«UNE EXPO POUR LE BICENTENAIRE: LE NOMBRE 1803»

OU UNE EXPÉRIENCE MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE DÉVELOPPEMENT

Philippe Depommier, Pully

Les manifestations de commémoration de l'entrée en 1803 du canton de Vaud dans la Confédération se seront multipliées tout au long de l'année 2003. Les enseignants n'ont pas été en reste: création de textes littéraires, plongée dans l'Histoire, leçons de civisme, repas du Bicentenaire,...

Enseignant les mathématiques en classe de développement pour des élèves de 12 à 16 ans, je tenais également à apporter une pierre à l'édifice. Après l'étude des systèmes agraires et monétaires de l'époque, mes élève ont poursuivi par des activités mathématiques plus générales sur le canton de Vaud, et en particulier sur le nombre 1803. L'aboutissement de ce travail a été exposé dans les locaux de la HEP Vaud section 4.

Passons en revue les principaux travaux exposés: carrés magiques (figure 1) et eulériens, pavages, combinatoire, pliages, illusion d'optique, «alphabet géométrique», nombres triangulaires (figure 2)... Un lecteur avisé constatera que certains thèmes abordés n'apparaissent pas forcément au «programme obligatoire» et ce, à plus forte raison, si les élèves sont en classe de développement.

Qu'importe! Ces derniers n'auraient-ils «droit» qu'aux quatre opérations, aux conversions et aux calculs d'aires de surfaces «élémentaires»? L'exposition atteste du contraire.

J'ai le privilège de côtoyer tout à la fois des élèves de la voie baccalauréat et des élèves de l'enseignement spécialisé. Avant de travailler avec ces derniers, j'imaginais qu'enseigner les mathématiques dans ces classes, consistait uniquement en une répétition d'exercices «judicieusement choisis» et effectués selon le rythme de chacun. L'acquisition de la matière serait à ce prix-là. Les exercices répétitifs sont peut-être nécessaires, mais certainement pas suffisants! J'ai pu constater que ces élèves étaient parfois animés de «passions intellectuelles» (histoire, géographie, astronomie, paléontologie...) contrastant avec leurs prestations scolaires quotidiennes.

Fort de ce constat et aimant moi-même l'histoire des mathématiques, j'ai donc pris le parti de leur faire partager cette passion, même si cette dernière n'a qu'un lointain rapport avec le programme.

Comment le travail s'est-il organisé? Plusieurs activités algébriques et géométriques ont illustré un travail sur le canton de Vaud et le nombre 1803. La succession des thèmes a été dictée par le désir d'alterner géométrie et algèbre, en tenant compte d'une éventuelle lassitude.

A titre d'exemple, considérons plus précisément le thème des carrés magiques. Sa séquence d'enseignement a été la suivante:

1. recherche de carrés magiques classiques d'ordre 3,
2. un carré magique reste-t-il magique par les isométries du carré?
3. un carré magique reste-t-il magique si l'on additionne ou soustrait un même nombre à chaque case?
4. détermination, à partir du carré magique classique d'ordre 3, de carrés magiques contenant le nombre 1803,

5. détermination d'un carré magique d'ordre 3 de constante 1803,
6. constructions de carrés magiques classiques d'ordre impair,
7. construction du plus petit carré magique classique contenant le nombre 1803,
8. construction d'un carré magique d'ordre 3 contenant la date anniversaire 14.04.1803,
9. recherche de conditions permettant de déterminer un carré magique d'ordre 3.

Certes, l'étude poussée des carrés magiques ne figure pas au programme. Néanmoins, une lecture attentive des 9 points précédents devrait mettre en lumière des thèmes qui, eux, y figurent. Pêle-mêle et pour le moins: calculs avec des relatifs, travail avec des lettres, approche de la notion d'équation, isométrie, compréhension d'une marche à suivre, recherche au sens large.

Prenons un second exemple: l'exposition présentait une grande affiche constituée de 24 feuilles A4 (figure 4), chacune contenant une permutation des 4 lettres V, A, U, D écrite 24 fois (24 étant le nombre de permutations de 4 éléments différents d'un ensemble). La consigne proposée aux élèves était la suivante: «Tu disposes de 4 lettres V, A, U, D et de 4 couleurs. Chaque lettre des «mots» construits sur V, A, U, D doit avoir une couleur différente. Combien y-a-t-il de solutions?» Ce problème est difficile et va bien au-delà d'un programme de classe D, j'en suis parfaitement conscient (sa résolution par énumération exhaustive des solutions nécessiterait plusieurs pages). Pourquoi dès lors donner un tel exercice? La réponse au problème n'a finalement que peu d'importance. Par contre, pour le résoudre, l'élève a constaté notamment

- que le problème est difficile,
- que le passage à l'énumération des solutions s'avère périlleux,
- qu'il est nécessaire d'organiser méthodiquement un début d'énumération,
- qu'il est nécessaire de simplifier le problème afin de, peut-être, trouver une méthode générale de résolution.

