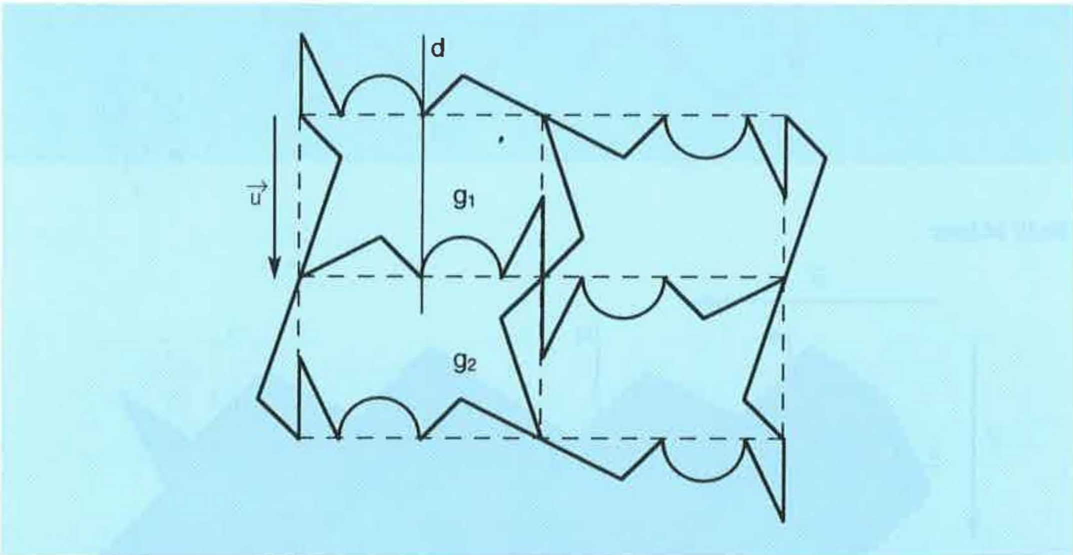
LE COIN DES PAVAGES (4)

Michel Brêchet

Ce dernier épisode[1] traite du recouvrement du plan à l'aide d'une seule figure, par symétries glissées uniquement. Dans ce type de mouvement, le motif choisi doit être retourné par rapport à une droite, puis décalé dans la même direction que cette droite. Il s'agit donc d'une symétrie axiale suivie d'une translation dont le vecteur est parallèle à l'axe de symétrie, ou vice-versa, appelée symétrie glissée[2].

L'artiste hollandais bien connu M. C. Escher (1898–1972) a notamment utilisé cette composition d'isométries pour créer son motif périodique intitulé *Rencontre* (1944), où les optimistes cohabitent avec les pessimistes. Le logo du premier Kangourou des mathématiques[3] fait également partie de cette famille.

La page de couverture de ce numéro montre un pavage par symétries glissées dans lequel, par exemple, la figure g_2 est obtenue à partir de la figure g_1 par la symétrie d'axe d suivie de la translation de vecteur $\vec{u}$, la droite d et le vecteur $\vec{u}$ ayant la même direction.



«Une entreprise ardue» disait Escher à propos de l'invention d'une figure permettant de recouvrir le plan par le seul effet de sa répétition. Et d'autant plus ardue lorsqu'il s'agit de procéder par symétries et translations, serions-nous tenter d'ajouter. Alors en route pour un peu de gymnastique cérébrale.

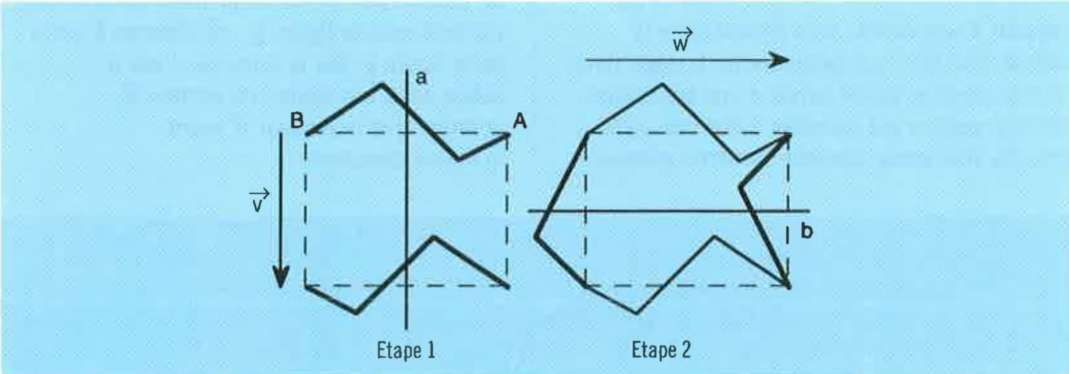
1 Voir les numéros 207, 208 et 209 de *Math-Ecole*

