UN PROBLÈME RÉVÉLATEUR

Clara Bisso[1], Gênes

A Gênes, « petite » section de l'ARMT[2], 34 classes ont participé au Rallye en 2004 (dont seulement 9 de la « scuola media » (degrés 6 à 8). Par conséquent, les réponses au problème 10 de la première épreuve du 12e RMT, Le champagne de minuit (cat.5,6,7,8), constituent un échantillon restreint, mais très significatif pour l'histoire de la section génoise.
En fait, lors de notre première participation au Rallye, en 2001 notre équipe de correcteurs avait relevé des difficultés de résolution dans les travaux d'élèves concernant le domaine de la combinatoire :
Par exemple, le problème[3] Bar du parc, de la deuxième épreuve du 9e RMT, dont l'énoncé suit, n'avait été résolu correctement que par une classe sur 12.

BAR DU PARC (Cat. 3, 4)

Au Bar du Parc, Jules prépare des jus de fruits. Il a quatre sortes de fruits : des ananas, des oranges, des kiwis, des bananes.

Anne a choisi un jus « orange-ananas »,
Bertrand a choisi un jus « orange »,
Caroline a choisi le mélange des « quatre sortes de fruits », et il y a encore beaucoup d'autres choix possibles.
Avec ses quatre sortes de fruits, combien de jus de fruits différents Jules peut-il préparer pour ses clients? Indiquez lesquels.

Sur les 12 copies corrigées, huit avaient obtenu « 1 point », deux « 2 points » une « 3 points » et une seule « 4 points »[4].
C'était le cas le plus flagrant, mais d'autres problèmes où intervenait la combinatoire (par exemple : *Les brochettes* (cat. 5, 6) et (7, 8) de la première épreuve) faisaient aussi apparaître des procédures de résolution tout à fait incomplètes.
Durant l'analyse a posteriori, les correcteurs avaient relevé que la majeure partie des travaux d'élèves présentaient des combinaisons qui n'étaient pas issues d'une recherche organisée mais étaient plutôt le fruit d'essais aléatoires qui n'arrivaient pas à prendre en compte tous les cas possibles. Ceci autant dans l'un que dans l'autre des degrés scolaires auxquels le problème avait été proposé.
Le fait que la combinatoire n'occupait qu'un espace restreint dans la pratique didactique de notre réalité scolaire a été considéré comme l'une des causes importante de ces lacunes, lors de l'évaluation de ces résultats.
Depuis cette première expérience, nos classes ont soit participé aux éditions successives du Rallye, soit travaillé sur des problèmes lors des activités didactiques courantes, vu que le Rallye a été inséré dans les plans de l'offre de formation de plusieurs écoles. Trois ans après, les résultats obtenus dans le domaine de la combinatoire nous permettent de constater une évolution certaine, que nous attribuons à ces pratiques nouvelles.
En effet, le problème *Le champagne de minuit* a donné les résultats suivants, quatre « 1 point », trois « 2 points » trois « 3 points » et six « 4 points » ont été attribués aux 16 copies examinées.
Par rapport à la situation précédente, l'évolution des attributions de points est sensible et les stratégies de résolution intéressantes.

1 L'auteure est enseignante à l'école primaire (de la 1e à la 5e) à Gênes et responsable de la jeune section locale de l'ARMT.
2 Association du Rallye mathématique transalpin, fondée en 2001, qui compte actuellement 19 sections en Italie, Suisse romande, Tessin, France, Luxembourg et Israël.
3 Pour une analyse détaillé de ce problème, voir : Vernex. M. Problème « Bar du parc », analyse et utilisation en classe. In *Actes des rencontres internationales du RMT*, Parma 2001 et Torre delle Stelle 2002 (Voir p. 3 de couverture), et Vernex M. : 2001, *« Croisement » et « Bar du Parc », Création et utilisation de deux problèmes de mathématiques*, IRDP.
4 Avec le même barème d'attribution des points, sur 71 copies de Suisse romande, 29 avaient obtenu « 4 points »

Voici le problème :

> **LE CHAMPAGNE DE MINUIT** (Cat. 5, 6, 7, 8)
>
> 16 personnes fêtent ensemble le Nouvel An. À minuit précise, chacun choquera son verre de champagne contre celui de tous les autres.
> ***Combien de tintements de verres va-t-on entendre?***
> Expliquez votre raisonnement.

