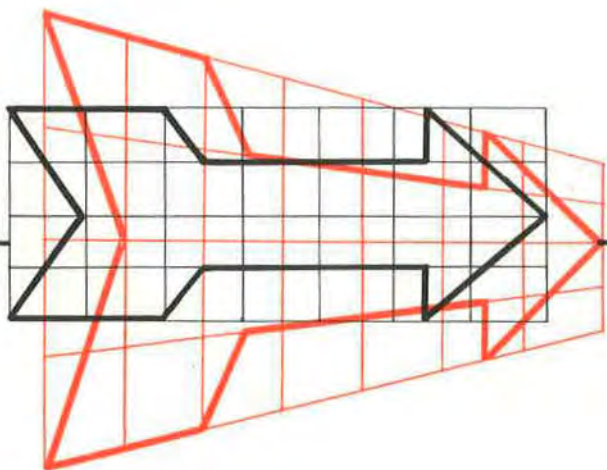


75



**MATH
ECOLE**

NOVEMBRE 1976
15^e ANNEE

Schubiger valable jusqu'au 15 décembre 1976
Offre mensuelle



Des bougies à faire soi-même

Les confectionner vous mettra dans l'ambiance joyeuse de Noël. Avec la cire à couler Schubiger vos élèves feront eux-mêmes des bougies qu'ils décoreront ensuite avec de la cire en feuilles et qu'ils seront heureux d'offrir. Quoi de plus personnel?!

Toute commande de 7 boîtes de cire à couler et de crayons à colorer (pour 30 bougies environ) au prix de **Fr. 38.50** au lieu de Fr. 49.10.



Commande

Offre du mois Cire à couler, nature
7 boîtes de 1 kg et crayons à colorer
la cire à couler 7 tons assortis
au prix de **Fr. 38.50**

1 x Fr. 38.50		3 x Fr. 115.50	
2 x Fr. 77.—		4 x Fr. 154.—	

Accessoires

Nr.	matériaux	nombre
592 10	Cire en feuilles, couleurs assorties 4 x 20 cm, mince, couleurs diverses Paquet de 10 bandes à Fr. 3.90	
591 30	Etoiles, 40 mm, en carton doré et argenté, mélangées. Sachet de 2x10 pièces à Fr. 1.90	
591 31	Etoiles, 80 mm, en carton doré et argenté, mélangées. Sachet de 2x10 pièces à Fr. 1.90	
591 35	Etoiles, 80 mm en carton pâte de bois Sachet de 10 pièces à Fr. 1.40	
	Total	

Nom _____

Rue _____

Numéro postal /lieu _____

Schubiger

Editions Schubiger SA, Case postale 525,
8401 Winterthour

Editorial

L'iceberg

Attaché à la banquise, il est inoffensif. C'est quand il descend vers les zones chaudes et qu'il flotte au gré des courants qu'il devient dangereux.

Le cheminement de l'iceberg dont il va être question coïncide avec l'enseignement renouvelé de la mathématique. Il est aussi, à peu de chose près, contemporain du lancement de Math-Ecole, voici quinze années pleines (numéro 75). Au fait, de quoi s'agit-il ?

La partie émergée — celle qu'on voit et qui est, de beaucoup, la moins importante — c'est ce fameux «calcul» que les enfants n'auraient plus l'occasion de maîtriser. L'enquête de l'IRDIP auprès des enseignantes de première année (1975) a révélé que, dans certains cantons, une proportion massive de maîtresses étaient inquiètes. Les «quatre opérations» et le «divret» seraient en péril. Les parents aussi sont troublés. Et on appelle à la rescousse les maîtres d'apprentissage, les techniciens et des professeurs de l'EPFL. Cette crainte se comprend. Elle a une composante sociale dont il faut savoir tenir compte. «Lire, écrire, compter» constituait la mission de l'école, une mission quasi sacrée. Où court-on si l'on abandonne un des volets du tryptique ? A l'inquiétude se substitue une sorte d'angoisse. Quelque chose que l'on avait besoin de considérer comme solide semble se désagréger. Peur.

La cause du trouble — et, encore une fois, trouble respectable — est plus profonde. Elle gît dans la partie immergée de l'iceberg. Elle est philosophique parce que concernant la nature et le destin de l'homme. Elle est peut-être aussi théologique à cause de la relation de l'homme à Dieu.

L'homme est doué d'intelligence. C'est un fait. Cette intelligence prend chez lui la place de l'instinct. L'animal, qui a l'instinct, est asservi aux conditionnements de l'instinct. L'homme intelligent n'est pas asservi à son monde. Il a la liberté de l'organiser à son gré afin d'ordonner et son monde et sa vie par rapport à une échelle de valeurs qui se construit au cours des siècles.

C'est à l'édification de l'instrument «intelligence» que se voue l'enseignement nouveau de la math. Cette édification se fait selon un plan. Piaget a fourni ce plan. Elle demande activité libre, recherche, tâtonnement, essais, erreurs, invention, imagination, spontanéité, initiative. Elle demande aussi, cette édification, qu'on fasse confiance à l'enfant et en ses pouvoirs qui sont grands.

Et c'est ici qu'intervient la théologie. Celle de la méfiance — l'homme incapable d'aucun bien — récuse la liberté et commande l'acquisition de «fortes habitudes» (l'habitude, entre autres de bien «calculer»). L'autre, celle de la confiance ou, mieux encore, celle de la grâce, s'émerveille de tout ce qu'il y a de puissances virtuelles dans l'enfant et ne s'autorise d'autre vocation que celle de donner à cet enfant mille et une occasions de constituer son outillage intellectuel dans le bonheur joyeux de découvrir le monde et de, peu à peu, l'ordonner par rapport à soi et par rapport aux autres (ce qui est à l'origine des règles de la logique).

D'où, en fin de compte, une exigence: celle de la charité. Pour que, dans un climat de mutuelle compréhension — une compréhension voulue et inlassablement recherchée — l'iceberg se dissolve. Pour que, par nos soins à tous, les enfants apprennent à vivre.

S. Roller

Une fois vécue la période d'adaptation

par Frédéric Oberson

Faites comme je dis, non comme je fais !

Je ne puis m'empêcher de penser que certains enseignants du degré primaire, à la lecture des méthodologies du nouvel enseignement de la mathématique, doivent quelquefois faire cette réflexion. Je m'explique. Un des principes sur lequel s'appuie ce nouvel enseignement est la modification de la relation maître-élève dans le sens que l'enfant considère une proposition comme vraie non pas parce que le maître l'a énoncée mais parce qu'il a pu, par ses propres moyens, se convaincre de sa véracité¹. Plaçons-nous maintenant au niveau de la réforme de l'enseignement de la mathématique en Romandie. Cette réforme fait des enseignants primaires en quelque sorte les élèves de nouveaux maîtres: les rédacteurs des ouvrages romands de mathématique, les membres

¹ Le lecteur me permettra, à ce sujet, de lui rapporter en quelques lignes une situation que j'ai moi-même vécue en 1972/73, avant la parution de «Mathématique Troisième année», dans une classe-pilote de Fribourg.

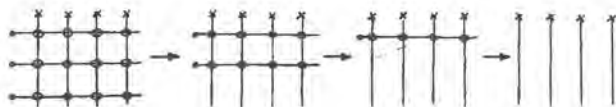
Pour n'avoir pas assez privilégié la découverte de la multiplication par le produit cartésien au dépens de sa découverte par addition itérée, je me suis trouvé en face d'élèves qui, pendant plusieurs jours, se sont systématiquement refusé à compléter des écritures du type

$$\begin{array}{ll} 0 \times 7 = 7 \times 0 = \dots & 7 \xrightarrow{\times 0} \dots \\ 0 \times 3 = 3 \times 0 = \dots & 3 \xrightarrow{\times 0} \dots \end{array}$$

La machine $\xrightarrow{\times 0}$ n'avait pas de sens précis pour eux et certains étaient prêts à accepter chacune des propositions suivantes:

$$7 \xrightarrow{\times 0} 6 \quad \text{ou} \quad 7 \xrightarrow{\times 0} 5 \quad \text{ou} \quad 7 \xrightarrow{\times 0} 4 \quad \text{ou} \quad 7 \xrightarrow{\times 0} 0.$$

Ce ne fut qu'après un retour au produit cartésien de deux ensembles sous la forme suivante



qu'à l'unanimité on en vint à écrire

$$\begin{array}{ll} 7 \xrightarrow{\times 0} 0 & 0 \times 7 = 7 \times 0 = 0 \\ 5 \xrightarrow{\times 0} 0 & 0 \times 3 = 3 \times 0 = 0 \text{ etc.} \end{array}$$

de la Commission d'examen. Le rapport maître-élève, à ce niveau, est-il à l'image de celui souhaité dans une classe ? On peut en douter lorsqu'on remarque combien sont nombreux les enseignants qui en arrivent petit à petit à justifier leur activité en classe par simple référence au texte de la méthodologie. Nombreux sont en effet les maîtres qui, préparant la « leçon de mathématique » du lendemain, s'interrogent encore sur le pourquoi de telle manière de faire. Et, la plupart du temps, les réponses à ces questions ne figurent pas explicitement dans la méthodologie. Le maître alors, dans l'immédiat, n'a d'autres ressources que de s'en remettre au texte qui lui est proposé.