2 La symétrie glissée peut aussi s'obtenir par la composition d'une symétrie axiale et d'une translation non parallèle à l'axe de la symétrie, ou encore par celle d'une symétrie axiale et d'une symétrie centrale. Ces compositions ne sont cependant pas commutatives, comme l'est celle de la définition présentée ici. (Voir à ce propos l'article de A. Calame, «Un plaidoyer pour la symétrie glissée» dans le numéro 154 de *Math-Ecole*).

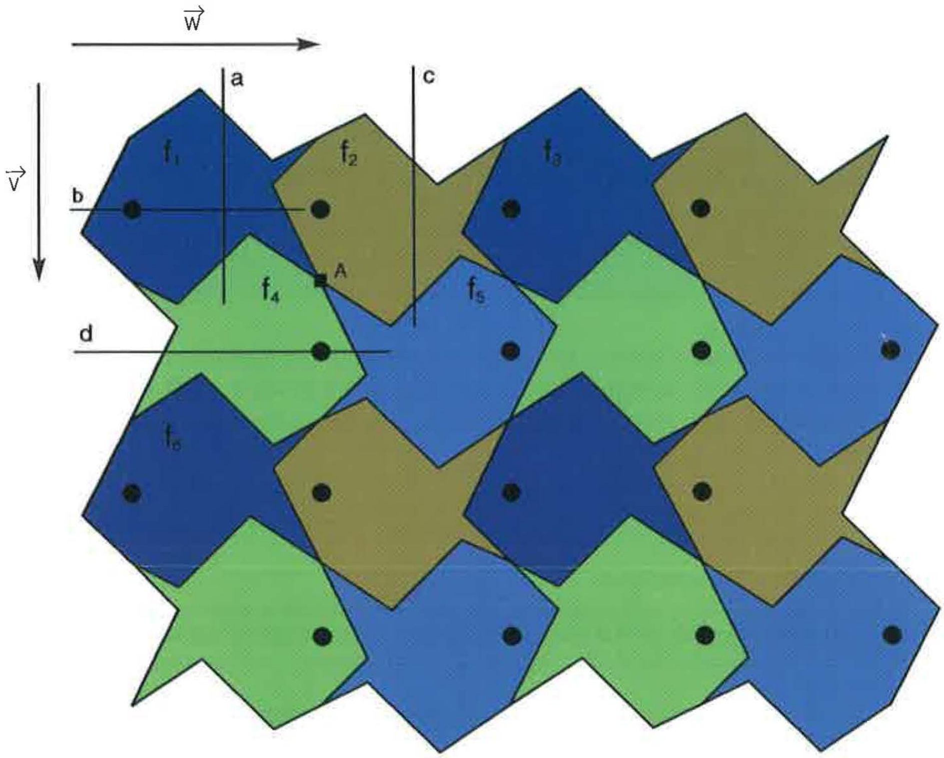
3 Voir *Les Pavages du Kangourou*, André Deledicq & Raoul Raba, ACL-Editions, 1995. Cet ouvrage a été réédité sous le titre «Le monde des pavages». Il peut être obtenu à la Boutique de *Math-Ecole*.

Les pavages par symétries glissées : comment faire ?

- Construire un rectangle.
- Tracer une ligne dont les extrémités sont celles d'un des côtés du rectangle (ici A et B), puis construire l'image de cette ligne par la symétrie d'axe a suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.
- Faire de même pour les autres côtés du rectangle (ici selon la symétrie d'axe b suivie de la translation de vecteur $\vec{w}$).
- Paver le plan par symétries glissées.



