NOTES DE LECTURE

DES GRANDEURS AUX ESPACES VECTORIELS
LA LINÉARITÉ COMME FIL CONDUCTEUR
CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) B-1400 Nivelles. 2002
Nicolas Rouche, coordinateur
(format A4, 614 pages)

Dans leur collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, nos collègues du CREM viennent de publier leur quatrième ouvrage dont les premiers ont déjà été présentée dans les colonnes de *Math-Ecole* et sont toujours parmi les « best sellers » de notre boutique.[1]

L'esprit et l'ouverture sont maintenus, comme le signale toujours la remarque en page de titre : « Cet ouvrage a été conçu comme source d'idées et base de discussion. Souhaitons que personne n'en fasse un dogme ».

L'intérêt de ce nouveau « pavé » est ici la recherche d'un fil conducteur qui va de l'école primaire au lycée, passant par les grandeurs, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les vecteurs, jusqu'aux transformations linéaires.

L'ouvrage propose des situations-problèmes, bien décrites, avec leurs enjeux mathématiques, la façon de s'y prendre, des déroulements en classe, des prolongements possibles et, parfois, des perspectives à long terme où est définie la place que la situation occupe dans la culture mathématique globale.

Mais plutôt que de commenter ce parcours, laissons la parole aux auteurs qui, dans leur avant-propos, décrivent leur projet de manière magistrale et, au passage, font une analyse historique fort pertinente, tout à fait valable pour la Suisse romande aussi. En voici de larges extraits, significatifs :

« ....

1. La linéarité, une idée de base

Dans les années 60 et 70 du XXe siècle, les promoteurs des mathématiques modernes avaient proposé un fil conducteur unique et clair pour l'enseignement des mathématiques. Pour le dire sommairement, ils privilégiaient les structures et l'enchaînement déductif qui va des ensembles et relations aux systèmes de nombres et aux espaces vectoriels. Cette conception exhibait l'unité de la mathématique, que ces promoteurs défendaient si éloquemment.

À partir de la fin des années 70, ce fil conducteur a été délaissé pour l'essentiel, et l'enseignement, comme les programmes en font foi, est revenu aux divisions traditionnelles des mathématiques, celles que nous avons héritées de l'histoire plus ancienne. Il s'agit en gros de l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, l'analyse et les probabilités. Or ces divisions de la matière mathématique ont un sens. Dans une étude antérieure[2]*, le CREM a montré que chacune d'elles est associée certes à l'étude d'une certaine classe d'objets, mais aussi et peut-être surtout à un mode de pensée. C'est bien d'ailleurs pour cela qu'elles ont émergé au cours des siècles.*

1. Voir p. 3 de couverture et les notes suivantes

2. Voir *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, CREM [1995], dans les chapitres 4 à 9, les sections intitulées « Les nombres comme forme de pensée », « La géométrie comme forme de pensée », etc.

Quoi qu'il en soit, et peut-être précisément parce qu'ils correspondent à des modes de pensée spécifiques, ces chapitres ont tendance à se refermer chacun sur lui-même. Et l'enseignement mathématique, considéré dans son ensemble, se constitue alors en compartiments plus ou moins étanches.

Les enseignants connaissent bien les difficultés, pour les élèves, des transferts de méthodes et d'intuitions d'une matière à une autre. Dans cette perspective, il manque des fils conducteurs, des liens de parenté visibles qui favorisent la mobilité de la pensée.

Comme nous l'avons remarqué déjà ci-dessus, le point de vue des structures a été dans une assez large mesure occulté à partir des années 80. Or les structures peuvent être considérées, en raison même de leur abstraction, comme un mode de pensée non spécifique, en ce sens qu'elles transcendent les divisions traditionnelles des mathématiques et de ce fait favorisent les transferts. Elles transcendent ces divisions, parce qu'elles sont au cœur, au principe même de la pensée mathématique.