Loin de moi donc l'espoir que les élèves trouvent les $4!\,.\,4! = 24\,.\,24 = 576$ solutions. D'ailleurs, on peut aisément l'imaginer, ils n'y sont pas parvenus. Mais que de présentations dont la logique m'échappait: un important travail, de ma part, s'est avéré nécessaire, pour comprendre leur propre raisonnement et en conséquence enseigner la résolution du problème. Je demeure pourtant convaincu que ce type d'exercice vaut la peine d'être posé, même (surtout?) en classe D.

Dernier exemple. Si l'année 2003 a célébré l'anniversaire de l'entrée du canton de Vaud dans la Confédération helvétique, elle aura également vu la disparition du regretté *L'Algèbre, Mode d'emploi,* de Gérard Charrière (Fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud, 1995) J'ai eu envie dans le cadre de cette exposition de rendre hommage à ce manuel (et à son auteur!). Sa page de garde présente des nombres premiers disposés en Spirale d'Ulam. Mes élèves, sur le mode alternance de blancs et de noirs, ont réalisé un crible d'Ératosthène pour les nombres premiers inférieurs ou égaux à 1803: une grande réussite esthétique, à mon sens. Cet hommage voulait également montrer que, même si *L'Algèbre, Mode d'emploi* était destiné à l'origine aux classes de la voie baccalauréat, il pourrait, il devrait figurer dans la bibliothèque de l'enseignant de classe D. Que de calculs effectués; que de papier et de crayons utilisés pour vérifier la conjecture de Syracuse (annexe 2) sur les nombres 1803 et 2003. Travail de fourmi!

Que reste-t-il de cette exposition pour les élèves? La fierté, à l'instar des élèves de voie baccalauréat, de voir leurs travaux exposés. Indéniablement un «plus» par rapport à la propre estime de soi ... ce n'est déjà pas si mal!

Du point de vue des apprentissages scolaires, l'exposition aura permis d'aborder différemment le programme sans pour autant pouvoir affirmer qu'il a été mieux assimilé. Une certitude néanmoins : mes élèves ont fait des mathématiques : calculer, essayer, rejeter, conjecturer (et je n'ai pas eu accès à toutes leurs réflexions). Cette exposition reste, à mes yeux, une réussite. Elle a prouvé, pour le moins, que les élèves de l'enseignement spécialisé peuvent faire autre chose que les 4 opérations.

Au moment de conclure cet article, un souvenir du début de ma carrière dans le « spécialisé », en forme de regret : un élève me quittait en fin de scolarité, sans connaître ses livrets. J'aurais dû faire tout ce que j'avais entrepris selon le programme, mais plus, et surtout autrement ! L'exposition a été pour moi, un plaidoyer pour oser et entreprendre. !

N. B : Je tiens à remercier les membres du groupe DDMES (Didactique Des Mathématiques en Enseignement Spécialisé) qui m'ont poussé à écrire cet article.

Le groupe DDMES est un groupe constitué d'enseignants du spécialisé, de formateurs HEP ainsi que d'un professeur de l'UNIGE.

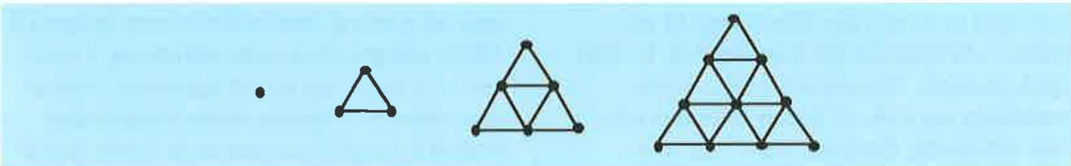
Pour plus de renseignements :
Depommier2000@yahoo.com

ANNEXE 1

1803 et les nombres triangulaires

(Voir également figure 2)

Les Grecs avaient pour habitude de représenter les nombres sous forme géométrique. Par exemple, les nombres triangulaires font partie de la suite 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; 21 ; ... et se représentent géométriquement sous la forme suivante (quatre premiers nombres triangulaires) :



On peut montrer que tout nombre est la somme d'au plus trois nombres triangulaires.

Par exemple :

- 6 est un nombre triangulaire. Il est donc somme d'un unique nombre triangulaire,
- 9 = 3 + 6. « 9 » est donc somme de deux nombres triangulaires,
- 14 = 1 + 3 + 10. « 14 » est donc somme de trois nombres triangulaires.

Consigne :

Ecrire le nombre 1803 comme somme d'au plus trois nombres triangulaires.

Remarque :

- 1803 se décompose comme somme de deux nombres triangulaires : 1803 = 528 + 1275
- la décomposition de 1803 en somme de trois nombres triangulaires n'est pas unique :

1803 = 45 + 105 + 1653 = 276 + 666 + 861 = 120 + 780 + 903 = 210 + 465 + 1128 = 1 + 91 + 1711

ANNEXE 2.