Cette attitude de confiance aveugle à l'égard du texte de la méthodologie, acceptable dans la phase d'adaptation au nouvel enseignement — le maître se doit, à ce stade, d'expérimenter les diverses activités proposées par la méthodologie —, risque à la longue d'une part de dépersonnaliser complètement l'enseignement, d'autre part d'empêcher l'adaptation adéquate de cet enseignement aux conditions particulières propres à chaque classe.

Pour que l'instituteur, l'institutrice puissent, une fois vécue leur période d'adaptation, repersonnaliser leur enseignement et l'adapter au mieux à leur classe, il faut premièrement qu'ils aient parfaitement assimilé l'esprit de la nouvelle méthodologie et secondement qu'ils aient, pour chacun des points d'aboutissement du programme primaire, la connaissance de l'enchaînement des diverses activités qui y conduisent. Cela étant, les réponses aux « pourquoi » de telle ou telle option apparaissent presque toujours avec évidence et la relation maître-élève du processus de la réforme de l'enseignement de la mathématique, matérialisée par les ouvrages romands, s'approche de celle que l'on souhaite au niveau des classes.

Math-Ecole, dans son numéro 67, sous la rubrique « Lu pour vous » a signalé à ses lecteurs l'ouvrage de Z.P. Dienes « Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique » (Paris, 1970, OCDL / IRDP 5490). Je pense que cet ouvrage mérite davantage. Il est en effet de ceux qui permettent d'assimiler l'esprit du nouvel enseignement de la mathématique à l'Ecole primaire. C'est pourquoi il me semble judicieux d'en publier ici un large extrait : le premier des quatre chapitres qui composent ce petit livre où Dienes présente précisément les six étapes.

DESCRIPTION DES ETAPES

Qu'est-ce que comprendre ? Qu'est-ce qu'apprendre ? Il faut bien avouer qu'à ces deux questions, nous n'avons pas encore de réponse scientifiquement satisfaisante. S'il est vrai que personne ne doute plus aujourd'hui du fait que la relation stimulus-réponse conduit à un dressage qui, sur le plan aussi bien de la compréhension que de l'apprentissage ultérieur, représente la plupart du temps des blocages, il reste à montrer quels sont les éléments constitutifs du processus d'apprentissage digne de ce nom.

Nous sommes partis du théorème d'existence selon lequel c'est à partir d'un environnement riche que l'enfant peut construire ses connaissances, et nous

avons pris comme modèle l'apprentissage de la langue maternelle. Tout le monde sait que les enfants qui vivent dans un milieu où l'on parle une langue riche sont en mesure de se construire une langue riche. Nous avons pu montrer au cours de nos recherches à la fois théoriques et pratiques que «plonger l'enfant dans l'eau profonde» facilite son processus d'apprentissage, c'est-à-dire à la fois le processus d'abstraction, de généralisation et de transfert.

Nos travaux ultérieurs nous ont permis d'analyser de plus près le processus d'abstraction dans lequel nous avons été amenés à distinguer six étapes différentes. L'étude que voici veut s'attacher à présenter et à illustrer par des exemples empruntés à la logique et à la géométrie ces différentes étapes, dont il faudrait évidemment tenir compte dans l'organisation de l'enseignement mathématique, si l'on veut que tous les enfants y accèdent, c'est-à-dire si l'on veut éviter de fermer la porte des sciences mathématiques au plus grand nombre, comme ce fut le cas dans le passé, et comme c'est encore le cas présentement la plupart du temps.

Première étape

La notion d'environnement nous paraît capitale, car, dans un certain sens, tout apprentissage équivaut à un processus d'adaptation de l'organisme à son environnement. Dire d'un enfant, d'un adulte ou même d'un animal, ou d'une façon tout à fait générale d'un organisme quelconque, qu'il a appris quelque chose signifie que cet organisme, cet adulte ou cet enfant a pu modifier son comportement par rapport à un environnement donné. Dans la phase qui précède l'apprentissage, l'organisme était mal adapté à une situation donnée, à un environnement donné, mais grâce à l'apprentissage l'organisme a pu s'adapter au point que l'individu est devenu capable de dominer les situations qu'il rencontre dans cet environnement. Si l'on tient compte de cet aspect d'adaptation que représente tout apprentissage, il semble raisonnable de présenter à l'enfant un environnement auquel il peut s'adapter. Ce processus d'adaptation à un environnement, c'est ce que les pédagogues désignent d'une façon générale sous le nom d'apprentissage.

Pour être plus précis, l'adaptation a lieu dans une phase qu'on peut désigner par la phase du jeu libre. Tous les jeux enfantins représentent une sorte d'exercice qui permet à l'enfant de s'adapter à des situations qu'il aura à rencontrer dans sa vie ultérieure. Or, si l'on se propose de faire apprendre la logique à l'enfant, il semble nécessaire de le confronter à des situations qui le conduiront à former des concepts logiques. Si nous nous tenons à cet exemple de la logique, force nous est de reconnaître que d'une façon générale l'environnement dans lequel vit l'enfant ne comporte pas des attributs que nous considérons comme logiques. Il faut donc inventer un environnement artificiel. Au contact de cet environnement, l'enfant sera amené peu à peu à former des concepts logiques d'une façon plus ou moins systématique. L'exemple d'un tel environnement peut, par exemple, comprendre l'univers des blocs logiques. Un jeu de blocs logiques se compose de plusieurs pièces de bois ou de plas-

tique où l'on fait varier systématiquement les variables suivantes: la couleur, la forme, l'épaisseur et la grandeur. Evidemment, il n'est pas nécessaire de se borner à ces quatre variables. On pourrait également en faire varier d'autres. Si l'on veut que l'enfant fasse ses premiers pas vers l'apprentissage des notions qui concernent le concept de puissance, il est souhaitable de le mettre dans un environnement correspondant. Un tel environnement pourrait être constitué par les jeux Multibases, où, selon chaque base, on fournit un certain nombre d'objets dont le volume ou la surface vont en croissant par rapport à la base choisie. Si l'on choisit la base 3, il faudra fournir une pièce que l'on prendra comme unité, ensuite d'autres morceaux dont le volume sera trois fois celui de l'unité, ensuite d'autres pièces dont le volume sera neuf fois celui de l'unité, et ainsi de suite. Par une interaction libre avec ce matériel, l'enfant fera ses premiers pas vers l'apprentissage des propriétés des puissances. On pourrait donner un grand nombre d'exemples semblables pour montrer comment on peut créer un environnement artificiel pour l'apprentissage d'un ensemble quelconque de notions mathématiques.

Deuxième étape

Après une certaine période d'adaptation, c'est-à-dire de jeu, l'enfant se rendra compte des contraintes de la situation. Il y a certaines choses qu'on ne peut pas faire. Il y a certaines conditions qu'il faut satisfaire avant de pouvoir atteindre certains buts. L'enfant se rend compte des régularités imposées à la situation. A ce moment, il sera prêt à jouer avec des restrictions qui lui seront artificiellement imposées. Ces restrictions s'appellent: les règles du jeu.

Quand on joue aux échecs, il est totalement arbitraire que certaines pièces aient certaines propriétés dans le jeu. Ces propriétés ne dépendent nullement de la forme ou d'autres propriétés physiques des pièces. De la même manière, on peut suggérer aux enfants des jeux avec des règles: les enfants eux-mêmes pourront, par la suite, inventer d'autres règles, changer les règles, et jouer les jeux correspondants. Ainsi ils s'habitueront à la manipulation des régularités. Evidemment, si l'on veut que l'enfant apprenne des structures mathématiques, les ensembles de règles qu'on suggérera porteront sur des structures mathématiques pertinentes. Les jeux se feront au moyen de certains matériels structurés comme ceux indiqués plus haut.

