ÉVALUATION : AVEC DES BAGUETTES

Michel Brêchet

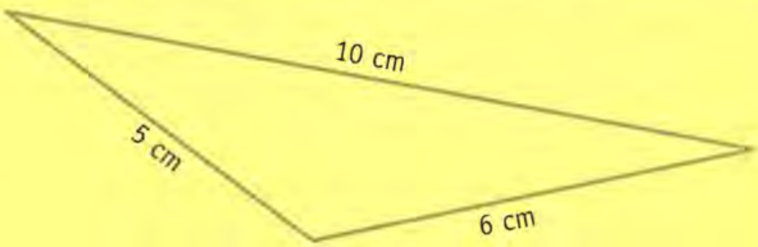
La dernière génération des moyens d'enseignement de mathématiques de Suisse romande, introduite dès 1997, n'a pas apporté de grandes modifications des contenus de nos programmes. Elle propose en revanche un modèle d'apprentissage « socio-constructiviste » qui accorde une place importante à la résolution de problèmes. Une telle évolution suscite chez bon nombre d'enseignants des remises en question. Une interrogation parmi d'autres revient fréquemment : quels outils et démarches d'évaluation mettre en œuvre pour être en cohérence avec les situations d'enseignement quotidiennes, mais aussi en adéquation avec les pratiques cantonales en vigueur et les objectifs des plans d'études, ceux-ci n'étant pas harmonisés pour l'instant à l'échelle romande ? L'évaluation a toujours représenté un seuil crucial dans l'évolution d'une innovation pédagogique. En tous les cas, les changements sont ralentis si les pratiques évaluatives habituelles n'évoluent pas.

Math-Ecole est sensible à ce problème délicat et, dès ce numéro, ouvre une rubrique « Évaluation » où les lecteurs sont invités à apporter leur contribution. Ils pourront par exemple rendre compte d'activités vécues en classe, livrer des réflexions, proposer des grilles d'évaluation, ou pourquoi pas des textes de référence. Pour ouvrir les feux, nous nous arrêtons sur le problème *Avec des baguettes*[1], sur lequel des élèves de degré 7 du Collège de Delémont, niveau[2] B, ont travaillé 60 minutes, en décembre 2003.

Avec des baguettes

Joseph a sur sa table cinq baguettes de 5, 6, 10, 11 et 15 cm de longueur. Il en choisit trois et les dispose en triangle.

Voici par exemple ce qu'il obtient avec les baguettes de 5, 6 et 10 cm de longueur :



Combien de triangles différents pourra-t-il former avec ses cinq baguettes ? Construis précisément chaque triangle.
Joseph voudrait également former un trapèze en utilisant quatre baguettes. Y arrivera-t-il ?
Note soigneusement ta démarche et tes observations.

1 *Avec des baguettes* est une adaptation du problème *Triangles* de la 2e épreuve du 7e Rallye mathématique transalpin, dont une analyse détaillée figure dans le deuxième volume des Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin, (Siena 1999 – Neuchâtel 2000) : Evolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques, L. Grugnetti, F. Jaquet, C. Crociani, L. Doretti, L. Salomone (Eds), Università di Siena, IRDP Neuchâtel, 2001. (Voir p. 3 de couverture).

2 Dans le canton du Jura, les élèves de l'école secondaire sont répartis selon trois niveaux : A (40%), B (35%) et C (25%). Ceux qui obtiennent de bons résultats en mathématiques sont en niveau A. Concernant l'évaluation, les enseignants secondaires traduisent les compétences et les connaissances de leurs élèves par des notes allant de 1 à 6.

La compétence clé mobilisée par la résolution de ce problème est d'utiliser des propriétés des figures planes pour les représenter en vraie grandeur. Plus particulièrement, au plan mathématique, l'élève doit (ou devrait):

- construire des triangles à la règle et au compas;
- s'interroger sur l'existence d'un triangle dont la somme des longueurs de deux côtés est égale à la longueur du troisième côté (cas du «triangle aplati[3]»);
- établir, explicitement ou non, tous les triplets de mesures pouvant mener à une solution;
- connaître la propriété caractéristique d'un trapèze (quadrilatère ayant au moins une paire de côtés parallèles);
- s'interroger sur l'existence d'un trapèze donné par les mesures de ses côtés;
- imaginer puis mettre en œuvre une procédure de construction d'un trapèze.