D'où la question : n'avons-nous pas assisté, autour des années 80, à un retour trop ample du balancier de l'histoire ? N'aurait-il pas mieux valu, plutôt que d'abandonner les structures, penser à les enseigner autrement ? Telle est la question à laquelle le présent ouvrage propose des éléments de réponse.

On a compris aujourd'hui que les structures ne peuvent pas être au début de l'enseignement. Ce qui vient d'abord, ce sont les grandeurs, les nombres, les formes, des questions à leur sujet, des symboles qui soutiennent la pensée mathématique commençante. Les parentés de structure se découvrent petit à petit. Et d'ailleurs, certaines structures sont plus prégnantes que d'autres.

Dans cet ouvrage, nous montrons le pouvoir éclairant de la structure linéaire. C'est celle qui sous-tend les grandeurs et leur mesure, les rapports et les proportions, la similitude, l'algèbre du premier degré, les combinaisons linéaires et les espaces vectoriels. L'idée de linéarité, qui apparaît modestement à l'école maternelle, se construit par généralisations successives tout au long de la scolarité. Elle est de celles – la principale peut-être ? – qui peuvent soutenir la conception d'un enseignement en spirale, puisque de classe en classe, elle revient dans des contextes divers et éclaire des questions de plus en plus vastes. L'idée de structure linéaire n'est pas donnée au départ, elle s'élabore en même temps que s'approfondit l'expérience mathématique des élèves.

2. De la prime enfance à l'age adulte

Une fois de plus[3], le CREM propose ici un ouvrage qui traite de l'enseignement des mathématiques de la prime enfance à l'age adulte. L'idée est qu'il est intéressant – voire nécessaire – pour chaque enseignant d'explorer non seulement les matières au programme de sa classe, mais encore celles d'avant et celles d'après, puisque l'éducation mathématique forme un tout.

Le risque d'une étude adressée à des lecteurs aussi nombreux et divers est que beaucoup d'entre eux ne la liront qu'en partie. Mais au moins prendront-ils conscience que leur travail quotidien a des tenants et des aboutissants importants, et seront-ils tentés d'y aller voir. ...

3. Creuser profond mais aussi servir en classe

Cette étude regroupe des contributions de deux sortes. D'une part des chapitres de nature épistémologique et historique sur la structure linéaire. L'idée est de creuser profond, sur un

3. Voir les deux autres publications antérieures les plus importantes du CREM, à savoir, *Formes et mouvements, perspectives pour renseignement de la géométrie* [2001] et *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001].

plan théorique. Ensuite des chapitres de situations-problèmes adaptées à tous les âges de l'école, montrant pratiquement la structure linéaire en construction dans diverses matières. Cette double face de notre travail entraîne un autre risque : c'est que le lecteur théoricien ne lise que ce qui l'intéresse immédiatement, et que le praticien fasse de même. Notre espoir est que certains, les plus nombreux possibles, cèdent à la tentation d'éclairer un point de vue par l'autre, ce qui est – nous semble-t-il – la meilleure façon de saisir véritablement l'ensemble du problème de l'éducation mathématique.

4. Contenu de l'ouvrage

... La première partie, qui comporte quatre chapitres, concerne les élèves de deux ans et demi à douze ans. Elle propose d'abord des situations-problèmes sur les balances et les poids à l'école maternelle. Elle se poursuit par diverses activités destinées à l'école primaire et utilisant le tangram. Viennent ensuite un chapitre sur les comparaisons et mesures de capacités, et un autre, destiné à la fin du primaire, sur les grandeurs, les pourcentages et leurs représentations graphiques.

La deuxième partie vise les élèves de douze à quinze ans. et comprend deux chapitres, numérotés 5 et 6. Le chapitre 5 prend la suite du dernier chapitre de la première partie. Il traite d'abord des pourcentages et de divers supports géométriques qui permettent de les visualiser, puis du thème général de la proportionnalité, dans ses expressions numérique (les tableaux de proportionnalité), graphique et algébrique (les formules). Les contextes des questions posées sont divers : problèmes de troc, d'épargne, remplissage d'un réservoir d'essence. ... Le chapitre 6 traite de la proportionnalité et de la non-proportionnalité en géométrie, avec des questions de périmètres et d'aires et enfin une introduction au théorème de Thalès conjointement avec des notions de perspective cavalière.