Troisième étape

Evidemment, jouer des jeux structurés selon les lois mathématiques inhérentes à une structure mathématique quelconque n'est pas apprendre la mathématique. Comment l'enfant peut-il extraire de l'ensemble de ces jeux les abstractions mathématiques sous-jacentes? Le moyen psychologique est de faire jouer des jeux qui possèdent la même structure, mais qui ont une apparence

très différente pour l'enfant. Ainsi, l'enfant sera porté à découvrir les liens de nature abstraite qui existent entre les éléments d'un jeu et les éléments de l'autre jeu, de structures identiques. C'est ce que nous appelons les jeux de dictionnaire, ou, si l'on veut utiliser un terme mathématique: les jeux d'isomorphisme. Ainsi l'enfant dégage la structure commune des jeux, et se débarrasse des parties non pertinentes. Par exemple, des propriétés des blocs logiques qui ne sont pas pertinentes sont l'utilisation des couleurs, des formes, etc... On aurait pu utiliser d'autres propriétés, on aurait même pu prendre des ensembles d'objets et considérer des propriétés d'ensembles au lieu de propriétés d'objets. Il n'est même pas essentiel qu'il y ait un certain nombre déterminé de valeurs pour l'une ou l'autre des variables qu'on a introduites dans le jeu. Ce qui est important est qu'il y ait plusieurs variables, que chacune de ces variables ait plusieurs valeurs, et que l'enfant puisse manipuler ces variables en choisissant des ensembles de blocs, des ensembles d'ensembles ou, en général, des ensembles d'éléments quelconques, de façon que les éléments puissent être distingués les uns des autres par la perception de l'enfant. Ainsi, les jeux joués avec une concrétisation, puis ensuite avec une autre concrétisation, seront identifiés du point de vue des structures. C'est à ce moment que l'enfant se rendra compte de ce qui est «pareil» dans les jeux divers qu'il a pratiqués, c'est-à-dire qu'il aura réalisé une «abstraction».

Quatrième étape

Certes, l'enfant ne sera pas encore en mesure de se servir de cette abstraction, parce qu'elle ne s'est pas encore fixée dans son esprit. Avant de prendre pleinement conscience d'une abstraction, l'enfant a besoin d'un processus de représentation. Une telle représentation lui permettra de parler de ce qu'il a abstrait, de le regarder du dehors, de sortir du jeu, ou de l'ensemble des jeux, d'examiner les jeux et de réfléchir à leur sujet. Une telle représentation peut être un ensemble de graphes, elle peut être un système cartésien, elle peut être un diagramme de Venn, ou toute autre représentation visuelle ou même auditive dans le cas des enfants qui ne pensent pas essentiellement d'une manière visuelle.

Cinquième étape

Après l'introduction d'une représentation, ou même de plusieurs représentations de la même structure, il sera possible d'examiner cette représentation. Le but de cet examen est de se rendre compte des propriétés de l'abstraction réalisée. Dans une représentation, on peut facilement se rendre compte des propriétés principales de l'être mathématique qu'on vient de créer. Cela signifie qu'il nous faut, à cette étape, une description de ce que nous avons représenté. Pour une description, il faut évidemment un langage, c'est pourquoi la réalisation des propriétés de l'abstraction dans cette cinquième étape doit être

accompagnée par l'invention d'un langage et la description de la représentation à partir de ce langage inventé. Il vaut mieux, si c'est possible, que l'enfant invente son propre langage et que plus tard les enfants, avec l'aide du maître, discutent entre eux si l'un des langages introduits est plus avantageux que d'autres. Une telle description formera la base d'un système d'axiomes. Chaque partie de la description pourra servir d'axiome ou même plus tard de théorème.

Sixième étape

La plupart des structures mathématiques sont tellement complexes qu'elles possèdent un nombre infini de propriétés. Il est impossible de citer toutes ces propriétés dans une description du système qu'on a engendré. Il faut donc, d'une certaine manière, enfermer la description dans un domaine fini, dans un nombre fini de mots. Cela veut dire qu'il nous faut une méthode pour arriver à certaines parties de la description, étant donné une première partie que nous prenons comme point de départ. Ces méthodes pour arriver à d'autres parties de la description seront nos règles du jeu de démonstration. Les descriptions ultérieures auxquelles nous arriverons seront appelées les «théorèmes du système». On a ainsi inventé un système formel dans lequel il y a des axiomes, c'est-à-dire la première partie de la description, et des règles du jeu. Il pourra y en avoir d'autres qui seront les règles logico-mathématiques de la démonstration. Ensuite, il y aura des théorèmes du système qui sont les parties de la description auxquelles on arrive à partir de la description initiale, en utilisant les règles du jeu.

Le lecteur intéressé par cette analyse du processus d'apprentissage en mathématique trouvera dans les chapitres II, III et IV du livre de Z.P. Dienes ¹ trois exemples de ce cheminement en six étapes dans trois domaines différents:

- Chapitre II Apprentissage de quelques notions logiques
- Chapitre III Apprentissage des isométries du triangle équilatéral
- Chapitre IV Etude d'une relation d'ordre

¹ Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématiques, Z.P. Dienes, Paris 1950, OCDL.

A propos de la proportionnalité

par Théo Bernet

On a pu dire que les 90 % des problèmes de la vie courante sont des problèmes de proportionnalité (ou de «règle de trois» si l'on veut). Que cela soit vrai strictement ou partiellement, il ne fait pas de doute que la proportionnalité est l'un des sujets les plus importants de l'enseignement mathématique durant la scolarité obligatoire.

Or, dans le renouvellement actuel, il subit un remaniement assez profond; on tend maintenant à le rattacher à l'idée de fonction. De plus, son étude n'est plus réservée à une année scolaire déterminée; elle s'étend pratiquement sur toute la scolarité.

Ces remarques ont conduit le Service de l'enseignement primaire du canton de Vaud, et sa Commission mathématique, à faire paraître une brochure de «Suggestions méthodologiques» intitulée «Applications affines, la proportionnalité». Elle sera distribuée aux maîtres et maîtresses et fera l'objet de cours pour certains d'entre eux.

Cette brochure débute par quelques indications théoriques. Ensuite, en trois chapitres «Chez les petits», «Chez les moyens», «Chez les grands», elle montre comment la proportionnalité apparaît au fil des ans à l'occasion d'exercices et de problèmes divers, comment on peut la mettre en évidence et comment de légères modifications permettent d'adapter les problèmes d'arithmétique classique à la nouvelle optique.

Les pages qui suivent sont extraites de cette brochure et voudraient, comme elle, montrer comment le sujet se développe au cours des ans ¹.

Chez les petits

A partir des jeux de «petites machines»

Les jeux de petites machines préparent à la notion de fonction, et les machines à multiplier permettent d'obtenir des suites proportionnelles.

D'une façon générale, on obtient des suites proportionnelles chaque fois qu'on note dans une colonne les nombres présentés à l'entrée d'une machine à multiplier et, en regard, les nombres correspondants obtenus à la sortie.

$\textcircled{x \dots}$	
5	40
7	44
8	46
10	50

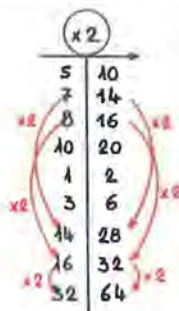
Voici l'exemple d'un exercice où l'on demande de trouver quelle est la machine en cause ?

En observant les deux suites de nombres, on découvre qu'il s'agit de la machine



¹ Il convient de rendre hommage à M. Berthold Beauverd qui fut l'initiateur de ce travail alors qu'il présidait la Commission vaudoise de mathématique. Les autres rédacteurs de la brochure sont Mlles Arlette Grin, Françoise Waridel, MM. Théo Bernet, Paul Bigler, Roger Dyens et Daniel Notter. La Commission de mathématique, sous la présidence de M. Beauverd, puis de M. J.-P. Pochon, fonctionna comme commission de lecture.

Cela fait, il devient facile de continuer ces suites. A gauche, on peut noter n'importe quel nombre, pourvu qu'on inscrive à sa droite le nombre obtenu en le doublant.