En outre, on touche ici également à des compétences transversales dont le développement est ou devrait être une des priorités de notre action éducative quotidienne: la réflexion et l'organisation d'une recherche – la consigne n'induit pas la procédure à suivre et la situation est somme toute inhabituelle – ainsi que la communication d'une démarche et de résultats – par le biais d'un compte rendu reflétant le plus fidèlement possible les étapes franchies.

Une telle évaluation ne porte pas sur des contenus pour lesquels «apprendre par cœur» suffit pour réussir et se distancie donc des problèmes d'application de règles et de formules, qui fournissent une image fragmentée et atomisée des apprentissages faits par les élèves en classe, mais qui ne sont pas à exclure pour autant. Elle fait appel à l'esprit d'analyse, de synthèse, au jugement critique et procure ainsi une image globale du développement des compétences des élèves

Solutions du problème

Avec ses baguettes, Joseph peut former sept triangles dont les mesures des côtés (en cm) sont: (5; 6; 10); (5; 10; 11); (5; 11; 15); (6; 10; 11); (6; 10; 15); (6; 11; 15) et (10; 11; 15). Chacun des deux triplets (5; 6; 11) et (5; 10; 15) conduit à un alignement de trois points, car $5 + 6 = 11$ et $5 + 10 = 15$; par convention, nous admettrons qu'ils ne permettent pas de construire un triangle. Quant aux baguettes de longueurs 5, 6 et 15 cm, elles ne peuvent être les côtés d'un triangle, car $5 + 6 < 15$.

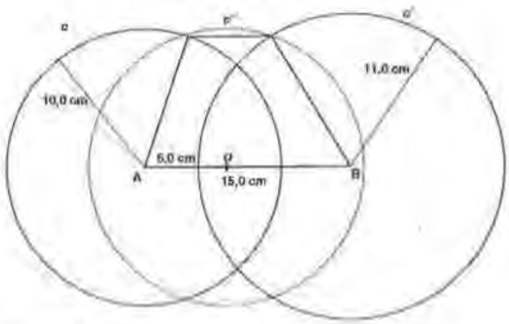
Onze trapèzes sont constructibles. Tous les cas à examiner figurent dans le tableau ci-dessous. Les cases grisées indiquent les mesures des côtés parallèles des trapèzes constructibles.

Longueurs des côtés (en cm)	Longueurs des côtés parallèles (en cm)					
5 – 6 – 10 – 11	5 – 6	5 – 10	5 – 11	6 – 10	6 – 11	10 – 11
5 – 6 – 10 – 15	5 – 6	5 – 10	5 – 15	6 – 10	6 – 15	10 – 15
5 – 6 – 11 – 15	5 – 6	5 – 11	5 – 15	6 – 11	6 – 15	11 – 15
5 – 10 – 11 – 15	5 – 10	5 – 11	5 – 15	10 – 11	10 – 15	11 – 15
6 – 10 – 11 – 15	6 – 10	6 – 11	6 – 15	10 – 11	10 – 15	11 – 15

3 Le cas du triangle aplati est longuement développé dans *Initiation au raisonnement déductif*, G. Arsac et al., Presses universitaires de Lyon, 1992

Examinons par exemple un programme de construction à l'aide des quatre plus longues baguettes (6, 10, 11 et 15 cm):

1. Tracer un segment AB de 15 cm.
2. Tracer le cercle c de 10 cm de rayon et de centre A ainsi que le cercle c' de 11 cm de rayon et de centre B.
3. Translater le cercle c parallèlement au segment AB, sur une longueur de 6 cm, pour obtenir le cercle c" de centre O.
4. Tracer le segment de 6 cm parallèle à AB dont les extrémités sont l'intersection des cercles c' et c" et un point du cercle c. Terminer ensuite la construction du trapèze.



À ce stade, il faut reconnaître que la construction d'un trapèze donné par les mesures de ses côtés est très complexe pour des élèves de 7e année. Dans la classe, personne n'y est parvenu. De rares élèves ont débuté selon la démarche ci-dessus, mais n'ont pas effectué de translation. En cas de nouvelle passation du problème, on pourrait ainsi se contenter d'écrire: «Joseph voudrait également former un quadrilatère en utilisant quatre baguettes. Y arrivera-t-il?» Cette tâche serait alors sans doute à la portée de bon nombre d'élèves.