La troisième partie concerne les élèves de quinze à dix-huit ans...

La quatrième partie est entièrement orientée vers l'histoire et l'épistémologie des vecteurs. ...

La cinquième partie enfin ne comporte qu'un seul chapitre, ce qui peut paraître assez singulier. Cela se justifie par le fait qu'elle propose une synthèse de tout l'ouvrage : en renvoyant systématiquement à tous les autres chapitres, elle dégage la notion de structure linéaire dans ses divers avatars de la maternelle jusqu'à dix-huit ans. C'est donc à ce chapitre que le lecteur est invité à se reporter chaque fois qu'il éprouve le besoin de savoir où il en est.

Notons que nous n'avons pas couvert toutes les matières qui relèvent de l'idée linéaire. Et certaines de celles qui manquent au tableau peuvent même être considérées comme particulièrement importantes. Pour n'en citer que trois : les équations et les systèmes algébriques linéaires, ainsi que le calcul matriciel, la différentielle, qui est l'application linéaire tangente à une fonction, et les équations différentielles linéaires. Mais ce qui relève de la structure linéaire dans le corpus entier des mathématiques est gigantesque, et nous ne pouvions tout traiter. Nous espérons, quoi qu'il en soit, avoir au moins montré une certaine direction de pensée.

Ajoutons enfin que ce travail résulte de la collaboration de toute une équipe dans laquelle chacun a pu exprimer sa sensibilité. Nous avons cherché davantage la qualité dans la diversité, que l'expression d'une pensée par trop monolithique. »

Destinataires : les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens, personnes intéressées à une vision verticale de l'enseignement des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, linéarité et proportionnalité, similitude, grandeurs, vecteurs, épistémologie

ÉVALUATION DES COMPÉTENCES EN MATHÉMATIQUES EN FIN DE 2e ANNÉE PRIMAIRE
RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE PHASE DE L'ENQUÊTE MATHÉVAL
IRDP, Neuchâtel 2003 (03.2)
Jean-Philippe Antonietti, coordinateur avec la collaboration de Ninon Guignard et al.
(format A4, 134 pages, IRDP Case postale 54 CH-2007 Neuchâtel CHF 15.80) 4

Dans le dernier numéro de *Math-Ecole*[5], Jean-Philippe Antonietti présente un des problèmes de cette large évaluation des « compétences mathématiques développées par les élèves de deuxième année primaire ayant bénéficié des nouveaux moyens d'enseignement romands ».

L'enquête conclut que « l'évolution des compétences des élèves se déroule normalement et que les objectifs fixés par le plan d'études romand sont visiblement atteints ». Ceci, c'est pour l'institution qui a commandité le travail. Lorsqu'on sait combien les expressions « évolution des compétences » et « objectifs atteints » dépendent des interprétations de chacun, des questions posées pour les mesurer, des conditions de passation, on ne s'attardera pas sur ces jugements.

En revanche, lorsqu'on pénètre dans l'analyse des problèmes, on découvre la richesse des procédures des élèves et, par conséquent, l'intérêt d'une évaluation qui va au-delà de la simple solution.

Un autre intérêt de cette enquête est la méthodologie proposée par l'enquête, l'échantillonnage des élèves et des classes et les explications des différences observées, en fonction des caractéristiques des élèves, des classes et des maîtres.

D'un point de vue pratique, l'enseignant des premières années d'école primaire dispose ici d'une vingtaine de problèmes, résolus par des centaines d'élèves ou de groupes d'élèves de deuxième année primaire, avec une description succincte des contenus mathématiques et des compétences visées, et un solide inventaire des procédures suivies par les élèves, éléments essentiels pour une analyse a priori.