On pourrait ajouter, par exemple, les lignes suivantes au tableau:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow 6 \end{array}$$

Les élèves remarqueront peut-être des lignes telles que:

$$\begin{array}{l} 5 \longrightarrow 10 \\ 10 \longrightarrow 20 \end{array}$$

et auront l'idée de continuer les suites en utilisant des faits analogues:

$$\begin{array}{l} 7 \longrightarrow 14 \\ 14 \longrightarrow 28 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \longrightarrow 16 \\ 16 \longrightarrow 32 \end{array}$$

En construisant la table de multiplication

En travaillant les doublements, les enfants peuvent découvrir, par exemple, que, si l'on connaît 2×4 , il suffit de doubler le résultat pour obtenir 4×4 , de doubler encore pour obtenir 8×4 .

De telles remarques peuvent être mises à profit pour construire pas à pas la table de Pythagore. Une fois celle-ci complète, on peut y observer à plusieurs endroits des suites proportionnelles. Les nombres de la colonne du 4 sont obtenus en doublant ceux de la colonne du 2, ceux de la colonne du 8 en doublant ceux de la colonne du 4. Des faits analogues se présentent pour les lignes du 2, du 4 et du 8.

De même, les multiples de 6 s'obtiennent en doublant ceux de 3, les multiples de 8 en quadruplant ceux de 2.

Exploitation de problèmes

Il s'agit ici de problèmes d'examen de ces dernières années. Il suffit de peu de choses pour tirer d'un problème traditionnel des exemples de proportionnalité.

Problème: 8 lapins, cela fait combien de pattes ? Combien d'oreilles ?

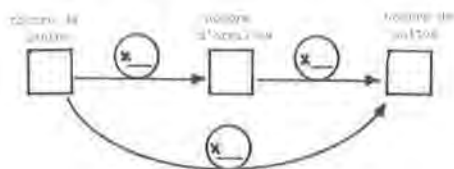
Adaptation: Un ou des lapins (un certain nombre de lapins) cela fait combien d'oreilles ? Combien de pattes ?

Nombre de lapins	Nombre d'oreilles	Nombre de pattes
1	2	4
5	?	?
?	12	?
?	?	40
8	?	?
...

Comparer les colonnes entre elles:

- le nombre d'oreilles et celui de lapins et vice-versa;
- le nombre de pattes et celui d'oreilles et vice-versa;
- le nombre de pattes et celui de lapins et vice-versa.

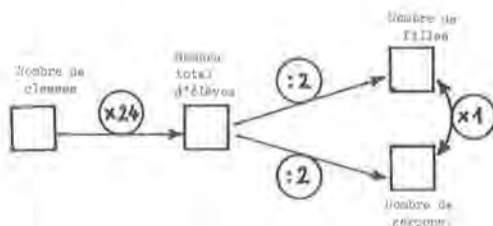
Des constatations ci-dessus, dégager des schémas de cette forme:



Problème: Dans un collège, il y a 3 classes de 24 élèves chacune. Chaque classe a autant de filles que de garçons.

Adaptation: Dans un collège, toutes les classes ont 24 élèves chacune. Chaque classe a autant de filles que de garçons.

Nombre de classes	Nombre total d'élèves	Nombre de filles	Nombre de garçons
1	24	?	?
2	?	?	?
?	96	?	?
?	?	36	?
...



Chez les moyens

Une façon d'introduire les suites proportionnelles, à partir d'un jeu de billes

Le jeu de billes a réapparé dans nos classes sous une forme nouvelle. Les enfants jouent exclusivement avec des «agates» que l'on peut gagner si l'on réussit à les atteindre une, deux, ... dix fois, ou même jusqu'à 25 fois s'il s'agit de pièces particulièrement grosses et belles. Dans les sachets, il y a donc des «deux coups», des «huit coups», etc.

Faisons l'inventaire des agates «cinq coups» que possèdent quelques élèves de la classe.

Yves	Denise	Anne	Martine	Susy	François	Christine	Renata
11	0	5	16	13	10	24	16

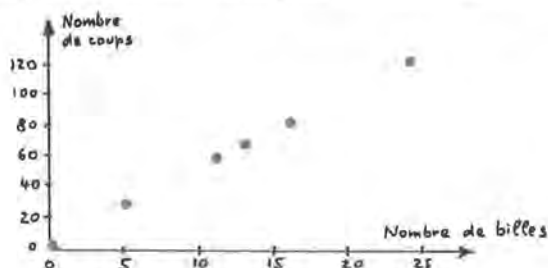
Intéressons-nous au nombre de «coups» que cela représente pour chaque élève et mettons en correspondance, dans un tableau, la suite B des nombres de billes et la suite C des nombres de coups:

	Y	D	A	M	S	F	C	R
suite B	11	0	5	16	13	10	24	16
suite C	55	0	25	80	65	50	120	80

Ces deux suites sont proportionnelles puisque pour obtenir les nombres de la suite C nous avons multiplié chaque nombre de la suite B par le même facteur cinq.

En d'autres termes, nous avons utilisé chaque fois l'opérateur $\times 5$ ou $\cdot 5$ pour passer de la suite B à la suite C.

Cette situation peut être représentée par un graphique, où l'on voit apparaître des points alignés. Dans une étape ultérieure, un tel graphique permet de trouver des couples de nombres correspondants sans effectuer de calculs.



Le passage aux nombres non entiers

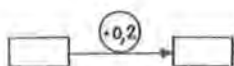
La connaissance des nombres non entiers élargit fortement le champ d'application de la proportionnalité. Pour étudier cette extension, nous suggérons l'expérience proposée dans le livre d'arithmétique de M. Porchet en page 86, numéro 512:

Calcul de la vitesse d'un train électrique

Longueur des voies (en m):	2
Distance parcourue en 10 tours (m):	$2 \times 10 = 20$
Durée du trajet (en s):	100
Distance parcourue en 1 s (en m):	$20 : 100 = 0,2$

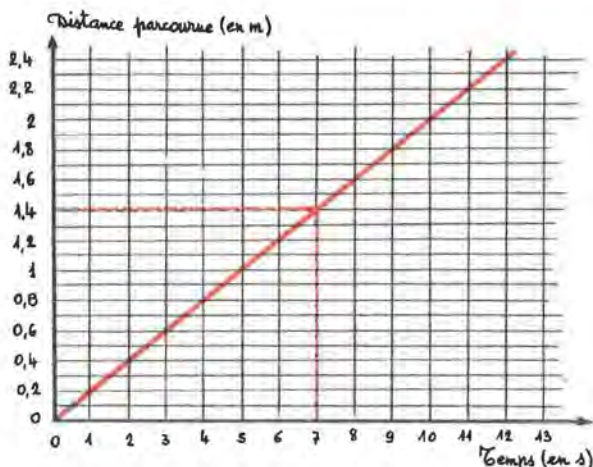
Voici, reportées dans un tableau en deux colonnes, quelques mesures obtenues.

Temps (en s)	Distance parcourue (en m)
0	0
1	0,2
2	0,4
3	0,6
⋮	⋮
10	2,0
⋮	⋮
100	20,0
⋮	⋮



En observant les couples de nombres correspondants, nous voyons que ceux de la 2e colonne s'obtiennent en multipliant ceux de la 1re par 0,2. Cette constatation revient à mettre en évidence une application (une fonction) ou, si l'on veut, un opérateur multiplicatif, dont voici une représentation commode.

Dessignons le graphique correspondant.



Précédemment, en ne travaillant qu'avec des nombres entiers, nous obtenions des graphiques de points.

En revanche, ici, l'application étudiée est convenablement représentée par une *ligne continue*.

Ce graphique permet de trouver qu'au nombre 7 correspond le nombre 1,4 (voir les lignes en trait interrompu).

Nous notons:

$$7 \longmapsto 1,4.$$

Nous disons:

«L'image de 7 est 1,4».

De même, nous pouvons trouver l'image de n'importe quel nombre jusqu'à 12:

$$5 \longmapsto 1$$

$$0 \longmapsto 0$$

$$11,5 \longmapsto 2,3$$

En fait, il est dans la nature d'une telle recherche graphique de ne fournir qu'une approximation de l'image cherchée:

$$3,7 \longmapsto 0,75$$

$$9,2 \longmapsto 1,85$$

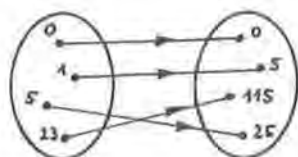
Soit à l'aide d'un graphique, soit par le calcul direct, il est possible de trouver les réponses à de nouvelles questions.

