PAVAGE DE L'ESPACE 3D

Jean Bauer
Jean-Philippe Lebet

Dans cet article, nous examinons quelques solides qui pavent l'espace à 3 dimensions sans laisser de vides. A partir du réseau cubique bien connu de tous, nous en dérivons la paire tétraèdre-pyramide,
ou ce qui revient au même le trio tétraèdre-tétraèdre-octaèdre pour aboutir à l'octaèdre tronqué.
Dans un article ultérieur, nous aboutirons au dodécaèdre rhombique et à d'autres solides de la même famille.

PAVAGE 3D DE CUBES

On voit bien qu'avec les cubes, il est trivial de paver l'espace. *(figure 1)*[1]
Plusieurs autres solides ont la même propriété. Certains se rencontrent en minéralogie, nous en étudions ici quelques uns.

Transformons le cube élémentaire C_1 en le coupant par 4 plans passant chacun par 3 sommets de manière à délimiter les 4 faces d'un tétraèdre régulier T_1. L'un de ces plans est visualisé en rouge. *(figures 2 et 3)*

Le volume du cube correspond à la somme du volume des 4 tétraèdres «aplatis» (qui s'assemblent en une pyramide à base carrée P_1) et du volume du tétraèdre central T_1. *(figure 4)*

Les 4 tétraèdres aplatis forment bien une pyramide P_1 *(figure 5)*

Le cube C_1 se transforme ainsi en une pyramide P_1 et un tétraèdre T_1 *(figure 6)*

1 Les photos de cet article présentent des modèles réalisés avec le système Acrogames de TRIGAM.

Montrons géométriquement, d'une manière élégante, le rapport entre T_1 et P_1:

Comme cette pyramide P_2 a des arêtes de dimensions doubles, elle a un volume de $8P_1$. *(figure 7)*

D'autre part elle contient $4T_1$ et $6P_1$. Ceci revient à dire que le volume T_1 est la 1/2 du volume P_1. Et donc aussi le 1/3 du volume du cube, puisque $T_1 + P_1$ forment le volume d'un cube C_1.

En réunissant 2 pyramides P_1 par leurs bases carrées on forme un octaèdre O_1. De ce qui précède on peut dire que le volume de O_1 vaut 4 fois le volume de T_1. *(figure 8)*

Dans les figures précédentes les solides T_1 et P_1 s'empilent sans laisser de vides, comme on le déduit des angles des faces. Il en va de même pour les solides T_1 et O_1. Nous appelons T_n, P_n, O_n, des solides dont l'arête vaut n fois celle de T_1, P_1, O_1 (n est un entier positif).
Par exemple on peut assez facilement démontrer les formules suivantes pour les volumes : (dont certaines ont déjà citées dans un article antérieur)*

$$V(T_n) = (n/3)\,(n^2 + 2)\,V(T_1) + (n/3)\,(n^2 - 1)\,V(P_1)$$

$$V(P_n) = (2n/3)\,(n^2 - 1)\,V(T_1) + (n/3)\,(2n^2 + 1)\,V(P_1)$$

En considérant des solides T_n, P_n, O_n, de plus en plus grands on est amené au passage à la limite suivant exprimant le rapport entre le nombre de T_1 et le nombre de P_1 :

$$\frac{(n/3)\,(n^2 + 2)\,V(T_1)}{(n/3)\,(n^2 - 1)\,V(P_1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Et de même:

$$\frac{(2n/3)\,(n^2 - 1)\,V(T_1)}{(n/3)\,(2n^2 + 1)\,V(P_1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

Ainsi il faut autant de T_1 que de P_1 pour remplir l'espace. Ces 2 types de solides sont complémentaires.

* Math-Ecole N°168

A ce stade, il est légitime de se poser la question: peut-on trouver un solide autre que le cube qui conserve la propriété de remplir tout l'espace? (Bien entendu, il existe une infinité de parallélépipèdes qui satisfont cette propriété, mais on peut en trouver d'autres tout aussi intéressants).Essayons de combiner les volumes de $T_1 + P_1$, ou un multiple de ceux-ci, en un seul solide qui conserve la propriété de remplir tout l'espace.

L'octaèdre O_3 est formé de 38 P_1 et 32 T_1, mais si on lui enlève une pyramide P_1 à chacun de ses 6 sommets, on obtient un octaèdre tronqué (au 1/3 de l'arête), il reste 32 P_1 et 32 T_1, ce qui est la proportion nécessaire. Le jeu OCTIX démontre que cet octaèdre, ainsi tronqué, remplit bien tout l'espace.

