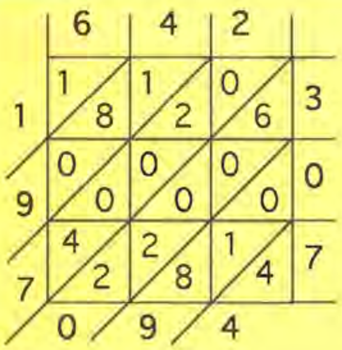
LES RÉGLETTES DE NEPER

Antoine Gaggero

Un peu d'histoire

John Napier (1550 – 1617) est né à Merchiston Castle, près d'Edimbourg en 1550 et fréquentera l'Université de Saint – Andrews en Écosse. Son nom sera francisé en Neper.
À la fin du 16ème siècle, les sciences, comme l'astronomie, la navigation maritime et les techniques bancaires sont en plein essor. Neper est sensibilisé par le fait que le progrès scientifique est en quelque sorte freiné par des calculs numériques longs et pénibles auxquels les savants doivent se plier pour parvenir à des résultats. Ainsi, Neper concentra toutes ses forces au développement de méthodes susceptibles d'abréger les calculs. En 1614, après 20 ans de recherche, il publie son système de logarithmes dans l'ouvrage *Mirifici logarithmorum canonis descriptio.* Cet ouvrage fut suivi par *Mirifici logarithmorum canonis constructio* qui reprend le premier traité et décrit les procédés de construction des tables de logarithmes. Des logarithmes de base e que l'on appellera en français logarithmes népériens, («Ln(x)» sur les calculatrices), pour les distinguer des logarithmes en base dix, («Log(x)» sur les calculatrices).

On attribue donc à Neper l'invention des logarithmes, mais il faut relever toutefois la contribution de notre compatriote Joost Bürgi dans ce domaine[1]. qui calcula une table de logarithmes entre 1603 et 1611, à Prague, mais qu'il ne publia que bien plus tard dans ses *Progress Tabulen* en 1620.
Au niveau des calculs, le passage par les logarithmes permet de remplacer les multiplications par des additions (et les divisions par des soustractions) puisque le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes de chaque facteur, propriété traduite, en langage mathématique par la relation :
$\ln(axb) = \ln a + \ln b$. Lorsque les nombres sont représentés par des segments, sur une échelle logarithmique, la relation précédente conduit à une addition de longueurs. C'est ce principe qui est à l'origine de la règle à calculer. Cet outil de calcul, avec une réglette centrale coulissante fut imaginé, en 1657, par Seth Patridge. Nous l'avons bien connu et utilisé, il n'y a pas si longtemps, et l'avons abandonné, vers les années 1970, dès que l'usage de la calculatrice s'est généralisé.
À l'époque de Neper, on disposait en Europe, de l'algorithme de «multiplication musulmane» ou "per gelosia". La multiplication per gelosia venait d'Orient et plus précisément du mathématicien arabe Al Kasi au 15ème siècle.
Voici au travers d'un exemple : 642 x 307, comment on s'organise pour employer cet algorithme de calcul :



- On prépare une grille de 3 x 3 cases (car chacun des facteurs est un nombre de 3 chiffres).
- On inscrit les deux facteurs sur les bords de la grille, l'un en haut, de gauche à droite, l'autre à droite, de haut en bas.
- Dans les cases, on écrit les produits partiels en faisant appel à son répertoire mémorisé de multiples. On additionne les nombres des demi-cases, partagées par leurs diagonales en commençant par la droite. S'il y a une retenue, on note le chiffre des unités et l'on transfère celui des dizaines dans la diagonale de gauche.
- Le produit est le nombre formé par les chiffres en gras, d'où 642 x 307 = 197094

1 Voir *Math-Ecole* 194 (octobre 2000, pp. 24 - 31), l'article de Lucia Grugnetti : *Histoire des mathématiques en Suisse.*

Au vu de ses avantages et de sa simplicité, cet algorithme revient à la mode actuellement comme alternative à la «multiplication en colonnes». Il figure, en particulier, dans les moyens d'enseignement romands «Mathématiques 4P»[2].

Les réglettes de Neper

En 1617, Neper publie la *Rabdologia*, ouvrage dans lequel il présente, entre autres, une méthode de calcul avec des réglettes pour réduire l'effort du calculateur dans les multiplications. Cette méthode sera en usage jusqu'à la fin du dix-neuvième siècle.
Neper construit un dispositif qui permet de simplifier encore plus l'algorithme de multiplication. En effet, si, par rapport à l'algorithme «en colonnes», la technique «per gelosia» affranchit son utilisateur des problèmes de retenues dans les produits partiels, elle demande à son utilisateur de connaître ses «livrets», c'est-à-dire d'avoir mémorisé les produits de la table de multiplication jusqu'à 9 x 9. Neper a l'idée de disposer sur des réglettes les neuf premiers multiples des nombres de 1 à 9. De cette manière, l'utilisateur doit juste savoir effectuer des additions de nombres d'un seul chiffre, tirés des multiples inscrits sur les baguettes, sans faire appel à des résultats mémorisés. Cette technique de calcul sera beaucoup utilisée jusqu'au début du 19ème siècle.
Pratiquement, les réglettes de Neper se présentent sous la forme de bâtonnet ou prismes à bases carrées. Sur chacune de leurs faces latérales, on peut disposer, en haut, un nombre de 1 à 9 et, au-dessous et dans l'ordre, ses neuf premiers multiples, écrits avec le chiffre des dizaines dans la partie supérieure gauche et le chiffre des unités en bas à droite. Pour la face «0» on peut écrire des chiffres «0» ou laisser les cases vides. Une réglette supplémentaire indique le rang des multiples.

