LA CONSTRUCTION DES NOMBRES DÉCIMAUX : PARTIR DES ERREURS DES ÉLÈVES POUR CONCEVOIR DES SÉQUENCES D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

(1e PARTIE)

Pierre Stegen
Université de Liège
Haute École de la ville de Liège

Annick Sacré

Get article, le premier d'une série de deux, nous permet de revenir sur un thème déjà abordé dans de précédentes publications [1] *: l'intérêt de développer des dispositifs d'évaluation diagnostique afin, d'une part, d'anticiper les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction de certaines compétences mathématiques et, d'autre part, de proposer des activités d'apprentissage qui prennent en compte ces difficultés.*

Dans un premier temps, nous restituerons la place de l'analyse des erreurs dans le champ de la recherche en didactique des mathématiques puis nous illustrerons cette réflexion au départ d'exemples pris dans le domaine de la construction des décimaux. La réflexion développée nous permettra ensuite de préciser quelques balises didactiques qui intéresseront tout particulièrement les enseignants du degré supérieur qui ont la délicate mission d'enseigner ces nombres un peu particuliers. Dans le prochain article, nous détaillerons des activités d'apprentissage, mises au point avec des enseignants dans le cadre de dispositifs de recherche collaborative.

Analyser les erreurs des élèves

Analyser les erreurs commises par les élèves lors d'épreuves diagnostiques constitue une étape importante des différents dispositifs de recherche collaborative que nous avons menés ces dernières années. L'intérêt pour l'analyse des erreurs doit être resitué dans une perspective constructiviste du processus d'apprentissage. Cette perspective constitue le point de départ des activités que nous développons en collaboration avec des enseignants.

« L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement le reflet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes et béhavioristes de l'apprentissage ; mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas imprévisibles, elles sont constituées en obstacles [...] Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise » [2]

On retiendra des propos de Brousseau que les erreurs produites par les élèves ne s'expliquent pas simplement en termes de dysfonctionnements ou de manque de connaissance ; elles ne sont pas non plus le fruit du hasard. Très souvent, on constate qu'elles présentent la double caractéristique suivante :

- Elles sont **reproductibles** (on les retrouve quelle que soit la classe fréquentée) et témoignent d'une certaine persistance (apparemment ni les remarques, ni les tentatives de remédiation classique, ni les sanctions ne parviennent à les éradiquer) ;

1. *Math-Ecole* no 202, 203, 205, 207

2. Brousseau, 1983.

– Elles ne sont **pas isolées** ; elles peuvent être mises en relation avec d'autres erreurs et forment ainsi une sorte de réseau.

Des erreurs qui renvoient à trois types d'obstacles

Dans son entreprise de théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Brousseau met en évidence que les erreurs commises par les élèves sont liées à des obstacles qui peuvent être d'origine ontogénique, épistémologique et/ou didactique.

– Les ***obstacles d'origine ontogénique*** dépendent du développement psychogénétique des élèves ; les erreurs qu'ils entraînent s'expliquent alors en termes de limitation du sujet à un moment de son développement.

– « *Les **obstacles d'origine didactique** sont ceux qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet d'un système éducatif. Par exemple, la présentation actuelle des décimaux au niveau élémentaire est le résultat d'une longue évolution dans le cadre d'un choix fait par les encyclopédistes puis par la Convention (conformément à une conception qui remonte à Stevin lui-même) : compte tenu de leur utilité, les décimaux allaient être enseignés le plus tôt possible, associés à un système de mesure, et en se référant aux techniques d'opérations dans les entiers. Ainsi, aujourd'hui, les décimaux sont, pour les élèves, « des entiers naturels avec un changement d'unité », donc des « naturels », (avec une virgule) et des mesures. Et cette conception, appuyée par une mécanisation de l'élève, va faire obstacle jusqu'à l'université à une bonne compréhension des réels [...]*

– *Les **obstacles d'origine épistémologique** sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes. Cela ne veut pas dire que l'on doit amplifier leur effet ni qu'on doit reproduire en milieu scolaire les conditions historiques où on les a vaincus* » (Brousseau, 1976).