Motif obtenu



Analyse du motif

Par construction, deux figures voisines – d'une même ligne ou d'une même colonne – sont images l'une de l'autre par une symétrie glissée :

Première ligne	**Deuxième ligne**	...	**Première colonne**	**Deuxième colonne**	...
$f_1 \xrightarrow[\vec{w} \circ S(b)]{} f_2$	$f_4 \xrightarrow[\vec{w} \circ S(d)]{} f_5$	...	$f_1 \xrightarrow[\vec{v} \circ S(a)]{} f_4$	$f_2 \xrightarrow[\vec{v} \circ S(c)]{} f_5$	...
$f_2 \xrightarrow[\vec{w} \circ S(b)]{} f_3$	...	...	$f_4 \xrightarrow[\vec{v} \circ S(a)]{} f_6$	...	...
...	...	...	...	...	...

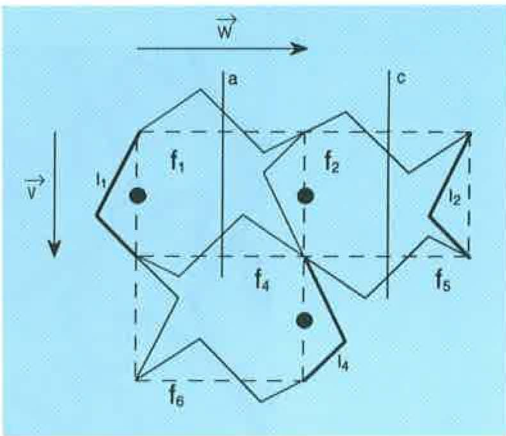
En conséquence, comme la composée de deux symétries glissées d'axes parallèles ou perpendiculaires est respectivement une translation ou une symétrie centrale, on a : $f_1 \xrightarrow[2\vec{w}]{} f_3$, $f_1 \xrightarrow[2\vec{v}]{} f_6$, $f_1 \xrightarrow[S(A)]{} f_5$, ...

Pourquoi ça marche ?

Les figures de la première ligne (f_1, f_2, f_3, ...) et celles de la première colonne (f_1, f_4, f_6, ...) s'emboîtent deux à deux, car deux lignes correspondantes sont images l'une de l'autre par une symétrie glissée.

Considérons maintenant f_5. Si on la construit à partir de f_2, alors elle coïncidera avec f_4. En effet, comme la ligne l_4 est l'image de l_1 par la symétrie glissée $\vec{v} \circ S(a)$, elle sera aussi l'image de l_2 par la symétrie glissée $\vec{v} \circ S(c)$, car :

- l_2 est l'image de l_1 par la translation de vecteur $2\vec{w}$;
- le vecteur $\vec{w}$ est isométrique et parallèle au grand côté d'un rectangle de «base» ;
- les axes de symétrie a et c sont parallèles et chacun d'eux est axe de symétrie d'un rectangle de «base».

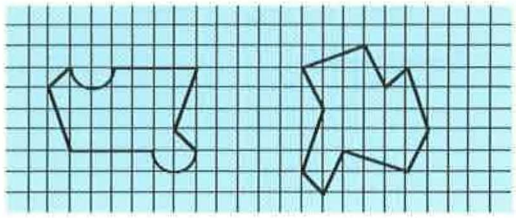


On peut bien sûr faire une démarche analogue en considérant que f_5 est construite à partir de f_4. Ce même type de raisonnement s'applique par ailleurs aux autres figures.

