COURRIER DES LECTEURS

« ... *L'article paru dans* Math-Ecole *206 sur l'algorithme de Gauss permettant de calculer la date de Pâques nous a vivement intéressés. En cherchant à découvrir une année où la date de Pâques tomberait au plus tard, soit le 25 avril, nous avons découvert avec surprise que pour l'année 2076 la formule de Gauss donne la date du 26 avril!*

Une petite recherche sur internet nous apprend que la formule de Gauss amène au moins deux autres erreurs: en 1954 Pâques eut lieu le 18 avril alors que la formule donne le 25 avril et en 1981, la fête eut lieu le 19 avril au lieu du 26 avril prévu par la formule.

Nous apprenons aussi qu'il existe un autre algorithme, celui de Thomas O'Beime (c.f. ci-dessous), qui lui ne souffrirait d'aucune exception dans la même période limitant l'algorithme de Gauss (1900 à 2099).

Meilleures salutations.

Daniel Bussy et Cédric Ischi »

[ndlr] Le message précédent de deux lecteurs attentifs a été transmis à notre collègue du comité, Antoine Gaggero, en lui demandant une réponse. La voici :

« *Cher Carl Friedrich,*

Je vous écris pour vous donner des nouvelles du procédé que vous avez mis au point, à l'aube du 19ème siècle, pour calculer la date de Pâques. Je me suis permis de l'appliquer à la période où je vis, soit le laps de temps compris entre 1900 à 2076, et de présenter ce procédé au travers d'un article paru dans Math-Ecole *(numéro 206, pp. 26-27) Je vous l'avoue, cher Carl, j'ai fait une faute impardonnable pour un mathématicien !!! Je n'ai pas vérifié votre formule pour chacune des années de prétendue validité. Mais votre gloire et votre savoir faire ayant franchit les âges, il me semblait commettre un crime de lèse majesté en vérifiant votre formule.*

Cependant, deux lecteurs attentifs de Math-Ecole, *ont trouvé au moins trois failles dans votre formule, soit pour les années 1954, 1981 et 2076. Ma première réaction fut d'être scandalisé, voire outré, que l'on puisse vous mettre en doute. Mais, les preuves s'accumulant, je m'en suis fait une raison et je remercie Daniel Bussy et Cédric Ischi pour leur perspicacité et leur intérêt pour cet article.*

Votre toujours dévoué
Antoine Gaggero

Retour au présent :

Daniel Bussy et Cédric Ischi, ont trouvé sur Internet un procédé dû à Thomas O'Beirne qui donne des résultats plus conformes à la réalité :

1. Soit Y l'année. Soustrayez 1900 de Y et soit N la différence;
2. divisez N par 19. Soit A le reste;
3. divisez (7A + 1) par 19. Ne tenez pas compte du reste et soit B le quotient;
4. divisez (11A + 4 - B) par 29. Soit M le reste;
5. divisez N par 4. Ignorez le reste et soit Q le quotient;
6. divisez (N + Q + 31 - M) par 7. Soit W le reste;
7. la date de Pâques est 25 - M - W.
   Si le résultat est positif, le mois est avril. S'il est négatif ou nul, le mois est mars (en considérant 0 comme le 31 mars, –1 comme le 30 mars, –2 comme le 29 mars et ainsi de suite jusqu'à –9 pour le 22 mars).

Référence:
http://hypo.ge-dip.etat-ge.ch/www/math/html/node62.html

Comme je ne possède pas les calendriers des années incriminées, j'ai cherché sur Internet un calendrier universel. J'en ai trouvé un, sous la forme d'un logiciel libre, que l'on peut télécharger à l'adresse ci-dessous et qui confirme bien que la date de Pâques selon la formule de Gauss possède quelques inexactitudes alors que celle de O'Beirne est correcte.

Adresse du calendrier universel :

http://ramsesgen.online.fr/fr/ramcal.htm

Pour les amoureux de Excel, j'ai programmé cette nouvelle formule comme je l'avais fait pour celle de Gauss. Sur demande, je peux l'envoyer par courrier électronique (gaggero@hispeed.ch).

Voici, par exemple, la vérification pour l'année 1954 :

Excel + Gauss donne	**25/04/54**
Excel + O'Beirne donne	**18/04/54**
Le calendrier universel donne	**18 Avril 1954**

Pour l'année prochaine, les trois modes de calcul convergent vers le onze avril.

