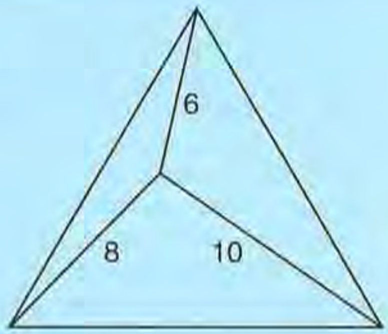
LA FORÊT TRIANGULAIRE

Denis Odiet

La Finale Internationale des Jeux Mathématiques et Logiques s'est déroulée à Paris les 29 et 30 août derniers, à la Maison du bridge.

Lors de l'épreuve n°1 du samedi, le problème suivant était soumis à la perspicacité des concurrents des catégories L1 (Lycéens), L2 (Universitaires), GP (Grand Public) et HC (Haute Compétition).

Mathias est perdu au coeur d'une forêt en forme de triangle équilatéral. Il ne connaît pas les dimensions de cette forêt, mais grâce à un matériel sophistiqué et à de savants calculs, il peut établir qu'il se trouve à 6 km d'un sommet de la forêt, à 8 km d'un autre et à 10 km du troisième.



Quelle est l'aire de la forêt ?

On prendra si besoin est 1,7321 pour $\sqrt{3}$ et on arrondira à 0,01 km².

Les problèmes proposés par la Fédération Française des Jeux Mathématiques et logiques (FFJM) sont une source de premier choix pour l'enseignement des mathématiques. Ils permettent, entre autres, le renforcement de certaines compétences et la diversification de l'enseignement, comme ceux du Rallye Mathématique Transalpin (RMT) et de Mathématiques Sans Frontières (MSF) qui constituent également de véritables mines d'or à la disposition des enseignants.

Pourtant, plusieurs éléments différencient ceux-ci de ceux-là.

Si, lors d'un concours, la FFJM se contente uniquement de la solution d'un problème, le RMT et MSF exigent de la part des concurrents des explications détaillées ou la justification des raisonnements ;

Après le concours, la FFJM ne fournit que les réponses brutes à ses problèmes sur son site internet ; il faut attendre la publication des annales («50, 52, 7x7 énigmes mathématiques», Edition Pole, voir page 3 de couverture) pour en savoir plus.

Pour Mathématiques Sans Frontières, les solutions sont fournies par l'équipe qui a préparé les problèmes, avec un nombre de points à attribuer (5, 7 ou 10). Lors des corrections, les sections régionales établissent leurs propres barèmes internes pour l'attribution des 5, 7 ou 10 points accordés au niveau international. Elles effectuent ainsi une analyse a posteriori des résultats, qui permet d'identifier plusieurs méthodes de résolution et de mettre en évidence certains obstacles. Ces analyses restent cependant internes au groupe de correcteurs et ne sont pas publiées.

Pour le Rallye Mathématique Transalpin, chaque problème est accompagné d'une analyse a priori décrivant le domaine de connaissances, la tâche de résolution avec différentes stratégies attendues et la solution, ainsi qu'un barème d'attribution des points, commun à toutes les sections nationales et régionales. Lors de la correction, des adaptations du barème sont parfois proposées par les sections régionales, et les erreurs, obstacles ou procédures de résolution qui n'avaient pas été prévus par l'analyse a priori sont relevés. Ces analyses des résultats sont publiées régulièrement dans quelques revues (Math-Ecole et L'Educazione Matematica en particulier), ainsi que dans les actes des rencontres internationales sur le RMT (voir page 3 de couverture).

Sur le site de la FFJM, on ne trouvera donc que la solution du problème ci-dessus et il faudra attendre la publication des annales du 17e championnat pour connaître comment les auteurs y sont arrivés.

Voici donc deux procédures de résolution.

La première débouche sur une équation dont le membre de gauche semble assez difficilement réductible. Les solutions de l'équation sont alors gracieusement offertes par QuickMath[1] ou toute calculatrice disposant d'un bon programme de résolution d'équations. Rappelons que les concurrents de la FFJM n'ont droit à aucune aide informatique, quelle qu'elle soit, ni à la calculatrice. Bien qu'élégante, cette première manière de procéder ne semble donc pas être la mieux appropriée à la situation.