Évaluation

Les critères d'évaluation étaient connus des élèves; ils ont en outre été explicités – au mieux – avant la recherche, en veillant toutefois à ne pas dévoiler la procédure à mettre en œuvre:

a) Présentation générale (soin, orthographe, mise en page...): 1 point
b) Clarté et rigueur de la démarche et des explications: 2 points
c) Qualité et précision des constructions géométriques: 2 points
d) Résultats obtenus (triangles: 5 points, trapèze: 2 points): 7 points
e) Appréciation personnelle du maître: 1 point

Pour la correction, ces critères ont été affinés. Concernant la clarté et la rigueur de la démarche et des explications, j'ai tenu compte de la présence ou non d'une liste de triplets de mesures, de l'examen des triangles aplatis et du cas (5; 6; 15), de l'indication des dimensions des triangles sur les dessins, de la description de la méthode de construction de chaque triangle... Concernant les résultats obtenus, j'ai attribué 1/2 point par cas analysé ou réalisé correctement (10 triangles → 5 points). Pour le trapèze, les tentatives de construction à la règle uniquement, avec le compas et la règle, les explications données... ont été la source de l'attribution de points. Pour l'appréciation globale, l'organisation de la recherche des triplets et les efforts d'explication ont été pris en considération. Mais tout cela est bien personnel et il y a fort à parier que des ajustement sont souhaitables.

De telles modalités d'évaluation clarifient dans une certaine mesure le contrat didactique, dans le sens où elles informent les élèves des attentes du maître. Mais tout n'est pas clair pour autant. Mettons-nous à la place des élèves. Quelles étapes et observations noter? Toutes, ou les plus significatives seulement? Et qu'est-ce qu'une étape significative? Quel est le degré précision exigé pour une construction géométrique et quelles traces faut-il laisser? ... On le voit, des négociations ou tout au moins des interactions entre le maître et les élèves sont nécessaires. D'autre part, certains des critères d'évaluation pris en compte ici ne sont pas entièrement dissociables. Il peut arriver qu'un élève soit doublement pénalisé ou contraire doublement récompensé. Par exemple, un élève...

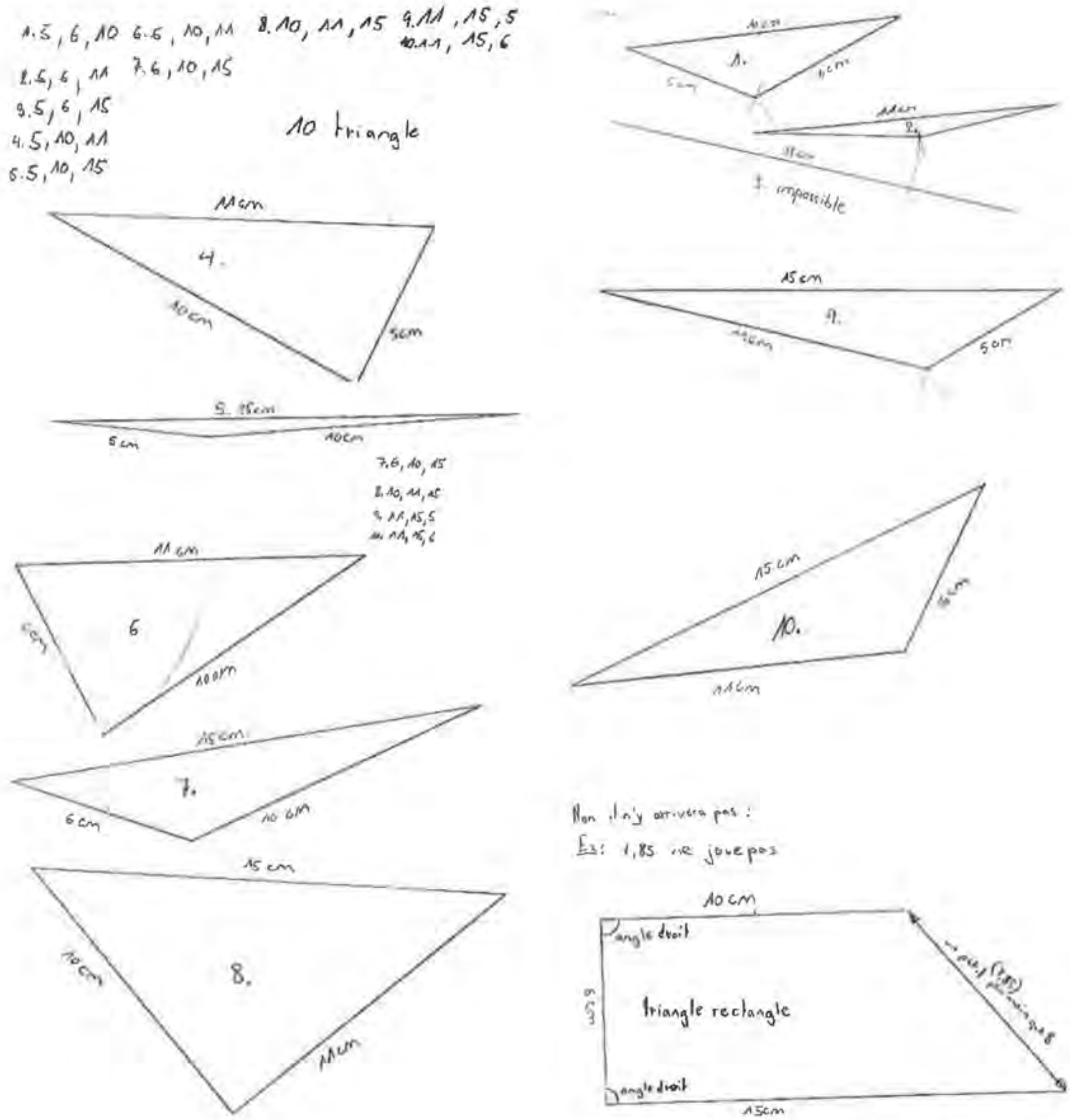
... qui n'écrit pas la liste des triplets pourrait être pénalisé à la partie b), mais aussi à la partie d), car il risque de ne pas trouver tous les triangles ;