La perspective développée par Brousseau conduit à ne plus envisager les erreurs produites du seul point de vue de l'élève mais bien de les analyser en les référant, d'une part, aux caractéristiques du savoir mis en jeu (cfr. une meilleure prise en compte des obstacles d'origine épistémologique) et, d'autre part, aux pratiques d'enseignement et aux progressions didactiques développées pour enseigner ces savoirs (obstacles d'origine didactique).

Des exemples

Pour illustrer ces propos, partons de l'analyse des réponses d'élèves de 5e et de 6e aux items suivants [1] :

Complète en remplaçant dans chaque cas les pointillés par l'un des signes : < ou >

103,5	....	110,51
17,23	....	13,8
16,18	....	16,108
0,029	....	0,0209

Les deux premières comparaisons sont réussies par près de 90 % des élèves de 5e et de 6e. Ces pourcentages élevés de bonnes réponses ne se retrouvent pas pour les deux dernières comparaisons.

1. Ces items ont été présentés à 150 élèves de 5e et 120 élèves de 6e, en début d'année scolaire, dans le cadre d'une épreuve diagnostique qui a constitué le point de départ d'une recherche collaborative impliquant divers enseignants d'écoles communales de la région liégeoise.

16,18 ... 16,108	% 5e	% 6e
>	**41**	**80**
<	56	20
=	2	

0,029... 0,0209	% 5e	% 6e
>	**41**	**81**
<	57	18
=	2	1

Cette même compétence était évaluée, en contexte, par l'item suivant :

La réponse exacte à un problème est 10,24.
Quatre élèves ont fait ce problème et ont trouvé les résultats suivants :

1. Juliette	10,2399
2. Thibault	10,238
3. Adrien	10,241
4. Julien	10,25

– Quel élève a trouvé le résultat le plus proche du résultat exact? ....
– Quel élève a trouvé le résultat le plus éloigné du résultat exact? ....

Cette fois, les pourcentages de bonnes réponses sont très faibles :

Le résultat le plus proche	% 5e	% 6e
1. Juliette	***13***	***27***
2. Thibault	2	5
3. Adrien	7	20
4. Julien	77	48
Pas de réponse	1	

Le résultat le plus éloigné	% 5e	% 6e
1. Juliette	80	46
2. Thibault	4	7
3. Adrien	4	5
4. Julien	***11***	***42***
Pas de réponse	1	

– 13 % des élèves de 5e et 27 % des élèves de 6e répondent correctement à la première question ; pour ces élèves, le résultat le plus proche de « 10,24 » est bien « 10,2399 ». L'erreur la plus fréquemment commise est de considérer que le résultat le plus proche de « 10,24 » est celui de Julien, soit « 10,25 ». 77 % des élèves de 5e et 48 % des élèves de 6e commettent cette erreur. On note aussi, dans une moindre mesure, l'erreur suivante : considérer que le résultat le plus proche de « 10,24 » est « 10,241 » ; respectivement 7 % des élèves de 5e et 20 % des élèves de 6e produisent cette réponse.

- En ce qui concerne le résultat le plus éloigné, 11 % des élèves de 5e et 42 % des élèves de 6e produisent la réponse attendue, à savoir « 10,25 ». L'erreur la plus fréquente est de choisir « 10,2399 » comme résultat le plus éloigné de « 10,24 » ; 80 % des élèves de 5e et 46 % des élèves de 6e commettent cette erreur.

Comment expliquer ces résultats ?

Au niveau du premier item, les deux premières comparaisons ne posent guère de problème aux élèves... car les parties entières des nombres décimaux sont différentes. Il n'est donc pas nécessaire de comparer les parties décimales.

Ce n'est plus le cas pour les deux dernières comparaisons ; cette fois, les parties entières sont identiques. Les élèves doivent donc porter des jugements au départ de l'analyse des parties décimales. L'observation détaillée de celles-ci montre que deux variables didactiques essentielles ont été introduites : d'une part, elles ne présentent pas le même nombre de chiffres et, d'autre part, elles mettent en jeu des nombres qui sont susceptibles d'induire les élèves en erreur.