Antoine Gaggero »

FORMULE DE BRETSCHNEIDER

Monsieur Roland Somville, de Fontaine-l'Evêque (Belgique) nous signale une erreur dans notre numéro 206, p. 24 (« Voyage au pays des formules d'aires et de volumes »). La formule de l'aire S d'un quadrilatère en fonction de la longueur de ses côtés et de celle de ses diagonales est (avec l'exposant « 2 » que nous avions oublié) :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

Notre lecteur nous offre une démonstration de cette formule à l'aide des formules du cosinus appliquées à quatre triangles (tous les angles sont mesurés en degrés) :

$$\triangle \mathrm{AIB} : a^2 = \overline{AI}^2 + \overline{BI}^2 - 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \cos(180 - \hat{\alpha}) \qquad (1)$$
$$\triangle \mathrm{BIC} : b^2 = \overline{BI}^2 + \overline{CI}^2 - 2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{CI} \cdot \cos\hat{\alpha} \qquad (2)$$
$$\triangle \mathrm{CID} : c^2 = \overline{CI}^2 + \overline{ID}^2 - 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{ID} \cdot \cos(180 - \hat{\alpha}) \qquad (3)$$
$$\triangle \mathrm{AID} : d^2 = \overline{ID}^2 + \overline{AI}^2 - 2 \cdot \overline{ID} \cdot \overline{AI} \cdot \cos\hat{\alpha} \qquad (4)$$

On effectue ensuite membre à membre (1) – (2) + (3) – (4)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{BI} \cdot \cos\hat{\alpha} + 2 \cdot \overline{BI} \cdot \overline{IC} \cdot \cos\hat{\alpha} \\ &\quad + 2 \cdot \overline{CI} \cdot \overline{DI} \cdot \cos\hat{\alpha} + 2 \cdot \overline{AI} \cdot \overline{ID} \cdot \cos\hat{\alpha} \\ &= 2\overline{BI}\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{AI} + \overline{IC})}_{m} + 2\overline{ID}\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{AI} + \overline{CI})}_{m} \\ &= 2m\cos\hat{\alpha}\,\underbrace{(\overline{BI} + \overline{ID})}_{n} \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 &= 2mn\cos\hat{\alpha} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2mn} = \cos\hat{\alpha} \qquad (5)$$

Classiquement, en trigonométrie, on connaît la formule de l'aire d'un quadrilatère :

$$S = \frac{1}{2}mn\sin\hat{\alpha}$$

En élevant au carré et en remplaçant $\sin^2 \alpha$ par $1 - \cos^2$ on a :

$$4S^2 = m^2n^2(1 - \cos^2 \hat{\alpha})$$

En utilisant (5) :

$$\begin{aligned}
4S^2 &= m^2n^2\left(1 - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4m^2n^2}\right)\\
S^2 &= \frac{m^2n^2}{4}\left(1 - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{4m^2n^2}\right)\\
&= \frac{m^2n^2}{4} - \frac{(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{16}\\
&= \frac{4m^2n^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2}{16}
\end{aligned}$$

Finalement :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4m^2n^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$$

Ce lecteur nous fournit également une démonstration pour la formule de Brahmagupta citée dans le même article de *Math-Ecole* 206 :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)}$$

où p représente de demi-périmètre du quadrilatère : $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

Pour cela, on considère les triangles ABC et ADC :

$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{ABC} : m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{B} && (1)\\
&\triangle\mathrm{ADC} : m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\hat{D} && (2)\\
&a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\hat{B} - 2cd\cos\hat{D} && (3)
\end{aligned}$$

où (3) est obtenue en soustrayant (2) de (1). Comme S vaut la somme de l'aire des 2 triangles ABC et ADC, on a :

$$\begin{aligned}
&S = \tfrac{1}{2}ab\sin\hat{B} + \tfrac{1}{2}cd\sin\hat{D}\\
&4S = 2ab\sin\hat{B} + 2cd\sin\hat{D} \quad (4)
\end{aligned}$$

Par addition membre à membre de $(3)^2$ et de $(4)^2$ puis simplification on obtient :

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 - 16abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)\\
&= \frac{[2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)][2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)\\
&= \frac{[(a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2)][(c^2+2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)\\
&= \frac{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]}{16} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)\\
&= \frac{(a+b-c+d)}{2}\frac{(a+b+c-d)}{2}\frac{(c+d-a+b)}{2}\frac{(c+d+a-b)}{2} - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)\\
&= (p-c)(p-d)(p-a)(p-b) - abcd\cos^2\left(\frac{\hat{B}+\hat{D}}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où l'on obtient, en prenant la racine, la formule recherchée.