... qui recherche de manière organisée les triplets se verra attribuer des points aux parties b) et e) ; en outre, il est probable qu'il examinera tous les cas possibles, d'où des points supplémentaires à la partie d) ;

... qui explique les raisons pour lesquelles les triangles (5 ; 6 ; 11) et (5 ; 10 ; 15) ne sont pas constructibles recevra des points aux parties b) et d).

A titre d'exemples, voici trois travaux d'élèves accompagnés de leur évaluation. Ils permettront certainement de mieux percevoir les enjeux développés jusqu'à présent (pour des questions de mise en page, ils sont reproduits selon une échelle variable).

Travail 1

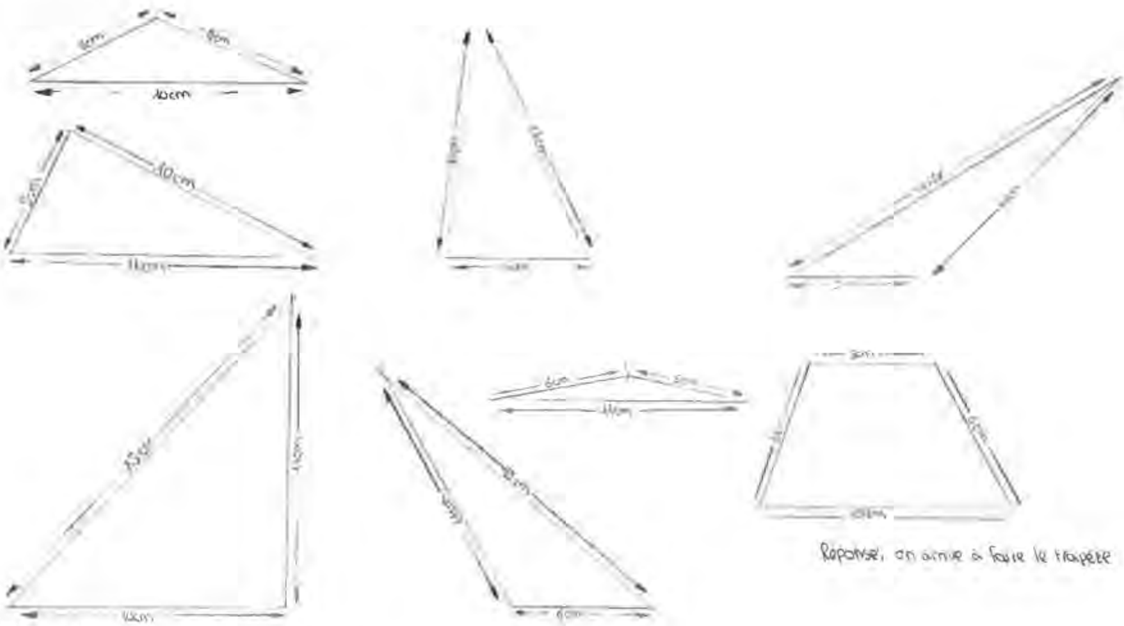


Evaluation

a) 1 point. Allure générale et mise en page tout à fait satisfaisantes.
b) 2 points. Le cheminement est clair; il peut aisément être reconstitué.
c) 2 points. Les constructions géométriques sont effectuées avec soin et précision.
d) 4 points pour les triangles. L'élève perd 1 point, car il montre par des constructions l'existence des triangles (5; 6;11) et (5; 10; 15), ce qui est erroné.
1 point pour le trapèze. Perte de 1 point donc, à cause de la seule prise en compte d'un trapèze rectangle dont trois côtés mesurent 15, 6 et 10 cm.
e) 1/2 point, pour la recherche organisée des triplets.

Total: 10,5 points

Travail 2

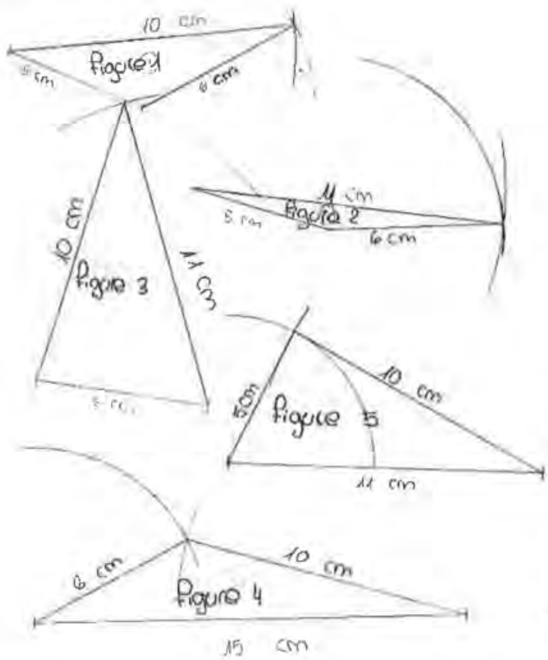


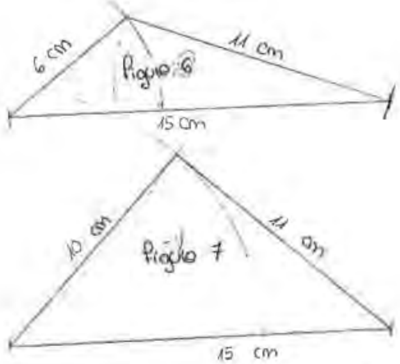
Evaluation

a) 1 point. La présentation est tout à fait satisfaisante.
b) 1/2 point. Seules les mesures des côtés des triangles sont indiquées. La recherche des triangles constructibles a probablement été menée aléatoirement.
c) 2 points. Les constructions géométriques sont effectuées avec soin et précision.
