

## ÉDITORIAL

### VOUS AVEZ DIT, ASSOCIATIVITÉ ?

François Jaquet

La scène se passe en octobre dernier à Gênes, lors du Festival de la Science, au stand du RMT (Rally matematico transalpino) où les visiteurs peuvent résoudre quelques-uns de ses problèmes sans papier ni crayon mais avec le matériel approprié<sup>1</sup>.

Un jeune garçon, appelons-le Guglielmo pour l'occasion, est devant l'énoncé de *Il bersaglio*: (traduction) *Guillaume a atteint la cible avec toutes ses fléchettes, il compte ses points: 34! Jeanne joue et dit: « j'ai aussi 34 points, mais j'ai deux fléchettes de moins que toi ». Combien ont-ils chacun de fléchettes dans la cible? et dans quelles zones?*

Après de très longues recherches, hésitantes, Guglielmo a 6 pions rouges (flèches) dans la zone extérieure « 5 » de la cible. Il tient un septième pion rouge dans sa main droite, le pose dans la zone intermédiaire « 7 », hésite, le retire puis le pose dans la zone « 5 », compte mentalement et le retire définitivement du jeu.

Il prend alors un des six pions déjà posés et le déplace de la zone « 5 » à la zone centrale « 11 ». Les doigts de sa main gauche s'agitent et le pion aboutit finalement dans la zone « 7 » et y reste. Mais visiblement ce n'est pas encore la solution. Les doigts reprennent leur course et Guglielmo retire un nouveau pion de la zone « 5 » et le place en « 7 ». Le contrôle prend du temps: mouvements de doigts et de la tête, puis un sourire de soulagement se dessine, comme pour affirmer que les 4 pions dans le « 5 » et les deux dans le « sept » font bien 34. Guglielmo lève la tête et voit que je l'observe d'un air encourageant. Il relit l'énoncé et

prend des pions verts. Il en place 3 au centre, dans le « 11 », réfléchit et, rapidement, en retire un qu'il place dans la zone « 7 », je l'entends dire « venti-due (22) et je vois nettement les 5 doigts de la main gauche puis deux de la main droite se lever au rythme de la récitation mentale qui aboutit à « venti-nove » (29).

Il prend alors un quatrième pion vert, le met en « 7 » et lève 7 doigts successivement (il a mémorisé le 29 obtenu avec trois pions). Je ne l'entends pas prononcer le « trenta-sei » (36) de la fin du comptage, mais il s'est rendu compte qu'il était trop loin puisqu'il déplace ce dernier pion vers la zone « 5 ». Enfin! me dis-je en moi-même, il lui aura fallu pas moins de 10 minutes mais il y est arrivé!

Mais Guglielmo n'a pas fini, il ne sait pas encore qu'il est à 34. Les cinq doigts de sa main gauche se lèvent un à un; il y a un moment d'hésitation puis un recomptage total de 22 à 29 puis à 34, toujours sur les doigts. Guglielmo se redresse alors sur sa chaise et me lance un regard interrogateur. Je lui demande son âge. Il me répond qu'il a 11 ans et qu'il est en première année d'école secondaire (« prima media »). Je lui demande encore s'il pense que ce qu'il a trouvé est juste. Il hoche la tête de gauche à droite et hausse les épaules comme pour dire qu'il n'en est pas certain.

Sa mère, assise à côté de lui, muette durant toute la recherche, cherche une approbation dans mon regard. Je lui dis que son fils a trouvé la solution, mais qu'il a eu beaucoup de peine car il doit effectuer tous ses calculs sur ses doigts, comme par exemple  $22 + 7 = 29$ . Et je demande alors à Guglielmo, à brûle-pourpoint: combien font  $2 + 7$ ? Il me répond 9, immédiatement, avec l'air de dire « il y a longtemps que le sais! ».

Aujourd'hui, Guglielmo ne sait pas encore si sa solution est la bonne, est complète, ou s'il y en a d'autres. En particulier, il n'a pas vérifié une des clauses de l'énoncé disant qu'il y a deux flèches vertes de moins que de flèches rouges. Toute son énergie a été prise par le

1. Voir *Math-Ecole* 207, p. 27 à 34.

comptage un à un des points, seule stratégie possible lorsqu'on a un handicap aussi lourd en calcul. Il semble connaître sa table d'addition limitée aux nombres de un chiffre puisqu'il sait que  $2 + 7 = 9$ , mais cet outil n'est pas disponible dans le calcul  $22 + 7$ .