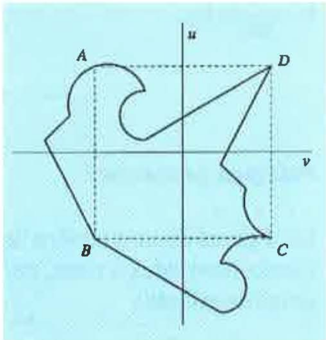
En classe

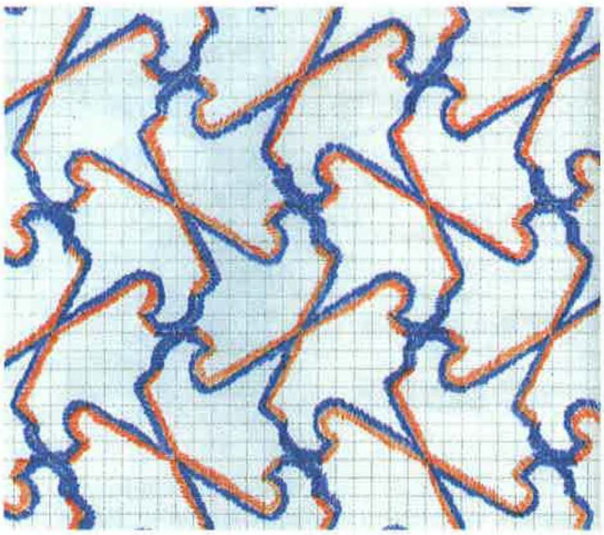
La symétrie axiale ne conservant pas l'orientation, la réalisation de pavages faisant appel à cette isométrie exige une bonne maîtrise de la reconnaissance des formes. Elle nécessite en outre d'effectuer mentalement des rotations autour d'axes situés dans un même plan. Le tout dans un contexte d'enchevêtrement de lignes et de figures, qui accroît encore la complexité de la tâche. Celle-ci est tout de même à la portée d'une large majorité d'élèves, à condition de leur mettre à disposition du papier quadrillé, du papier calque, des ciseaux, les instruments usuels de géométrie, voire un logiciel de dessin géométrique. Dans ces conditions, on peut alors leur demander de :

- paver le plan à partir d'une des deux figures ci-contre (ou d'une autre qui convient) ;
- décrire les isométries en présence dans le pavage réalisé ;
- générer une figure permettant de paver le plan par symétries glissées.



Cette dernière phase constitue un beau défi à relever. Elle conduit la plupart du temps à des productions originales et esthétiques, à l'image de celle de Dany, 14 ans (voir ci-dessous), qui est particulière, car élaborée à partir d'un carré. On pourrait croire à première vue qu'il s'agit également d'un pavage du plan par rotations d'un quart de tour, mais il n'en est rien. La ligne d'extrémités A et B a pour image celle d'extrémités C et D par la symétrie d'axe v suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$. La ligne AD va sur CB par la symétrie d'axe u suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Mais il n'y a pas deux lignes qui se correspondent par rotation.