En effet, de nombreuses recherches mettent en évidence que les élèves ont tendance à considérer qu'un nombre décimal est constitué de deux nombres entiers séparés par une virgule. De ce fait, pour comparer les parties décimales, ils utilisent les règles apprises pour les entiers. Dès lors, il y a tout lieu de craindre que les élèves considèrent que « 18 » < « 108 » et « 29 » < « 209 » et donc que « 16,18 » < « 16,108 » et « 0,029 » < « 0,0209 ».

On se réjouira de constater que 80 % des élèves de 6e ne tombent pas dans le piège posé et situent correctement les nombres proposés les uns par rapport aux autres. On notera également l'augmentation significative des taux de réussite lors du passage de 5e en 6e. Celle-ci traduit, en quelque sorte, le bénéfice des apprentissages réalisés tout au long de la 5e.

Le taux de réussite observé en 6e est loin d'être négligeable mais garantit-il que ces élèves aient bien compris ce qu'est un nombre décimal ?

Rien n'est moins sûr ! En effet, on sait que de nombreux enseignants instituent la règle de comparaison suivante : pour comparer deux décimaux, il faut d'abord s'assurer que les parties décimales contiennent le même nombre de chiffres. Si ce n'est pas le cas, on écrit des zéros à droite de la virgule jusqu'à obtenir le même nombre de chiffres. Un élève qui applique cette règle ne commet pas d'erreur et affirme, à juste titre, que « 16,18 » > « 16,108 » et « 0,029 » > « 0,0209 »... parce que « 180 » > « 108 » et « 290 » > « 209 ». A-t-il pour autant compris ce que sont des centièmes par rapport à des millièmes ou des millièmes par rapport à des dix millièmes ? Quelle est la pertinence didactique de la règle de comparaison instituée par l'enseignant ?

L'analyse des réponses produites au second item nous permet d'apporter des éléments de réponse à cette question. Dans ce cas précis, la même compétence (comparer des nombres décimaux) est contextualisée dans un problème inhabituel pour les élèves impliqués dans cette épreuve. Ce choix est délibéré ; il s'agit de vérifier si les élèves sont capables de mettre en œuvre cette compétence dans des contextes variés.

Un constat s'impose d'emblée : les taux de réussite chutent considérablement ; ainsi, un peu plus d'un quart des élèves de 6e répondent correctement que « 10,2399 » est le nombre le plus proche de « 10,24 ». Comment expliquer cette brutale chute des taux de réussite ?

Pour répondre à cette question, il convient d'analyser en détail la tâche de l'élève. La procédure experte attendue peut être décrite de la manière suivante :

- L'élève doit calculer les écarts entre « 10,24 » et les différentes solutions obtenues par les 4 élèves ;
- Un dix millième étant plus petit qu'un millième (« 10,241 »), que deux millièmes (« 10,238 ») ou qu'un centième (« 10,25 »)... un élève qui a bien conceptualisé les nombres décimaux jugera que c'est bien « 10,2399 » qui est le nombre le plus proche de « 10,24 ».

L'analyse de la tâche experte montre la complexification des démarches de résolution, due à la contextualisation opérée. Celle-ci induit une surcharge cognitive qui a pour conséquence l'oubli de la règle « ajouter des zéros », enseignée par l'instituteur lors du calcul des écarts.

Cette hypothèse, confirmée par de nombreux travaux de recherche, peut être analysée au départ des obstacles didactiques et épistémologiques définis précédemment.