Chez les grands

Un exemple d'opérateurs numériques: les opérateurs multiplicatifs ou applications linéaires

Plaçons-nous dans \mathbf{N} . $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Considérons la correspondance qui associe à chaque nombre de \mathbf{N} le quintuple de ce nombre.



Cette correspondance est un opérateur dans \mathbf{N} , c'est une application (ou une fonction) de \mathbf{N} dans \mathbf{N} . Son *ensemble d'arrivée* est identique à son *ensemble de départ*, c'est \mathbf{N} . Désignons cette application par $\textcircled{5}$.

Voici une autre façon de se donner cet opérateur, de faire connaissance avec lui.

Ecrivons $\textcircled{5}$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{N} \longmapsto \mathbf{N} \\ x \longmapsto 5 \cdot x \end{array}$$

Entre autres choses, cette écriture indique que x est une variable sur \mathbf{N} , c'est-à-dire une lettre qu'on peut remplacer par n'importe quel élément de \mathbf{N} .

Prenons la ligne $x \longmapsto 5 \cdot x$.

Remplaçons-y x par 3 aux deux endroits où se trouve x :

$$3 \longmapsto 5 \cdot 3.$$

Nous obtenons une écriture indiquant qu'à 3 correspond 15.

Remplaçons-y x par 0: $0 \longmapsto 5 \cdot 0$; à 0 correspond 0 ;
remplaçons-y x par 1: $1 \longmapsto 5 \cdot 1$; à 1 correspond 5 ;
remplaçons-y x par 23: $23 \longmapsto 5 \cdot 23$; à 23 correspond 115;
etc.

Par le simple fait d'y remplacer x par des nombres naturels divers, l'écriture donnée fait apparaître l'opérateur $\textcircled{5}$.

Exploitation de problèmes

LE CHANGE - Exercice d'après le No 36, p. 103, Arithmétique Besson

«100 francs français valent, au cours du change, 74 francs suisses (avril 1974). Un touriste français change à Lausanne 2200 francs français. Quelle somme reçoit-il en argent suisse ?

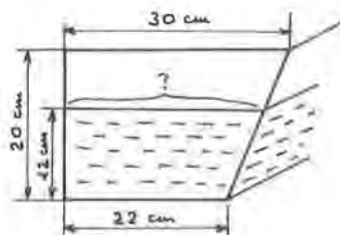
(Qu'aurait-il reçu pour 1500 FF, 1000 FF ?)

Au retour, il change les 814 francs suisses qui lui restent au cours de 75. Quelle somme reçoit-il en argent français ? (Qu'aurait-il reçu pour 750, 200, 1000 francs suisses ?)»

La résolution de ce problème nécessite deux tableaux distincts puisque les cours sont différents selon qu'il s'agit de demande (lorsque la banque achète des monnaies étrangères) ou d'offre (lorsque la banque vend des monnaies étrangères).

Demande		Offre	
FF	Fr. s.	FF	Fr. s.
100.—	74.—	100.—	75.—
2 200.—	814.—
1 100.—	750.—
1 500.—	200.—
1 000.—	1 000.—
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Un contre-exemple: le No 639, Géométrie, Beauverd



Pour trouver le volume de l'eau lorsque le niveau atteint 12 cm dans cet abreuvoir, il nous faut absolument la longueur de la grande base formée par le niveau de l'eau.

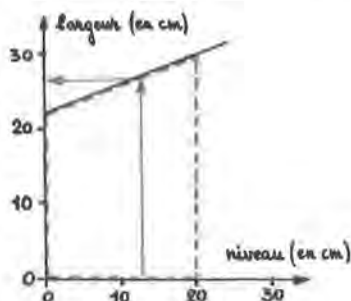
On serait tenté de dire qu'il y a proportionnalité directe entre les niveaux de l'eau et les grandes bases qu'ils déterminent. Mais on chercherait vainement le facteur de proportionnalité.

En effet, au niveau 0 correspond une base de 22 cm. Au niveau 20 correspond une base de 30 cm.

La coupe de l'auge, telle qu'elle est proposée dans l'exercice, pourrait conduire à une solution graphique.

Dans un système d'axes perpendiculaires, reportons les couples (0 ; 22) et (20 ; 30).

En joignant ces deux points, on fait apparaître, quoique retournée et avec une orientation différente, la coupe de l'auge (sur notre dessin, en traitillé).



On comprend dès lors pourquoi le facteur de proportionnalité n'apparaissait pas: la droite qui joint les deux points (0 ; 22) et (20 ; 30) n'est pas la représentation d'une fonction linéaire, mais d'une fonction affine du type $x \mapsto ax + b$.

Conclusions

Ce rapide tour d'horizon ne peut donner qu'une idée approximative du contenu d'une brochure de 80 pages. Il devrait permettre néanmoins quelques conclusions.

Pour la résolution de problèmes de proportionnalité, les proportions (égalités du type $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$) ne jouent plus le rôle principal et le calcul avec des fractions ordinaires n'est plus nécessaire.

On tend à mettre l'accent sur le facteur de proportionnalité plutôt que sur les rapports de nombres d'une même suite. (En cela, on se rapproche de la méthode déjà bien connue de la «réduction à l'unité».) Mettre en évidence ce facteur est particulièrement important lorsqu'on se demande s'il y a proportionnalité ou non. La question est justement de savoir si le facteur de multiplication est le même pour chaque couple de nombres correspondants, ce qui amène à chercher la signification de ce facteur.

On tend à faire apparaître des fonctions. Pratiquement cela se marque surtout par le recours à des graphiques et par la multiplication des questions posées: au lieu de demander un seul nombre (à calculer à partir de trois données; «règle de trois»), on demande volontiers d'en chercher plusieurs, ce qui fait utiliser plusieurs fois le facteur de proportionnalité. Il suffit d'une légère modification de l'énoncé d'un problème de type traditionnel pour aller dans le sens préconisé.

L'existence de la brochure présentée ici, les exemples donnés et les conclusions qui viennent d'être énoncées apportent, je l'espère, un début de réponse satisfaisante à ceux qui se posent des questions sur ce qu'il peut advenir de certains «problèmes d'arithmétique» dont on sait qu'ils ont de multiples applications dans la vie pratique.

Multiplication

Quelques étapes dans la construction du concept et de l'algorithme

par Nadia Guillet, SRP, Genève

Lorsqu'on décide de laisser les enfants progresser à leur rythme, en les incitant à utiliser leurs connaissances antérieures et leur langage propre pour résoudre une situation nouvelle, lorsqu'on les engage à recourir à des moyens de représentation aussi longtemps que nécessaire et qu'on accepte les régressions qui ne manquent pas de se produire, il surgit, en cours de route, dans l'apprentissage de la mathématique, des difficultés non prévues par le maître. Ces difficultés ne sont pas seulement d'ordre numérique, mais se situent très souvent au niveau de la symbolisation (dessin, écriture), de l'organisation de l'information, de l'incompréhension d'un langage ou d'un mot, du rythme de travail.

Dans les pages qui suivent, je me propose de retracer quelques étapes par lesquelles des élèves ont passé et de présenter un ou deux départs d'activités en rapport avec la multiplication.

Nous nous trouvons dans une classe d'enfants de 10 ans révolus. Quelques séances ont déjà eu lieu au cours desquelles les élèves ont réfléchi, discuté et travaillé sur la notion de produit cartésien. La notation en ligne et en colonne est utilisée ainsi que diverses représentations connues des élèves: tableau cartésien, arbre, liste des couples, croquis. La commutativité de la multiplication semble admise par tous, mais les activités ont toujours porté sur des nombres inférieurs à dix.

L'objectif de la séance qui suit est, dans l'esprit de la maîtresse, d'engager les enfants à utiliser des nombres de deux chiffres, à examiner, tout particulièrement, le cas de la multiplication par dix.

Comme on va le voir, la difficulté d'un seul élève, difficulté d'ordre symbolique, va entraîner tous les enfants à se poser certaines questions qui pouvaient paraître résolues et ouvre une piste de recherches pour des groupes d'élèves intéressés.