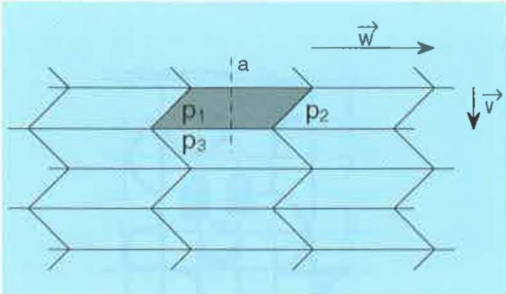


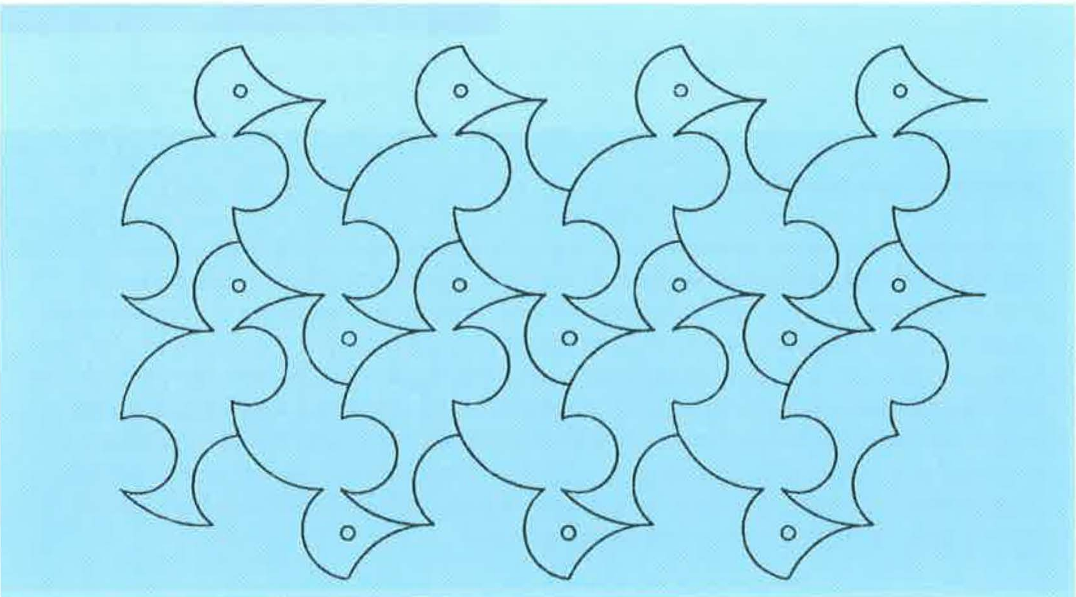


Paver le plan selon deux types de mouvement différents : c'est possible !

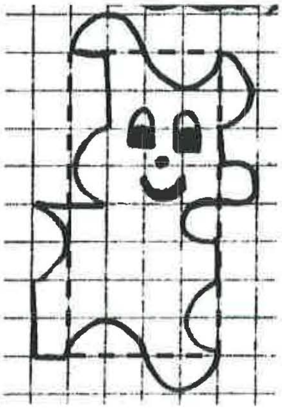
Les méthodes de recouvrement présentées tout au long de ces quatre articles consistent à construire de proche en proche les images d'un motif par un seul type de mouvement (rotation, symétrie centrale, translation et symétrie glissée). Il est cependant possible de faire appel à deux familles de mouvement pour mener à bien cette tâche, comme le montrent les deux exemples suivants.

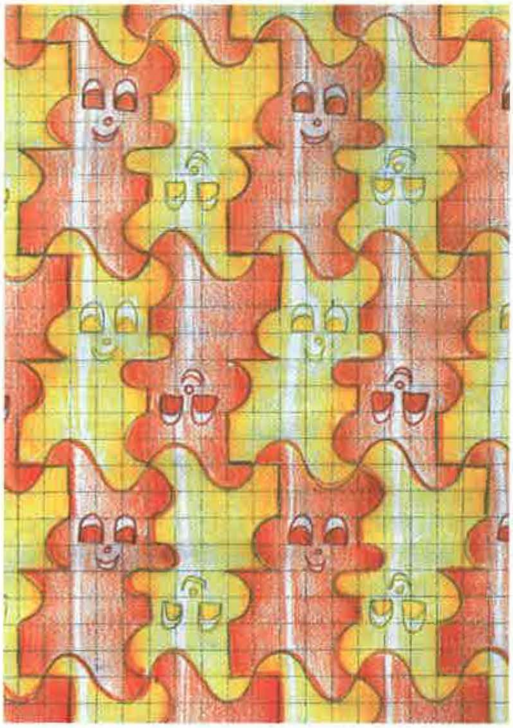
Symétries glissées et translations s'allient bien. Dans ces conditions, le motif initial peut être obtenu à partir de la déformation des côtés d'un parallélogramme. Dans le pavage ci-contre, on peut considérer que le parallélogramme p_3 est image de p_1 par la symétrie d'axe a suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$. Le parallélogramme p_2 est quant à lui image de p_1 par la translation de vecteur $\vec{w}$.
Forts de ce résultat, les amateurs de pavages ont tout loisir de créer des motifs périodiques figuratifs :





Symétries centrales et translations se conjuguent également à merveille.
Ces isométries ont permis à Gaëlle, 15 ans, de réaliser cette magnifique production, dont le motif de base est issu des déformations des côtés d'un rectangle.





Un coup de cœur pour terminer

Les amateurs de pavages interactifs trouveront leur bonheur en visitant le site internet **http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau**. A la page d'accueil, son auteur, enseignante de mathématiques à de futurs professeurs des écoles, le décrit en ces termes : «Vous découvrirez des tours de magie interactifs, de la télépathie, des jeux, des puzzles magiques, des illusions géométriques animées, des paradoxes, de la géométrie et des pavages dynamiques, des opérations anciennes interactives, des trucs malins pour comprendre les maths, des anecdotes historiques, de très nombreuses animations flash, et beaucoup d'autres choses dans mon grenier à malices mathématiques...». L'icône «Magie» permet de réaliser des pavages du plan avec des motifs figuratifs, en musique s'il vous plaît. De la belle ouvrage, assurément. Jetez-y un coup d'œil, vous ne serez pas déçu !