d) 3 points pour les triangles. L'élève perd 2 points: il montre par une construction l'existence du triangle (5; 6;11) et n'aborde nulle part les cas (5; 6; 15), (5; 10; 15) et (6; 10; 15).
Aucun point pour le trapèze: la construction ne respecte pas les conditions de l'énoncé; le trapèze n'est pas isocèle comme on pourrait le penser à la lecture des mesures des côtés; aucune trace de constructions ne figure sur la feuille.
e) Aucun point.

Total: 6,5 points

Travail 3





Ma démarche: . Réponse: On peut faire 7 triangles.
- Au début, j'ai reproduit la figure donnée. Après j'ai pris les nombres 5, 10 et 11 et j'ai essayé de faire un triangle. Après j'ai continué 5, 10 et 15 / 6 ; 10 et 11 / 6, 10 et 15 / 10 ; 11 et 15. J'ai regardé si ça marchait ou pas.

Mes observations.
- Si l'on additionne deux côtés du triangle et que la somme fait le même nombre que le troisième côté ça ne peut pas marcher.
- On ne peut pas mettre deux côtés de la même longueur!

page 2

b) Réponse: On ne peux pas faire un trapèze avec les cinq baguettes. Parce qu'il n'y a pas deux baguettes de la même longueur

Evaluation

a) *1 point. Présentation adéquate et texte lisible.*

b) *2 points. Des explications concernant la démarche suivie figurent. Le cas des triangles aplatis est abordé. Malgré une réflexion correcte (impossibilité de réaliser un triangle dont la somme des mesures des petits côtés est égale à la mesure du grand côté), l'élève construit tout de même le triangle dont les côtés sont 5, 6 et 11 cm !*

c) *2 points. Les constructions géométriques sont précises et soignées.*

d) *3,5 points pour les triangles. L'élève perd 1,5 point car il construit le triangle (5; 6;11) et n'aborde pas les cas (5; 6; 15), et (5; 11; 15).*
Aucun point pour le trapèze, car la recherche a été menée en référence au trapèze isocèle uniquement.

