56} + 5^{64} + 6^{45}$?
7, 8, 9, dans un panier neuf… Quel est le chiffre des unités de $C = 7^{89} + 8^{97} + 9^{78}$?

[ndlr] Ces problèmes sont tirés de *Panoramath 3* (Voir p. 3 de couverture), ils viennent du « Rallye d'Auvergne »et sont destinés à des élèves de troisième et de seconde (degrés 9 et 10). Cette compétition n'est pas individuelle mais par classes entières, Les élèves ont à résoudre sept problèmes en deux heures. Les solutions doivent être rédigées. Une des solutions est présentée sous forme d'affiche.

Pour chaque problème, le jury évalue :
– l'exactitude de la (ou des) réponse(e) aux questions posées,
– l'argumentation,
– la présentation.

Le premier problème nous paraît intéressant pour rappeler le sens géométrique de la relation de Pythagore. Le second, contrairement à ce qu'on pourrait penser en première analyse, se résout de tête ou avec quelques notes. *Solutions dans le prochain numéro*