Au tableau:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 10 \\ \hline \end{array}$$

Par groupe, les enfants cherchent à «habiller» cette opération. L'histoire retenue est la suivante:

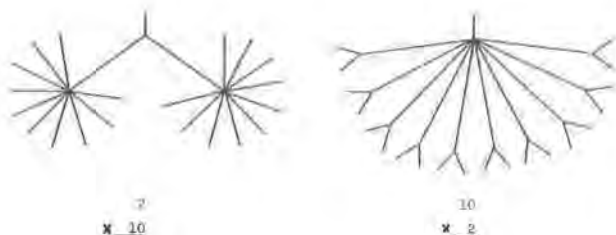
Dix boissons différentes peuvent être servies dans deux verres de tailles différentes. Combien y a-t-il de possibilités de consommer de façon variée ?

Chaque équipe cherche une représentation possible et on en fait la récapitulation au tableau noir: un élève dessine un diagramme fléché, un autre établit un tableau cartésien, un troisième construit un arbre.

C'est alors qu'un élève apporte sa contribution en venant écrire l'opération inverse:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 2 \\ \hline \end{array}$$

Cela suggère à un autre enfant de venir dessiner un second arbre. On se trouve en présence de la situation suivante:



L'aspect du deuxième arbre surprend un peu les enfants qui ont quelques doutes sur sa validité ! Après examen par rapport à la situation concrète, l'unanimité est faite.

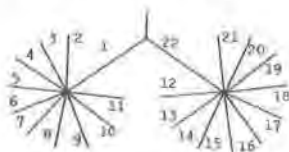
Par ailleurs, certains enfants associent chaque multiplication à un arbre précis, tandis que d'autres élèves estiment que cela n'a pas d'importance (commutativité).

Alors que personne n'a mis en doute le résultat de l'opération (à cet âge tout le monde sait que deux fois dix cela fait vingt !), les arbres vont mettre en évidence une difficulté d'ordre symbolique, une incompréhension au niveau du vocabulaire et une occasion de sentir une fois de plus que la multiplication, conceptuellement, n'a rien à voir avec l'addition.

Une fillette s'exclame tout à coup en observant le premier arbre:

— Mais c'est pas vingt possibilités ! Moi j'en trouve vingt-deux !

Devant l'étonnement de tous, elle vient s'expliquer et compte:



Une discussion animée s'instaure au cours de laquelle il ressort:

— que le mot «possibilités» n'est pas clair dans tous les esprits (recherche de tous les couples possibles si l'on associe chaque fois une taille de verres à une sorte de boissons);

- que le symbolisme de l'arbre correspond précisément à la définition ci-dessus;
- que le comptage des branches est une activité qui n'a rien à voir avec l'opération proposée.

Tout ceci n'est pas encore clairement exprimé, lorsqu'un autre élève annonce triomphalement qu'il compte non pas 22, mais 30 branches sur le deuxième arbre ! Consternation générale. Le doute plane sur la commutativité de la multiplication !

Et c'est aussi ce moment-là que choisit la cloche de l'école pour annoncer la fin de la matinée ! Il est alors décidé que deux élèves vont refaire, sur de grandes feuilles de papier java, les deux arbres discutés et, qu'après réflexion de la part de tout un chacun, la discussion sera reprise à la séance suivante.

Quelques jours plus tard, le problème est analysé tranquillement, pas à pas, et l'image suivante est employée :

Si les deux arbres représentent chacun un automate distributeur de boissons ayant une sortie particulière pour *chacune des possibilités différentes de consommer*, on obtient bien 20 sorties, soit 20 possibilités.

Les deux étages d'embranchements (2 branches puis 10 ou bien 10 branches puis 2) pourraient correspondre à des boutons de commandes (10 d'une sorte et 2 d'une autre). Il faudrait donc appuyer sur 2 boutons de types différents (notion de couple) pour obtenir sa boisson.

Quant à la commutativité, il est clair que c'est celle de la multiplication et non celle de «l'arithmétique de l'arbre» ! Cependant, voilà une jolie piste de recherche offerte aux élèves intéressés :

Construire des arbres, observer comment évolue le nombre des branches et établir un tableau récapitulatif. C'est une activité qui permet de découvrir une loi combinant multiplication et addition.

Un autre aspect de l'apprentissage de la multiplication est celui qui consiste à lier cette opération à la notion d'aire (sans se préoccuper, au départ des unités conventionnelles).

Il est étonnant de constater à quel point l'effet multiplicatif des deux dimensions du plan joue des tours lorsqu'on veut essayer de se représenter une surface.

Au tableau :

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

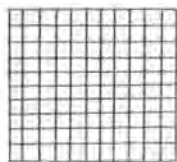
Certains élèves appliquent la règle de la multiplication par dix, d'autres calculent. Le résultat est évident pour tout le monde et un enfant s'apprête à venir représenter cette opération sur le tableau quadrillé, c'est-à-dire tracer

le rectangle correspondant (10 carrés sur 11). Avant qu'il ne commence, la maîtresse demande:

— lorsque votre camarade aura fait son travail, combien de petits carrés aura-t-il utilisé en tout (aire du rectangle) ?

Pour certains enfants il y a hésitation, l'association de l'aire du rectangle et du résultat de la multiplication n'étant pas immédiate. Lorsque l'accord est unanime, la maîtresse s'inquiète de savoir si le tableau quadrillé est suffisamment grand pour pouvoir y représenter ces 110 carrés ! Quelques élèves sont effectivement dans le doute et parmi ceux qui sont sûrs de leur fait, aucun n'a l'idée de justifier son sentiment en revenant aux dimensions du rectangle qui sont peu importantes: 10×11 .

Le rectangle tracé, tout le monde est surpris de le voir si petit:

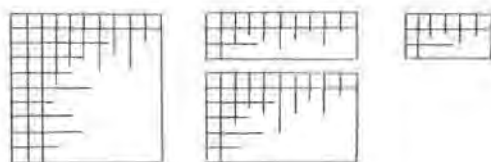


L'élève qui l'a dessiné est à ce point désarçonné qu'il propose de compter tous les carrés, ce qui est fait par dix, puis par onze. L'enfant conclut avec stupéfaction:

— Ça n'a pas l'air et pourtant il y en a bien 110 !

Cet épisode montre à quel point il est important que l'enfant puisse se faire une image mentale du concept de multiplication. Le recours à la représentation sous forme d'arbres et sous forme de surfaces rectangulaires quadrillées («couvertures» patchwork, etc.) permet à l'enfant de visualiser et ainsi de mieux sentir toute la puissance de l'effet multiplicatif.

Le but de la séance relatée ci-dessous est de permettre aux élèves de découvrir par eux-mêmes une technique de la multiplication d'un nombre de deux chiffres par un nombre de deux chiffres (compris entre dix et vingt au départ). Au lieu d'avoir à représenter une opération donnée, les enfants sont mis devant le travail inverse. La maîtresse remet à chaque groupe de quatre élèves les quatre «couvertures» suivantes découpées dans du papier quadrillé:



Les enfants doivent:

1. Poser, pour chacune des «couvertures» l'opération permettant de calculer le nombre total de carrés.

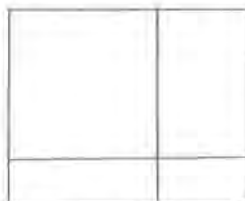
On obtient donc:

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \times 10 \\ \hline 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \times 6 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \times 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

La commutativité est utilisée par les enfants aussi bien pour l'écriture de l'opération que dans la façon de calculer (par le haut ou par le bas).

2. Réunir les quatre surfaces pour constituer une «couverture» rectangulaire plus grande en faisant le nombre minimum de coutures.

Les élèves obtiennent par exemple ceci:



3. Ecrire l'opération permettant de trouver le nombre total de carré de cette grande surface.

Diverses solutions sont trouvées:

a) compter les carrés un à un ou par petits paquets;

b) additionner les quatre produits:

$$100 + 60 + 30 + 18 = 208$$

c) utiliser la dimension de la nouvelle «couverture» et poser la multiplication;

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 16 \\ \hline \end{array}$$

On se demande, face à cette dernière écriture, quelle technique utiliser pour parvenir au résultat de 208.