Au niveau des obstacles didactiques, on soulignera qu'il est assez habituel de constater que les élèves commettent plus d'erreurs lorsqu'ils doivent répondre à des questions qui n'ont pas été rédigées par leur enseignant. En fait, les élèves éprouvent de grosses difficultés à faire le lien entre les tâches inhabituelles qui leur sont proposées et les trucs – les règles opératoires – fournis par leur enseignant. D'une manière générale, on observe que leur vécu scolaire quotidien les confronte à des situations mathématiques définies par des codes et des contextes précis ; chaque école, en fonction de sa culture d'établissement et de son passé, fonctionne avec un certain nombre de « traditions » fixant ce qu'il faut entendre par l'apprentissage ou l'évaluation de telle ou telle compétence. Des items rédigés par des personnes extérieures bouleversent ces traditions et engendrent inévitablement des erreurs chez les élèves dont les compétences ne sont pas suffisamment stabilisées. Ils ne retrouvent plus tous ces petits indices qui leur permettent de décoder ce que leur enseignant attend d'eux. Dans ce cas précis, la consigne habituelle de comparer deux nombres au départ des codes « > » ou « < » agit comme une sorte de stimulus qui leur indique qu'ils doivent recourir à la règle « ajouter des zéros pour comparer des décimaux ». Le caractère inhabituel du deuxième item ne permet pas le déclenchement de ce stimulus.

Cela conduit à s'interroger sur les obstacles épistémologiques liés à l'enseignement des décimaux et sur les stratégies didactiques habituelles développées par les enseignants pour favoriser la construction de ce concept. Autrement dit, qu'est-ce qu'un nombre rationnel et quelle est la pertinence de la règle « ajouter des zéros » ?

Dans ERMEL CM1, les auteurs attribuent les sources de difficultés des élèves à une prise en compte insuffisante, dans l'élaboration des situations d'apprentissage, des deux questions suivantes :

- **Pourquoi des décimaux?** Quelles sont, autrement dit, les situations qui vont rendre nécessaire et motiver leur introduction ?
- **Comment écrire ces nouveaux nombres?** Comment donner du sens aux écritures à virgule ? Comment articuler l'écriture des nombres entiers, des nombres fractionnaires, des nombres décimaux ?

Comme le fait apparaître l'analyse des principales erreurs commises par les élèves, il existe une rupture essentielle entre les nombres naturels et les nombres décimaux sur les points suivants :

	N	Q
l'idée de succession	Un naturel a un successeur. Le successeur de « 7 » est « 8 ».	Cette idée n'a évidemment pas de sens pour les décimaux. Ainsi, quel est le successeur de « 2,75 » ? « 2, 76 » ou « 2,751 » ?
les problèmes d'intercalation	Entre deux naturels, il existe un nombre fini de naturels.	Entre deux décimaux, il existe une infinité de décimaux.
les règles de comparaison sont différentes	12 > 8	mais 6,12 < 6,8

Ces différences sont à l'origine d'autant de difficultés dans la construction des décimaux. En effet, celle-ci intervient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entiers. Pour les enseignants, il est dès lors difficile d'empêcher les élèves de traiter les décimaux sur le modèle des nombres entiers... qu'ils maîtrisent par ailleurs fort bien (cfr. item) et donc de considérer que 8,12 > 8,3 > 8,2 ou que « trente-deux unités trois centièmes » s'écrit en chiffres de la manière suivante « 32,003 ».

A cela, il convient d'ajouter que les méthodes habituelles d'introduction des décimaux évitent d'aborder la question de la densité des décimaux (quel est le successeur de « 3,14 » ? « 3,15 » ou « 3,141 » ?).

Plutôt que d'aborder les obstacles liés à l'introduction des décimaux, les enseignants préfèrent souvent doter leurs élèves de trucs, supposés leur permettre de se débrouiller avec ces nouveaux nombres. Ainsi, par exemple, dans le cas de l'item 1, ils ont sans doute souvent répété à leurs élèves que pour comparer des nombres à virgule, il faut que chacun des nombres soit sur un même pied d'égalité et qu'il faut parfois ajouter des « zéros ». Si l'élève ne comprend pas le pourquoi mathématique de cette consigne, il va devoir la mémoriser sans comprendre... il est tout à fait normal qu'il l'oublie lorsqu'il se trouve en situation de résolution complexe.

(La 2e partie de cet article sera publiée dans le prochain numéro)