Problème de Syracuse[1]
(Voir également figure 3)

Ce «petit» problème d'arithmétique apparaît pour la première fois, en 1937, aux États-Unis, posé par le professeur Lothan Collatz de l'université de Syracuse (État de New-York, USA). Il a pris de nombreux noms depuis (Collatz problem, conjecture de Thwaites, algorithme de Hasse, ...), suite aux travaux de chercheurs américains intrigués par ce problème. Le voici :

On se donne un entier naturel n non nul :

- *s'il est pair, on le divise par 2 ;*
- *s'il est impair, on le triple et on ajoute 1 ;*
- *on répète le procédé sur le nouvel entier obtenu.*

Dans tous les cas essayés depuis son origine, cet algorithme conduit à un cycle de 4, 2, 1.

Exemples :
1 → 4 → 2 → 1
3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
6 → 3 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1
etc

Figure 1 : Quatre des huit carrés magiques « isométriques », d'ordre 3, avec terme central 1807 et la présence de 1803

1 Charrière (p. 6, problème 27).

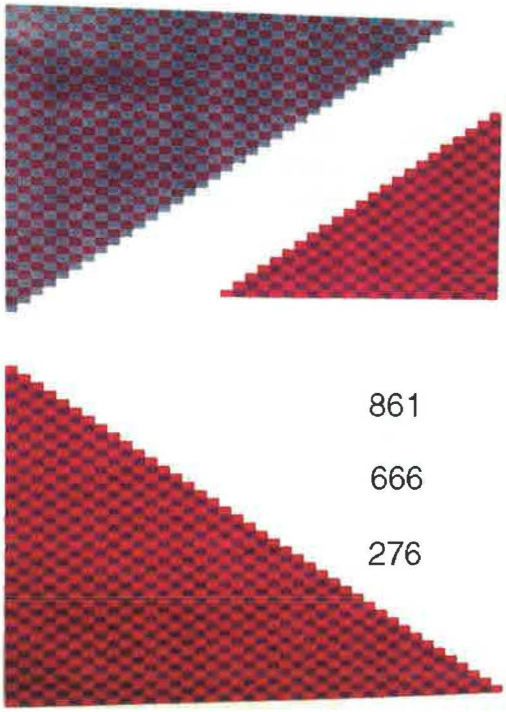


Figure 2 : Illustration de la décomposition de 1803 en somme de trois nombres triangulaires, 276, 666 et 861

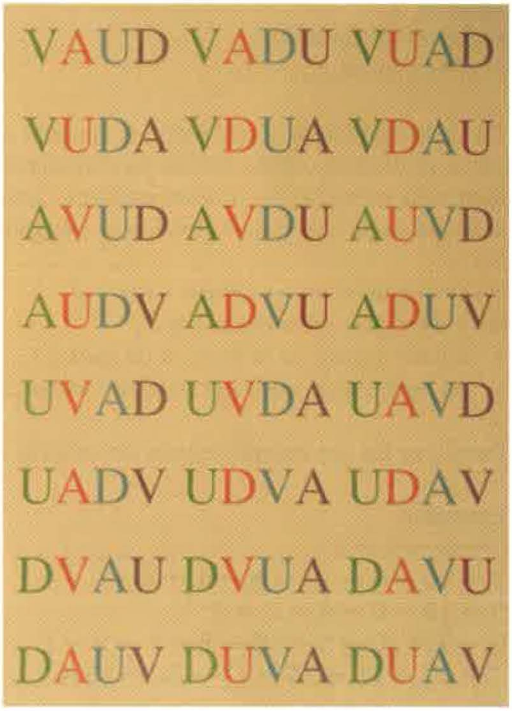


Figure 4 : 24 permutations des lettres V.A.U.D, dans une même permutation des quatre couleurs, sur un total de 576

2003	1803	7229	181	364	4	668	4
6010	5410	21688	544	182	2	334	2
3005	2705	10844	272	91	1	167	1
9016	8116	5422	136	274	4	502	4
4508	4058	2711	68	137	2	251	2
2254	2029	8134	34	412	1	754	1
1127	6088	4067	17	206	4	377	4
3382	3044	12202	52	103	2	1132	2
1691	1522	6101	26	310	1	566	1
5074	761	18304	13	155	4	283	4
2537	2284	9152	40	466	2	850	2
7612	1142	4576	20	233	1	425	1
3806	571	2288	10	700	4	1276	4
1903	1714	1144	5	350	2	638	2
5710	857	572	16	175	1	319	1
2855	2572	286	8	526	4	958	4
8566	1286	143	4	263	2	479	2
4283	643	430	2	790	1	1438	1
12850	1930	215	1	395	4	719	4
6425	965	646	4	1186	2	2158	2
19276	2896	323	2	593	1	1079	1
9638	1448	970	1	1780	4	3238	4
4819	724	485	4	890	2	1619	2
		1456	2	445	1	4858	1

Figure 3 : Les suites de Syracuse, d'origine 2003 (en rouge, avec une centaine de termes sur 144) a, et d'origine 1803 (en noir, qui aboutit au cycle « 4, 2, 1 » déjà au milieu de la deuxième colonne)