e) *1/2 point, pour l'effort d'explicitation.*

Total : 9 points

Synthèse des résultats

Selon ces modalités de correction, les 19 élèves de la classe ont obtenu les résultats suivants :

Nombre de points	12	11,5	11	10,5	10	9,5	9	8,5	8	7,5	7	6,5	6
Nombre d'élèves	0	0	2	1	1	6	2	1	1	1	1	3	0

Une des questions cruciales qui se pose est de savoir comment caractériser la réussite à ce problème – ou à toute autre épreuve – à l'aide d'une échelle ordinaire. Dit autrement, comment déterminer le nombre de points qu'un élève doit obtenir pour avoir une note suffisante, ou pour avoir la note 5 par exemple ? La fixation de tels seuils peut reposer sur des bases scientifiques lors de la passation d'une épreuve étalonnée, c'est-à-dire une épreuve qui a été soumise à un échantillonnage significatif d'élèves et suivie d'une analyse élaborée des réponses données. Mais dans le cas qui nous intéresse, autant dire que les seuils ont été établis en référence aux résultats de l'ensemble des élèves de la classe, à savoir selon une norme et non selon des critères. Ainsi, arbitrairement j'en conviens et peut-être un peu généreusement, les élèves ont obtenu la note 4 avec 7 points, la note 5 avec 9 points et la note 6 avec 11 points.

Arrivé au terme de ce premier épisode, il convient encore de souligner qu'une évaluation centrée sur la résolution d'un problème s'inscrit immanquablement dans un registre plus aléatoire qu'une pratique traditionnelle. En effet, elle n'est pas organisée dans l'optique d'une corrélation étroite avec la matière abordée en classe et laisse en conséquence aux élèves un espace de liberté pour l'exploration personnelle et le tâtonnement. C'est là un de ses intérêts indéniables.

suite de la page 13

6. (210, p. 25) *La somme des aires de tous les triangles dont les sommets sont aussi les sommets d'un cube 1 sur 1 sur 1 est* $m + \sqrt{n} + \sqrt{p}$ *où m , n et p sont des entiers. Trouver* $m + n + p$.

Il y a 24 triangles isocèles rectangles (demi faces) distincts dont les mesures des côtés sont 1 ; 1 et $\sqrt{2}$, dans le cube. Leur aire totale est 12.
Il y a aussi 24 triangles rectangles dont les mesures des côtés sont 1 ; $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ (un côté est formé d'une arête, un autre d'une diagonale d'une face et le troisième d'une diagonale du cube). Leur aire totale est $24(\sqrt{2}/2) = 12\sqrt{2}$ ou $\sqrt{288}$.
Il y a enfin 8 triangles équilatéraux distincts, dont les côtés mesurent $\sqrt{2}$, formés par trois diagonales de faces. Leur aire totale est $8(2\sqrt{3}/4) = 4\sqrt{3} = \sqrt{48}$.
La somme des aires est $12 + \sqrt{288} + \sqrt{48}$ et la réponse demandée est $12 + 288 + 48 = 348$.

Commentaires : Comme dans le problème 2, la demande est formulée de manière à obtenir une réponse qui soit un nombre naturel. L'inventaire des triangles est un bonne activité sur le cube et le calcul des aires demande aussi de travailler en nombres réels et non avec des approximations décimales (douteuses) si chères à nos élèves. Niveau 9, et au-delà.

8. (210, p.25) *Dans une suite croissante de quatre entiers positifs, les trois premiers termes forment une progression arithmétique, les trois derniers termes forment une progression géométrique, et la différence entre le premier terme et le quatrième terme est 30. Déterminer la somme des quatre termes.*

Si l'on désigne par a, a + r et a + 2r (progression arithmétique de premier terme a et de raison r), les trois premiers nombres, la raison de la progression géométrique est $(a + 2r)/(a + r)$ et le quatrième terme est :
$(a + 2r)(a + 2r)/(a + r) = (a + 2r)^2/(a + r)$.
La relation entre le premier et le dernier termes est :
$a + 30 = (a + 2r)^2/(a + r)$

suite en page 36