La deuxième est l'oeuvre de Daniel Poncet-Montange, un ancien membre du comité de Math-Ecole. Elle débouche sur un ultime calcul écrit facile, grâce à l'astucieuse décomposition d'un nombre sous forme de produit de facteurs. On y voit apparaître le nombre $\sqrt{3}$ et on comprend alors la présence de la valeur approchée de ce nombre dans l'énoncé.

La multiplicité des savoirs mis en jeu dans cette résolution est grande. On pourrait donc s'étonner que ce problème soit soumis à de jeunes lycéens. Mais on sait bien que, comme pour toute compétition de haut niveau, on ne participe pas sans être entraîné et équipé. Pour aller en finale de la FFJM, il faut avoir révisé ses «classiques» : vieux théorèmes et belles formules[2], et, en particulier, avoir relu toutes les annales des anciens championnats où le problème de la recherche du côté ou de l'aire d'un triangle équilatéral à partir des distances aux sommets d'un point intérieur a certes déjà dû apparaître en 16 ans.

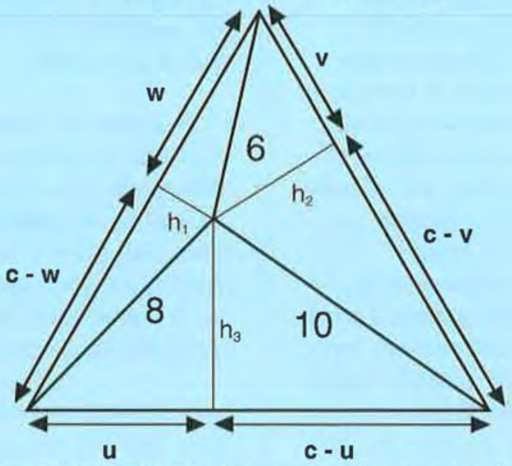
D'où ma question : un lecteur possède-t-il une solution différente, plus simple, éventuellement basée sur des propriétés géométriques?

Merci d'en avertir la rédaction de Math-Ecole !

1 QuickMath permet de résoudre de nombreux problèmes grâce à l'utilisation du logiciel Mathematica : calcul différentiel et intégral, inégalités, équations, matrices, graphes... Adresse : quickmath.com

2 Un bel exemple est fourni par les formules de Brahmagupta et de Bretschneider, dans l'article «Voyage au pays des formules d'aires et de volumes» du numéro 206 de Math-Ecole par M. Criton, un des animateurs les plus actifs de la FFJM

Solution 1 : la solution Quickmath



L'aire du triangle équilatéral est égale à la somme des aires des trois triangles. Donc :

$$\frac{ch_1}{2}+\frac{ch_2}{2}+\frac{ch_3}{2}=\frac{c\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2}}{2} \quad \text{,d'où}$$

$$h_1+h_2+h_3=h=\frac{c\sqrt{3}}{2}$$

De plus, par Pythagore

$$\begin{cases} h_1^2 = 36 - w^2 \\ h_1^2 = 64-(c-w)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$36-w^2=64-(c-w)^2$$

$$36-w^2=64-\left(c^2-2cw+w^2\right)$$

$$36-w^2=64-c^2+2cw-w^2$$

$$w=\frac{c^2-28}{2c}$$

$$\Downarrow$$

$$h_1=\sqrt{36-\left(\frac{c^2-28}{2c}\right)^2}$$

$$\begin{cases} h_2^2 = 36 - v^2 \\ h_2^2 = 100-(c-v)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$36-v^2=100-(c-v)^2$$

.....

$$v=\frac{c^2-64}{2c}$$

$$\Downarrow$$

$$h_2=\sqrt{36-\left(\frac{c^2-64}{2c}\right)^2}$$

$$\begin{cases} h_3^2 = 64 - u^2 \\ h_3^2 = 100-(c-u)^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$64-u^2=100-(c-u)^2$$

.....

$$u=\frac{c^2-36}{2c}$$

$$\Downarrow$$

$$h_3=\sqrt{64-\left(\frac{c^2-36}{2c}\right)^2}$$

On obtient donc l'équation

$$\sqrt{36-\left(\frac{c^2-28}{2c}\right)^2}+\sqrt{36-\left(\frac{c^2-64}{2c}\right)^2}+\sqrt{64-\left(\frac{c^2-36}{2c}\right)^2}=\frac{c\sqrt{3}}{2}$$

dont une des solutions* est:

$$c \cong 13{,}5329$$

*www.quickmath.com

Solution 2

Quelques résultats trigonométriques :