Mais, au fait, quelles sont les étapes du passage de  $2 + 7$  à  $22 + 7$  ?

- 1 Il faut d'abord être conscient que, selon les règles de notre système de numération de position,  $22$  se décompose en  $20 + 2$ .
- 2 Il faut ensuite être persuadé que la transformation précédente n'affecte pas l'opération et que, par conséquent,  $22 + 7 = (20 + 2) + 7$ . Est-ce si évident ?
- 3 Il y avait deux termes,  $22$  et  $7$ , auparavant. Il y en a maintenant trois :  $20$ ,  $2$  et  $7$ . Et en outre, on est passé d'une à deux additions, successives. D'une part, une règle usuelle, mais implicite et abusive, veut qu'on opère toujours de gauche à droite, ce qui nous ferait revenir à  $22 + 7$ . De l'autre, une propriété mathématique dit que l'ordre dans lequel on effectue les deux additions n'affecte pas le résultat, c'est-à-dire, en langage conventionnel :  $(20 + 2) + 7 = 20 + (2 + 7)$ . Le terme « associativité » peut paraître bien savant, l'écriture correspondante bien abstraite, mais il existe des manières plus abordables d'en parler avec les élèves, de faire constater qu'on peut « mettre ensemble » le premier et le deuxième ou le deuxième et le troisième. Peut-être que Guglielmo n'a jamais été mis en garde contre la règle usuelle qui constitue un tel obstacle pour lui, peut-être qu'il n'a jamais dû formuler, dans son langage, la règle d'associativité de l'addition ?
- 4 La difficulté franchie, on additionne d'abord le  $2$  et le  $7$ , pour obtenir  $20 + 9$ . De là à obtenir  $29$ , le pas est encore plus simple que celui de la première étape puisqu'il va « vers le résultat ».

Des enfants comme Guglielmo, nous en avons rencontré beaucoup, qui avaient vraiment envie de résoudre les problèmes de notre exposition-atelier du RMT, partout où nous

l'avons présentée, mais qui perdaient de vue le but de leur recherche, par épuisement sur des calculs pour lesquels ils ne disposaient pas d'instruments adéquats.

Après ce constat, évitons le piège de la culpabilisation ou de l'accusation qui nous entraînerait dans des querelles stériles. Cherchons plutôt des voies de remédiation.

Une piste nous est offerte par la pratique du calcul réfléchi, une autre par la pratique des jeux arithmétiques ; elles sont illustrées dans ce numéro de *Math-Ecole* par plusieurs articles<sup>2</sup>. Une autre encore est, précisément, celle de l'exposition-atelier, où l'on libère l'élève de l'écriture, pour lui permettre de s'appuyer sur des nombres mobiles et sur d'autres matériels figuratifs.

Mais il ne suffit pas d'intituler une séquence d'enseignement « calcul réfléchi », de faire jouer les élèves, de leur proposer des manipulations arithmétiques. Il faut ensuite revenir, avec l'enfant, sur ce qu'il a fait. Il faut qu'il verbalise, qu'il justifie, qu'il note ses règles de calcul, qu'il les compare avec celles de ses camarades. Il faut aussi que l'adulte, finalement, puisse lui donner son avis sur ce qu'il a exprimé, qu'il puisse lui dire que certaines propriétés sont très importantes et générales et d'autres plus personnelles et éphémères.

L'associativité de l'addition, l'élève l'aborde très tôt dans son parcours scolaire, malheureusement sans en être conscient ou sans qu'on le lui dise, par des mots simples. Et un jour il y aura celle de la multiplication jusqu'au moment où la distributivité pointerait à l'oreille. Et là, adieu les belles symétries de la propriété, il faudra tout reconstruire !

Alors, l'associativité, si on la faisait vivre, puis raconter à l'élève ? Ça vaudrait la peine d'essayer !

2. Entre autres par *Mathador* (pp. 4 à 7), *Cap maths* (pp. 39 à 47), *Magico* (pp. 27 à 29)