Après avoir examiné comment, par l'association des couvertures, les nombres 13 et 16 se sont constitués, on peut écrire:

$$\begin{array}{l} 13 \longrightarrow 10 + 3 \\ \times 16 \longrightarrow \times 10 + 6 \end{array}$$

L'élève qui vient au tableau effectuer les calculs fait ceci:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{c} \textcircled{10} + \textcircled{3} \\ \textcircled{10} + \textcircled{6} \end{array} \\ \hline 100 \quad 18 \end{array}$$

ce qui donne après discussion:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{c} \textcircled{10} + \textcircled{3} \\ \textcircled{10} + \textcircled{6} \end{array} \\ \hline 100 + 18 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} \times \begin{array}{c} \textcircled{10} + \textcircled{3} \\ \textcircled{10} + \textcircled{6} \end{array} \\ \hline 18 \\ + 100 \end{array}$$

Sachant qu'ils doivent obtenir un résultat de 208, les enfants voient bien que le calcul n'est pas terminé mais ne savent pas comment continuer. Le recours à la représentation concrète permet de constater qu'on a déjà calculé et obtenu l'aire de deux «couvertures». Les enfants cherchent alors sur l'opération écrite où se trouvent les dimensions des deux autres «couvertures» et découvrent ainsi les calculs qu'il reste à faire:

$$\begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times 10 + 6 \end{array}$$

Le calcul complet se présente comme suit:

$$\begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times 10 + 6 \\ \hline 60 + 18 \quad 78 \\ 100 + 30 \quad 130 \\ \hline 160 + 48 \quad 208 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 10 + 3 \\ \times 10 + 6 \\ \hline 18 \\ 60 \\ 30 \\ + 100 \\ \hline 208 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 15 \\ \times 16 \\ \hline 100 \\ 30 \\ 60 \\ + 18 \\ \hline 208 \end{array}$$

C'est alors qu'un élève demande pourquoi l'on ne décomposerait pas les nombres différemment, par exemple 13 en $9 + 4$ et 16 en $9 + 5$!

Par anticipation, la plupart des enfants pense que le résultat final doit être le même. Vérification est faite:

$$\begin{array}{r}
 9 + 4 \\
 \times 9 + 7 \\
 \hline
 28 \\
 63 \\
 36 \\
 + 81 \\
 \hline
 208
 \end{array}$$

Les enfants généralisent à toutes les autres décompositions de 13 et de 16 et constatent qu'une des décompositions est privilégiée car elle seule permet de réunir les deux chiffres en une écriture simplifiée:

$$10 + 3 \longrightarrow 13$$

$$10 + 6 \longrightarrow 16$$

Dans la suite du travail, on peut se rendre compte à quel point les enfants acquièrent une grande mobilité dans la technique de calcul, alors que, sans recette à laquelle se référer, ils doivent à chaque instant utiliser leur faculté de réflexion.

Chaque élève écrit une multiplication (nombres compris entre 10 et 20), la représente et la calcule. En circulant dans la classe, la maîtresse est surprise par la diversité des méthodes:

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 \times 14 \\
 \hline
 168
 \end{array}$$

L'enfant fait tout le travail de tête:

$$\begin{array}{ll}
 4 \times 2 = 8 & 10 \times 2 = 20 \\
 4 \times 10 = 40 & 10 \times 10 = 100 \\
 40 + 8 = 48 & 100 + 20 = 120 \\
 120 + 48 = 168 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 \times 14 \\
 48 \\
 \hline
 120 \\
 \hline
 168
 \end{array}$$

L'enfant calcule les produits partiels de tête:

$$\begin{array}{l}
 4 \times 2 = 8 ; 4 \times 10 = 40 ; 40 + 8 = 48 \\
 10 \times 2 = 20 ; 10 \times 10 = 100 ; 100 + 20 = 120
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 \times 14 \\
 48 \\
 \hline
 120 \\
 \hline
 168
 \end{array}$$

L'enfant calcule comme ci-dessus pour le produit 48, mais utilise la règle de la multiplication par dix pour calculer directement 10×12

$$\begin{array}{r}
 11 \\
 \times 12 \\
 22 \\
 \hline
 110 \\
 \hline
 132
 \end{array}$$

L'enfant calcule directement

$$\begin{array}{l}
 2 \times 11 = 22 \\
 10 \times 11 = 110
 \end{array}$$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 10 \\ \hline 150 \end{array}$	L'enfant cherche spontanément une autre manière de faire:	$\begin{array}{r} 10 + 5 \\ \times 5 + 5 \\ \hline 25 \\ 50 \\ 25 \\ 50 \\ \hline 150 \end{array}$
--	--	--

$\begin{array}{r} 10 \\ \times 20 \\ \hline 200 \end{array}$	L'enfant vérifie de lui-même de la façon suivante:	$\begin{array}{r} 5 + 5 \\ \times 10 + 10 \\ \hline 50 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \\ \hline 200 \end{array}$
--	---	---

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 20 \\ \hline 380 \end{array}$	Le calcul est entièrement fait de tête de la façon suivante: $(5 \times 20) + (5 \times 20) + (5 \times 20) + (5 \times 20) = 400$ $400 - 20 = 380 !$
--	---

Si l'on ajoute que certains enfants calculent par le haut lorsque ça les arrange, d'autres commencent par multiplier les dizaines avant les unités, force est de constater qu'ils comprennent ce qu'ils font !

Il ne reste plus qu'à pratiquer afin d'acquérir, chacun selon sa technique, une certaine habileté et rapidité de calcul.

● A quoi servent les mathématiques modernes ?

Extraits de la conférence donnée à Montreux, le 15 mars 1976, par Marice Lefaure, ingénieur EPFL, pour l'Association des Parents d'Elèves.

Je m'en tiendrai à quelques remarques et réflexions sur la finalité de l'enseignement des mathématiques qu'on appelle «modernes».

A ce sujet, le titre du débat d'aujourd'hui: «A quoi servent les mathématiques modernes» me gêne: j'aurais préféré: «A quoi sert la mathématique ?» Parce que (...) *il n'y a pas de «mathématiques modernes»*. Cette appellation non contrôlée, mais internationalement reconnue, est absurde et n'a aucun sens.

En effet, *il n'y a pas plusieurs mathématiques*, les traditionnelles et les modernes; il n'y a pas deux types de mathématiques différant par leur objet et constituant deux systèmes distincts de connaissance. *Il n'y a qu'une mathématique*: celle qui depuis l'Antiquité avec Euclide et Aristote s'est développée en même temps que l'esprit de l'homme, et qui, arrivée au XXe siècle, est un ensemble cohérent, logique, mais tellement élaboré qu'il n'est accessible dans sa totalité qu'à un nombre restreint d'individus, de spécialistes de la mathématique !

...

Mais au passage, je voudrais préciser que, puisqu'on parle de «mathématiques modernes» et que cette mathématique est par définition «axiomatique», c'est-à-dire basée, comme vous le savez, sur des affirmations de propriétés non démontrées mais admises telles quelles, alors le père des «mathématiques modernes» est un Grec qui vivait au III^e siècle avant J.-C., et qui s'appelait Euclide... En fait de «moderne» !..

Revenons à nos moutons: je disais tout à l'heure qu'il n'y a pas plusieurs mathématiques. Par contre, il y a plusieurs façons de concevoir, d'explicitier et d'enseigner la mathématique. Et, à notre avis, c'est là que tout s'est gâté !.. «Mathématiques modernes» (il faut bien s'accommoder de cette appellation, même si l'esprit en fait abstraction), voilà deux mots anodins qui ont semé la panique dans des millions de foyers, et dans la conscience de parents angoissés par leur incapacité à résoudre les problèmes posés à leurs enfants dans une forme nouvelle !

En son temps, on apprenait à l'enfant, à l'élève, des mathématiques toutes faites qu'il n'avait qu'à ingurgiter, sinon à assimiler.

Aujourd'hui, par une nouvelle approche du fait mathématique, et par un langage nouveau, on veut apprendre à l'enfant, à l'élève à redécouvrir la mathématique, qu'il ne doit plus apprendre par la manipulation plus ou moins heureuse de systèmes abstraits, mais par une observation attentive des réalités de la vie, et l'aptitude à distinguer les démarches qui président à toute activité raisonnable.

Langage nouveau ? avons-nous dit... Il est bien évident que pour nous les «anciens», entendre parler d'«applications injectives», «bijectives», ou «surjectives» a quelque chose de rébarbatif et aussi d'inquiétant.

Et quand on écrit $\forall x \in E, (\alpha)$, et qu'on lit «pour tout x appartenant à E, la propriété (α) est vraie», cela a de quoi surprendre !

Dans cette écriture, le symbole \forall est le *quantificateur universel* ...

Et par dessus le marché, quand on sait que le nommé CANTOR (Georg), créateur à la fin du XIX^e siècle de la «théorie des ensembles», est mort fou, après avoir mis au point cette doctrine subversive, on n'est pas nécessairement enclin à beaucoup de bienveillance pour les «mathématiques modernes» !