L'analyse a priori prévoyait que, après avoir compris que chacun devait choquer son propre verre contre celui des 15 autres personnes, on pouvait arriver à la solution selon l'une des trois stratégies suivantes :

- Chercher une représentation adéquate qui permette de compter tous les tintements, ce qui est simple si on réduit le nombre de personnes à 3, 4 et 5, ...c'est-à-dire résoudre le problème pas à pas en partant de cas élémentaires, reporter les résultats dans un tableau, trouver l'opération nécessaire et l'étendre au cas de 16 personnes.
- Ou : adopter un raisonnement du genre : «s'il y a 16 personnes et que chacun doit choquer son verre contre celui des autres, il suffit de multiplier 16 par 15 et de diviser le produit par 2, sinon chaque tintement serait compté deux fois. Conclure qu'il y a (16x15)/2 = 120 tintements.
- Ou encore : dénombrer les tintements personne par personne : la première produit 15 chocs, la deuxième 14 nouveaux chocs, ... et calculer 15 + 14 + 13 + 12 + 11 ... + 1

Au cours de la correction, on a constaté que :

- aucun groupe d'élèves n'a opté pour la première stratégie prévue par l'analyse a priori ;
- ceux qui ont utilisé la deuxième stratégie n'ont souvent pas pris en compte la double valence de chaque tintement, (n'ont pas divisé par 2) même si ils ont produit des solutions graphiques originales (*Voir figure 1*, Cat. 7, dont la traduction du texte est : *Nous avons calculé le résultat en faisant : 1 personne trinque avec 15 personnes et vice-versa. Donc on a fait 15 x 16 = 240).*
- les groupes qui ont adopté la troisième stratégie ont obtenu les meilleurs résultats. On a relevé quelques petites erreurs de calcul dans la somme des tintements (15 + 14 + 13 + ...) et des modalités diverses dont le dessin avec des représentations variées ou des tableaux à double entrée. Exemple solution de la *figure 2*, Cat. 5, dont le texte dit ceci : *Explications : En faisant les visages, et en faisant correspondre une couleur à chacun (pour le tinte-*

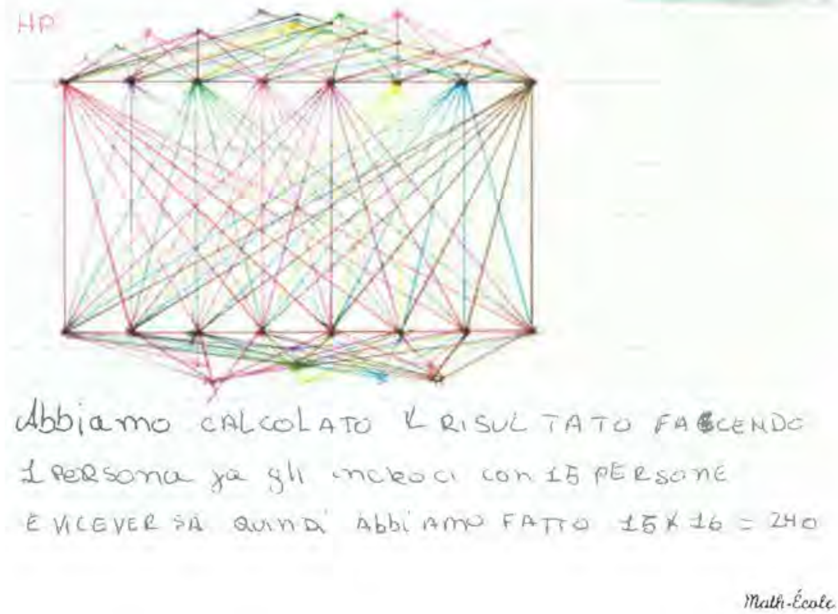

figure 1

ment), on a compté combien de tintements chacun fait et on les a additionnés. Autre exemple, à partir d'un tableau tout à fait analogue à celui de la *figure 3*, les élèves expliquent : *Chaque personne choque son propre verre avec celui des autres invités, ce qui fait 15 personnes. Une personne ne peut trinquer avec soi-même ni avec celles qui ont déjà trinqué avec elle. Par conséquent, en comptant sur le tableau, le nombre des tintements est 120.* (Cat. 7)

figure 2

- une copie (V. *figure 3*) fait apparaître une stratégie non prévue par l'analyse a priori, partant du calcul de l'aire du rectangle de dimensions 15 x 16 : *En cherchant l'aire de ce rectangle B x h) nous avons trouvé 240. Calculant que les croix occupant les espaces correspondant aux tintements entre les personnes (la moitié) nous avons divisé par 2240 et avons obtenu 120 (le nombre de tintements des verres)* (Cat. 6)

Toutes les copies témoignent, de la part des élèves qui ont résolu le problème, d'une amélioration des capacités à s'organiser dans la recherche de stratégies permettant un dénombrement le plus précis possible.

Pour de plus grands élèves, on pourrait trouver des développements didactiques intéressants de ce problème en introduisant par exemple les nombres triangulaires, puis, ensuite les factorielles, à la manière de l'ouvrage *Le démon des maths*[5].

5 H.M.Enzensberger *Le démon des maths* Ed. Seuil, 1998 (*Il mago dei numeri* Ed. Einaudi). Conte fantastique où un petit lutin s'introduit dans les rêves d'un enfant et lui fait découvrir des nombres particuliers par des pyramides, triangsympathique

figure 3