Attention : il ne suffit pas d'avoir cette proportion pour pouvoir remplir tout l'espace ! Contre-exemple : T_4 tronqué de T_1 à chacun de ses 4 sommets (il contient bien 20 P_1 et 20 T_1, mais ne s'empile pas sans laisser de vides)

Octaèdre tronqué

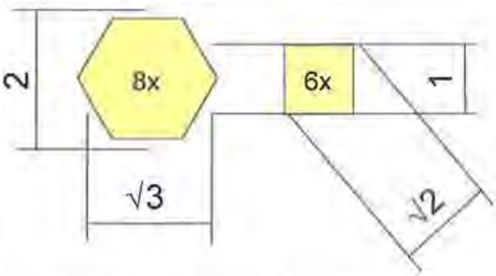
vue de dessus
vue de dessous
vue Est
vue Ouest

vue Nord
vue Sud

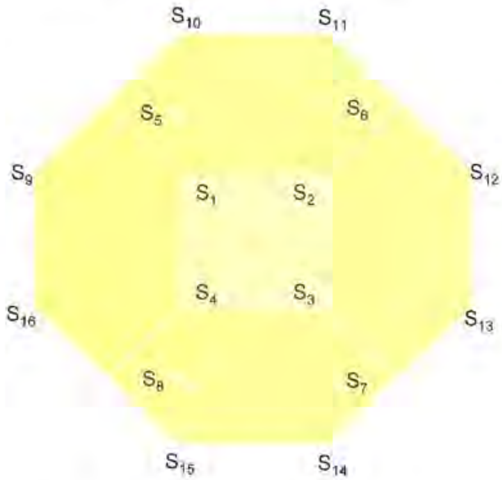
JEUX DE SOLIDES BASÉS SUR L'OCTAÈDRE TRONQUÉ.

Les professeurs de mathématiques trouveront ci-dessous, quelques idées qui les aideront à familiariser leurs élèves avec les relations de Pythagore dans l'espace.

Rappelons que l'octaèdre régulier tronqué au tiers de sa longueur d'arête est délimité par 6 facettes carrées et 8 hexagones réguliers . Toutes les arêtes ont donc la même longueur normalisée à 1.



L'octaèdre tronqué ainsi a donc toutes ses arêtes de même longueur. De plus, ses 24 sommets sont situés à égale distance du centre d'une sphère les reliant tous. Une autre caractéristique très intéressante est que la distance d'un sommet à n'importe quel autre est égale à $+\sqrt{A}$, A étant un entier entre 1 et 10, comme le montre le tableau plus loin.



Les sommets S_{19}-S_{24} sont ceux des coordonnées Z négatives

On considère 6 plans yz de coordonnées x:

$x = -\ 1.5$ pour S_9; S_{16}
$x = -\ 1$ pour S_5; S_8; S_{17}; S_{20}

$x = -\ 0.5$ pour S_{10}; S_4; S_{10}; S_{15}; S_{21}; S_{24}
$x = +\ 0.5$ pour S_2; S_3; S_{11}; S_{14}; S_{22}; S_{23}
$x = +\ 1$ pour S_6; S_7; S_{18}; S_{19}
$x = +\ 1.5$ pour S_{12}; S_{13}

On considère 6 plans xz de coordonnées y :

$y = -\ 1.5$ pour S_{14}; S_{15}
$y = -\ 1$ pour S_7; S_8; S_{19}; S_{20}
$y = -\ 0.5$ pour S_3; S_4; S_{13}; S_{16}; S_{23}; S_{24}
$y = +\ 0.5$ pour S_1; S_2; S_9; S_{12}; S_{21}; S_{22}
$y = +\ 1$ pour S_5; S_6; S_{17}; S_{18}
$y = +\ 1.5$ pour S_{10}; S_{11}

On considère 5 plans xy de coordonnées z :

$z = -\sqrt{2}$ pour S_{21} à S_{24}
$z = -\sqrt{2}/2$ pour S_{17} à S_{20}
$z = 0$ pour S_9 à S_{16}
$z = +\sqrt{2}/2$ pour S_5 à S_8
$z = +\sqrt{2}$ pour S_1 à S_4

Distance de
S_1 à S_2; S_4; S_5 $= \sqrt{1}$
S_1 à S_3 $= \sqrt{2}$
S_1 à S_6; S_8; S_9; S_{10} $= \sqrt{3}$
S_1 à S_{11}; S_{16} $= \sqrt{4}$
S_1 à S_7; S_{17} $= \sqrt{5}$
S_1 à S_{12}; S_{15} $= \sqrt{6}$
S_1 à S_{13}; S_{14}; S_{18}; S_{20} $= \sqrt{7}$
S_1 à S_{21} $= \sqrt{8}$
S_1 à S_{19}; S_{22}; S_{24} $= \sqrt{9}$
S_1 à S_{23} $= \sqrt{10}$

Ces distances se calculent à partir des coordonnées précédentes en réalisant les opérations:

$$(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2 + (z_1 - z_n)^2$$

et en en extrayant la racine. Ce solide pourra donc servir très concrètement à illustrer les relations de Pythagore dans l'espace !
En faisant pivoter doucement l'octaèdre tronqué sur l'un de ses axes de symétrie, on découvre successivement 4 directions d'empilement permettant:

1. Le montage de pyramides à base carrée :

à 0°

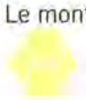
2. Le montage de pyramides à base rectangulaire :

à 35.264°

3. Le montage de tétraèdres aplatis :

à 54.736°

4. Le montage de tétraèdres :


ou de pyramides à base rhombique :

à 90°

Remarque :

Dans le cadre d'un cube, 3 directions d'empilement seulement sont à considérer et pas 4, comme ci-dessus.
Il en va de même pour le dodécaèdre rhombique de rapport d'axes $\sqrt{2} / 1$. Pour le dodécaèdre rhombique de rapport d'axes $\varphi / 1$ la situation est beaucoup plus complexe mais sort du cadre de notre article.

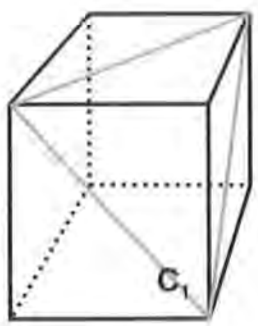


figure 2

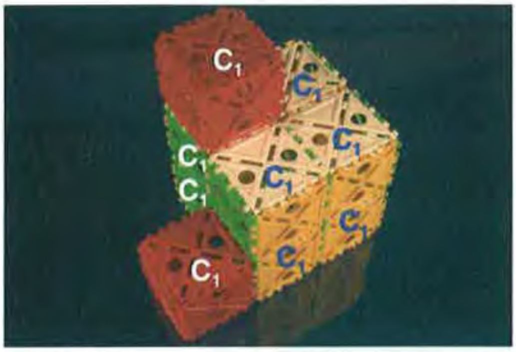


figure 1

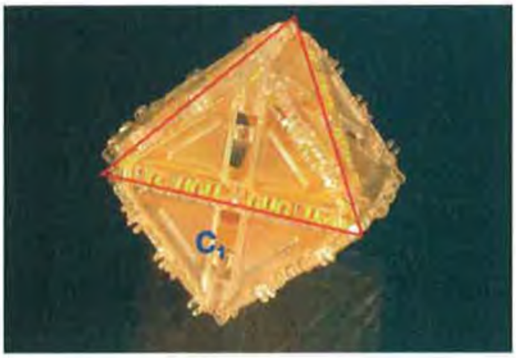


figure 3

figure 4

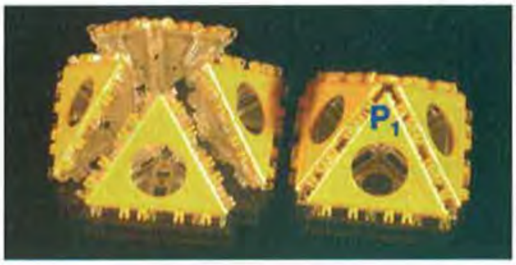


figure 5

figure 6

figure 7

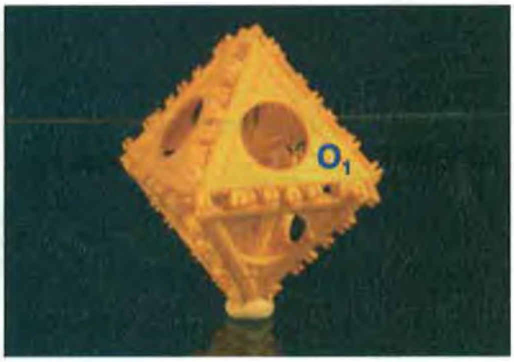


figure 8

figure 9

Nous avons développé un jeu **OCTIX**, véritable **TANGRAM à 3D**, qui illustre toutes ces possibilités d'assemblage. Il est composé de 6 pièces formées chacune de 2 à 5 octaèdres tronqués solidaires.

Voici quelques configurations possibles:

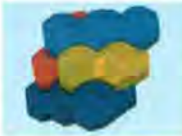

«pyramide» à base carrée


«octaèdres» à base carrée ou en losange


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre»


«demi-pyramide» à base carrée

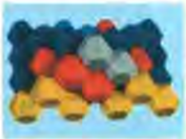

«octaèdres» à base carrée ou en losange


«demi-pyramide» à base rectangulaire


«pyramide» à base losange

Nous donnons également quelques configurations obtenues avec 2 jeux OCTIX:


«pyramide» à base carrée


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre» plat


«tétraèdre»


«octaèdres» à base carrée ou en losange


«pyramide» à base rectangulaire


«tétraèdre» plat


«tétraèdre» plat

Le jeu est en plastique injecté très agréable à manipuler et posant des énigmes bien illustrées. Vous pouvez vous le procurer auprès de
Trigam, www.trigam.ch - info@trigam.ch,
Neuchâtel CH, tél.032 7212838 au prix de CHF 12.–
ou le réaliser chez vous en carton, mais il y faut beaucoup de temps.