Et pourtant il faudra bien qu'on s'y fasse ! Car il est évident qu'aujourd'hui déjà — et bien que l'enseignement moderne de la mathématique dans notre pays ne date que d'une dizaine d'années — on ne peut plus revenir en arrière. Certains mauvais esprits diront que le mal est déjà fait ! Ce qui est sûr, c'est qu'on ne peut pas laisser se poursuivre indéfiniment l'enseignement secondaire qui existait à peu près partout dans le monde il y a vingt ans ! Il s'agit de parler la langue de notre temps. Savoir simplement calculer ne suffit plus, il faut être en mesure d'analyser une situation pratique en termes abstraits.

Et le langage «moderne» se projette dans les applications de la mathématique et plus particulièrement, à travers le calcul matriciel, à toute l'informatique: les mathématiques contemporaines sont à la base de la théorie actuelle de l'information. Et vous savez que les modèles mathématiques et le traitement des données s'appliquent actuellement déjà, par secteurs, à pratiquement toutes les activités humaines, notamment dans les banques, les assurances, la distribution, la presse, l'édition et l'imprimerie, l'information médicale et hospitalière; dans la construction et l'aménagement, également dans les sciences sociales et humaines, et partout avec beaucoup de succès.

C'est une des raisons essentielles pour lesquelles il faut aujourd'hui essayer d'enseigner un peu plus de mathématiques «vraies» aux enfants qui seront demain des citoyens: nos enfants actuellement à l'école seront dans la plénitude de leur vie active dans vingt ans.

Il est très vraisemblable que dans cet avenir-là l'informatique et l'ordinateur joueront un rôle encore plus grand. Mais il nous faut former des citoyens qui ne soient pas des sujets de l'ordinateur, mais qui connaissent le jeu que l'on joue.

A ce propos, je puis vous indiquer que dans mon activité professionnelle j'ai été amené à constater qu'effectivement le jeune ingénieur qui pendant tout son degré secondaire (inférieur et supérieur) a étudié la mathématique en langage moderne s'adapte mieux et plus vite à l'informatique que ses collègues qui n'ont pas connu le même privilège.

C'est pourquoi «l'école est amenée à s'attacher moins à un état présent du savoir ou du marché, mais à essayer de s'attacher à des choses qui vont se structurer à travers le changement, de manière à préserver à chaque instant toutes les possibilités d'adaptation de l'homme».

Et ma conclusion, je l'emprunterai à Bernard CHARLOT qui s'exprimait dans la revue «L'Éducation», il y a tout juste deux ans, de la manière suivante:

«Il y a une articulation inévitable entre une nouvelle conception des mathématiques, une modification des méthodes d'enseignement et des attitudes pédagogiques, une transformation de la relation pédagogique et une définition de la finalité de l'éducation. Il s'agit donc bien de toute autre chose que de remplacer un contenu mathématique par un autre contenu mathématique.» ...Et il ne faut pas oublier que le but de cette réforme de l'enseignement n'est pas de présenter aux enfants (aux élèves) de nouveaux êtres mathématiques — ensembles, relations, opérateurs, lois de composition, groupes, etc. — toutes choses restant semblables par ailleurs. *LE BUT* est de promouvoir chez l'enfant une attitude active de construction mathématique, ce qui implique, de la part du maître, une révision non seulement de ses méthodes et de ses attitudes, mais aussi de sa conception de la relation pédagogique et des fins de l'éducation».

● Pour qui voudra essayer de penser son enseignement, voici trois indications de route:

— De la Belgique, une collection pour l'enseignement primaire qui recueille les fruits des recherches des Papy, des traditions pédagogiques actives belges, du labeur assidu de ses auteurs: Norbert Thunus, P. Mathen et A. de Winne, aux Editions La Procure, Namur).

- *Mathématique, Première année* (2 cahiers 144 p. plus Guide)
- *Mathématique, Deuxième année* (idem)
- *Mathématique, Troisième année* (2 cahiers 160 p. plus Guide 83 p.)
- *Mathématique, Quatrième année* (Livre 1-2, Elèves/Guide)
- *Mathématique, Cinquième année* (Livre élève 372 p. plus Guide)
- *Grammaire, Troisième année primaire* (192 p.)

Il s'agit là d'une véritable mine d'idées, de problèmes, d'exercices, de travaux, reflétant l'expérience dans les classes (le matériel est présenté organiquement et chronologiquement à raison d'une leçon par demi-journée d'école: environ 200 chaque année) mais aussi les choix médités (on y trouve tout le sel de Papy et le suc de Dienes, bien plus que les recettes toutes prêtes et combien fades que l'on tente de vendre sous l'étiquette «mathématiques modernes»).

- De la France, il faudrait signaler toute la collection «Formation des maîtres», publiée par la CEDIC selon une forme d'abonnement particulièrement intéressante. On y trouve maintes fois la griffe de quelque auteur anglosaxon qui, à l'heure actuelle, semble le seul remède à la paralysie intellectuelle qui afflige le cartésianisme «latin» en vogue dans les classes à travers les manuels en circulation. En particulier sont à lire et... ruminer longuement les réflexions de Jean Kuntzmann, «Evolution et étude critique des enseignements de mathématique».
- D'Amérique enfin, par l'entremise des Editions «Denoël-Gonthier», l'excellent «Piaget à l'école»; les 11 auteurs, en feignant d'avoir compris mieux que quiconque les principes pédagogiques de Piaget, proposent avec lucidité et compétence, règles et stratégies méthodologiques, qui nous sauvent des doctes et inutiles vaticinations des piagétiens patentés.

M.D. Froidcoeur

● Note de la rédaction

A deux reprises, des collaborateurs de Math-Ecole ont développé le thème présenté ci-dessus (pp. 8-17) par T. Bernet; M.-E. No 46, janvier 1971, pp. 7-29: «Comparaisons, Rapports, Proportionnalité», par F. Brunelli; M.-E. No 73, mai 1976, pp. 2-7; «Application linéaire: Proportionnalité», par C. Haller.

● Errata

En suite d'un ennui technique, dans le numéro 74 de Math-Ecole, une demi-ligne n'a pas été imprimée; p. 16, 11e ligne à partir du bas de la page, lire: «... jusqu'à penser que, dans bien des cas, **l'enfant apprend malgré ce que dit le maître**».

1977

Fr. 12.-

Augmentation de 20 % !

Oui

Mais pages plus nombreuses,
plus denses

Et de la couleur...

Alors puisse le présent bulletin de
versement être promptement rempli
et expédié.

Merci

EDITION DIFFUSION LIBRAIRIE

SPES sa

Nouveau
Jeux créatifs

Spécialistes du matériel d'enseignement, nous ajoutons, cette année, à notre assortiment, un programme de jeux.

Stella

Fr. 42.—



Extrait du catalogue

— Plasticubes	11.30
— Briques géantes	35.80
— Baby-constructions	11.90
— Quillettes magiques	43.—
— Mon village	9.80
— Plasticristaux	55.—
— Construijunior	64.—
— Construcubes	37.—
— Domino des fleurs	18.—
— Domino	
des compléments	15.80
— Le jeu de l'oiseau	15.80
— Trois couleurs	
en course	15.80
— Savez-vous compter ?	15.80
— Couleurs, nombres,	
progression	22.—

Demandez nos catalogues jeux à la

LIBRAIRIE SPES S.A.

2, rue Saint-Pierre, 1002 Lausanne

SPES — 40 éditeurs — 24 000 titres — 2 000 000 livres en stock

TABLE DES MATIERES

Editorial	1
Une fois vécue la période d'adaptation, <i>F. Oberson</i>	2
A propos des proportionnalités, <i>T. Bernet</i>	8
Multiplication, <i>N. Guillet</i>	18

Comité de rédaction:

Mlle F. Waridel, MM. Th. Bernet,
L. Biollaz, F. Brunelli, A. Calame,
D. Froidcœur, G. Guélat, R. Hutin,
F. Oberson, J.-J. Walder, S. Roller,
rédacteur, Mlle L. Cattin, secrétaire-
comptable.

Abonnements:

Suisse F 10.—, Etranger F 12.—,
CCP 20 - 6311. Paraît 5 fois par an.
Institut romand de recherches et de
documentation pédagogiques; 43, fbg
de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel.
(Tél. (038) 24 41 91).

Adresse: Math-Ecole, 43, fbg de l'Hôpital, CH-2000 Neuchâtel; CCP 20 - 6311