Il n'est pas simple de créer des énoncés de problèmes tels que des élèves de deuxième année primaire puissent s'engager seuls dans la résolution – c'est une des plus grandes difficultés que rencontrent les animateurs du *Rallye mathématique transalpin* pour les degrés 3 et 4. Les responsables de l'enquête ont fait un gros effort dans le domaine de la clarté des textes, pour réduire au minimum la part de l'enseignant dans la lecture des énoncés. C'est encore un autre aspect positif des problèmes proposés, qui, dans le domaine numérique tout au moins, permettent un travail autonome des élèves.

C'est avec intérêt que nous attendons les problèmes et les résultats de la deuxième phase de l'enquête « Matheval ».

Destinataires : les maîtres des premières années de l'école primaire, formateurs et didacticiens

Mots-clés : mathématiques, évaluation, école primaire, résolution de problèmes

4. Cette publication est également disponible sur le site IRDP http://irdp.ch/publicat/publi-cd.htm

5. *Math-Ecole* 208, pp 37 à 45 : « Apprendre les mathématiques sans parler l'espéranto »

RMT : POTENTIALITÉS POUR LA CLASSE ET FORMATION

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin de Parma (2001) et de Torre delle Stelle (2002)

L. Grugnetti, F. Jaquet, D. Medici, M.-G. Rinaldi, M. Polo (Eds). 2003. ARMT, Universités de Parma et de Siena. Edition bilingue : français – italien, (288 pp.)

Après les *Profits pour la didactique*[1] et *Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*[2]. Le troisième volume des actes des rencontres internationale traite, dans sa première partie, de ***l'exploitation du RMT pour la classe : du problème à la situation didactique*** thème retenu pour la cinquième rencontre internationale.[3]

On trouvera dans cette **première section**, des communications sur la manière de proposer des problèmes du RMT et de les exploiter en classe. En particulier :

Clara Bisso y voit un « antidote à la peur des mathématiques ». Ces problèmes s'insèrent, selon elle, dans une approche plus vivante, plaisante, ludique des mathématiques tout en développant la rigueur scientifique chez les élèves au travers des phases de discussion et de défense des solutions. À une plus large échelle, Roberto Battisti décrit l'utilisation des problèmes du RMT dans le cadre de laboratoires de mathématiques, intégrés dans le programme de classe par plus d'une vingtaine de maîtres du Trentino. Les résultats positifs de cette pratique ouvrent des perspectives plus vastes pour l'avenir.

Des enseignants ont utilisé des problèmes du RMT comme situations-problèmes, dans l'intention d'aborder, pour leurs classes, certains thèmes de leur programme. Daniela Medici et Lorenza De Micheli rendent compte d'un travail sur les variables didactiques qui a permis d'adapter deux énoncés aux besoins de l'enseignement. Michèle Vernex utilise un problème, en crée un deuxième et un troisième, de même structure, pour s'intéresser au transfert de connaissances du premier aux autres.

Les problèmes du rallye ne sont toutefois pas conçus pour se substituer à l'ensemble des activités d'un parcours didactique. Graziella Telatin décrit les obstacles qui se dressent devant leur utilisation régulière : les conditions dans lesquelles se résolvent les problèmes lors des épreuves du RMT sont privilégiées, par rapport à celles de la classe au quotidien.

D'un point de vue plus analytique, Lucia Grugnetti et Maria Gabriella Rinaldi examinent l'aptitude des problèmes du rallye à devenir des situations didactiques. Certains se prêtent bien, par leurs potentialités à faire émerger des savoirs bien définis et reconnus importants pour la construction de nouvelles connaissances, d'autres sont plutôt destinés à des activités où les savoirs mis en oeuvre sont déjà en place.