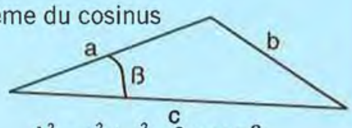
$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

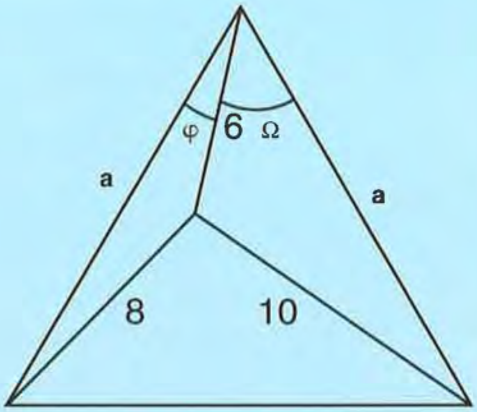
$$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Théorème du cosinus



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$



Théorème du cosinus :

$$\begin{cases} 64 = a^2 + 36 - 12a\cos\varphi \\ 100 = a^2 + 36 - 12a\cos\Omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28 = a^2 - 12a\cos\varphi & \to \cos\varphi = \dfrac{a^2-28}{12a} \\ 64 = a^2 - 12a\cos\Omega \end{cases}$$

$$\cos\Omega = \cos(60° - \varphi) = \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi = \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\cos^2\varphi} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-28}{12a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^2-28}{12a}\right)^2}$$

$$64 = a^2 - 12a\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2-28}{12a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^2-28}{12a}\right)^2}\right]$$

$$64 = a^2 - 12a\left[\frac{a^2-28}{24a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{a^4-56a^2+28^2}{144a^2}\right)}\right]$$

$$64 = a^2 - 12a\left[\frac{a^2-28}{24a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{144a^2-a^4+56a^2-28^2}{144a^2}}\right]$$

$$64 = a^2 - 12a\left[\frac{a^2-28}{24a} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}\right]$$

$$64 = a^2 - 12a\left(\frac{a^2-28}{24a}\right) + 12a\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}$$

$$-a^2+64+12a\left(\frac{a^2-28}{24a}\right)=6a\sqrt{3}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}$$

$$-a^2+64+\frac{a^2-28}{2}=6a\sqrt{3}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}$$

$$\frac{-2a^2+128+a^2-28}{2}=6a\sqrt{3}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}$$

$$\frac{100-a^2}{2}=6a\sqrt{3}\sqrt{\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}}$$

$$\frac{10000-200a^2+a^4}{4}=36a^2\cdot 3\left(\frac{-a^4+200a^2-28^2}{144a^2}\right)$$

$$10000-200a^2+a^4=-3a^4+600a^2-3\cdot 28^2$$

$$4a^4-800a^2+12352=0$$

$$a^4-200a^2+3088=0$$

$$a^2=\frac{200\pm\sqrt{27648}}{2}=100\pm 48\sqrt{3}=4\left(25\pm 12\sqrt{3}\right)$$

$$a_1^2=4\left(25-12\sqrt{3}\right)\cong 16,86 \Rightarrow a_1\cong 4 \quad \textit{trop petit}$$

$$a_2^2=4\left(25+12\sqrt{3}\right)\Rightarrow a_2\cong 13,53$$

Finalement,

$$\boxed{aire=a^2\frac{\sqrt{3}}{4}=4\left(25+12\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}+36\cong 79,30}$$

21th Annual American Invitational Mathematics Examination 2003 (problème 2)

Dans un plan, on dessine cent cercles concentriques de rayons respectifs de 1, 2, 3, ... 100. On colorie en rouge l'intérieur du cercle de rayon 1 et on colorie ou bien en rouge ou bien en vert chaque zone ayant pour frontières des cercles consécutifs, sans que jamais deux zones adjacentes ne soient de même couleur. Le rapport de l'aire totale des zones vertes à l'aire du cercle de rayon 100 peut s'écrire *m/n* où *m* et *n* sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver *m + n*.

Tiré de *Mathématique et Pédagogie* (voir page 11). Solution dans le prochain numéro.