En partant du point de vue de la recherche en didactique, Chantal Tièche-Christinat tente, à partir des résultats de plusieurs centaines de groupes d'élèves, d'insérer dans le cadre de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud, un problème du rallye et les procédures de résolution analysées.

L'intérêt, pour les maîtres, de certains problèmes pour la classe est évident. Il l'est aussi pour les formateurs.

La sixième rencontre internationale[4] a ainsi pu se pencher sur le thème : ***RMT et formation des enseignants***. La plupart de ses travaux sont reportés dans ce troisième volume des actes des rencontres, en **deuxième section** :

1. Rencontres de Brigue, 1997 et 1999 (Voir p. 3 de couverture)
2. Rencontres de Siena, 1999 et Neuchâtel, 2000. (Voir p. 3 de couverture)
3. Parma, 2001.

Angela Rizza, Vicenza Vanucci et Vera Mori, étudiante, refont le parcours de formation initiale de cette dernière, qui, inspirée par le rallye, choisi d'utiliser certains de ses problèmes comme approche des systèmes linéaires à l'école secondaire. Carlo Marchini, Daniela Medici et Maria Gabriella Rinaldi examinent les incidences des problèmes du RMT sur la formation des maîtres, à la lumière du modèle du triangle didactique.

En formation continue, Georges Combier rend compte d'un stage organisé à la demande des inspecteurs de l'enseignement primaire de sa région afin d'exploiter la dynamique engendrée par la participation au RMT et de développer des pratiques d'enseignement qui accordent à la résolution de problèmes la place centrale qui devrait être la sienne dans la construction des savoirs. L'analyse a priori des problèmes a été introduite progressivement dès les premières années du RMT, puis sans cesse développée et affinée pour devenir systématique. Tout enseignant en formation doit savoir de quoi il s'agit, à quoi elle sert et comment la conduire. Roland Charnay apporte une contribution à la définition de cet outil professionnel d'aide aux décisions et aux choix de l'enseignant, sur la base d'un problème du rallye. Michel Henry va au-delà et montre, du point de vue de la recherche en didactique, plusieurs aspects de l'analyse a priori qu'il présente comme un « concept à géométrie variable ».

Dans la **troisième section** de ces actes, on trouvera encore quelques textes sur la ***dynamique du RMT***.

Luc-Olivier Pochon propose un mode de gestion du RMT par Internet, expérimenté par la section de Suisse romande et, plus généralement, présente une exploitation possible des concours mathématiques par Internet.

La « finale des finales » du 10e RMT a permis aux participants à la sixième rencontre (Torre delle Stelle) de se livrer à un exercice fort instructif. Il s'agissait, lors de cette confrontation fictive, de refaire le travail d'attribution des points, déjà fait précédemment par chaque section lors des finales régionales, pour toutes les classes gagnantes de leur catégorie. L'expérience a permis d'estimer la fidélité et la validité des attributions de points, sur la base des critères définis lors de l'analyse a priori des épreuves.

Le dernier texte est une brève présentation du RMT (p. 282 à 285) destinée aux lecteurs qui voudraient en savoir plus sur cette compétition ou qui souhaiteraient s'y associer.

Ces derniers textes, comme les précédents, montrent que le RMT est une entreprise vivante, évolutive, couvrant un vaste domaine d'activités, allant des tâches administratives à la recherche en didactique des mathématiques, dont les acteurs sont les dizaines de milliers d'élèves, les classes et les enseignants par milliers, les animateurs.

Lors des rencontres, les communications ne sont pas l'apanage d'une catégorie de participants. Chacun peut s'exprimer, avec ses propres termes, pour exposer ses pratiques et ses réflexions. C'est dans ce sens que l'on peut affirmer que le RMT fait office « d'interface » entre recherche en didactique et pratique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

Destinataires : tous les maîtres, en particulier ceux des classes participant au RMT, formateurs et étudiants en didactique des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, résolution de problèmes, analyse a priori, procédures de résolution, formation

F.J.

4. Torre delle Stelle (Sardaigne)