2 C. Danalet., J.-P. Dumas., C. Studer., F. Villars. *Mathématiques 4P.* (Thème 4. Livre du maître, p. 163 et 164) Corome, 1999.

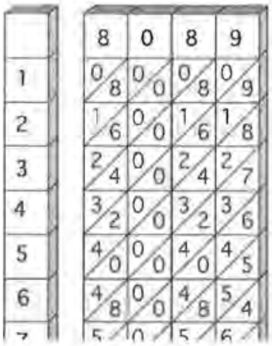
Voici les réglettes de Neper dans une représentation où seule une face est remplie. (En utilisant toutes les faces des bâtonnets - avec des faces différentes pour une même réglette - on peut disposer de quatre faces «0», quatre faces «1», etc., ce qui sera utile pour

les multiplications où l'un des facteurs comprend plusieurs fois le même chiffre.)

Exemples d'utilisation

1) Calculer 295 x 7
On place côte à côte les réglettes «2», «9» et «5»
On repère la ligne «7» par la réglette des rangs des multiples.
On additionne en diagonales les chiffres repérés, en commençant par la droite :
5 devient le chiffre des unités,
3 + 3 = 6 donne le chiffre des dizaines,
6 + 4 = 10 donne «0» comme chiffre des centaines, avec une retenue de 1 pour la diagonale suivante,
1 + 1 = 2, donne le chiffre des milliers.
Résultat : 295 x 7 = 2065

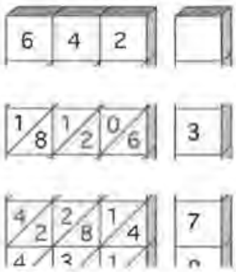
2) Calculer 6 x 8089



Le chiffre des unités est 4
5 + 8 = 13, je note 3 pour les dizaines et je retiens 1
1 + 4 + 0 = 5, chiffre des centaines
0 + 8 = 8, chiffre des milliers
4 est le chiffre des dizaines de milliers.

Résultat: 6 x 8089 = 48534

3) Calculer 37 x 642 =
La ligne «3» donne: 3 x 642 = 1926



La ligne «7» donne: 7 x 642 = 4494

Il faut rassembler ces deux résultats partiels en tenant compte que l'on a 3 dizaines et 7 unités: 19260 + 4494 = 23754
Une autre solution est de recopier les deux lignes en position adjacentes et constituer un tableau corrrespondant à l'algorithme «per gelosia». (Voir plus loin)

Utilisation des réglettes de Neper en classe

(Voici un extrait du compte rendu de deux de mes étudiants, Virginie Zwahlen et Nicolas Varin, sur une pratique des réglettes de Neper lors de leur stage dans une classe de 4e:
Le programme de mathématiques de 4P comporte un chapitre intitulé «Des problèmes pour connaître la multiplication». Une partie de ce thème prévoit d'aborder la technique dite «per gelosia», qui consiste à disposer les facteurs du produit, horizontalement et verticalement puis d'additionner, en diagonale, les cases avec les multiples correspondants.
Afin d'aborder cette nouvelle notion, nous avons décidé d'employer du matériel manipulable: les bâtons de Neper, une sorte d'ancienne calculatrice formée traditionnellement par des bâtons en bois.
Les bâtonnets de bois (20 x 2 x 2 cm) ont été découpés par les adultes, qui ont aussi tracé les diagonales et les différents traits présents sur le matériel. Les enfants se sont contentés d'inscrire les différents multiples, tout d'abord au crayon de papier, et, après vérification, ils ont pu écrire au propre par-dessus. Ensuite, nous avons expliqué aux enfants le principe des bâtons de Neper, qu'ils ont tout de suite compris. Par groupes de 4, ils pouvaient essayer librement toutes les multiplications qui leur venaient à l'esprit.
Pour terminer, les élèves ont pu appliquer la stratégie sur des fiches entraînant la technique «per gelosia», qui est similaire à celle employée avec le matériel conçu. Cela a permis aux enfants d'acquérir rapidement cette technique et de découvrir une alternative intéressante à la multiplication traditionnelle en colonne.

Voici le genre d'exercices proposés aux élèves. Ceux qui ont choisi les réglettes de Neper ont assemblé les bons bâtons, puis copié la ligne 8 et enfin appliqué l'algorithme expliqué ci-dessus. Les autres ont compris le système et utilisé leurs connaissances du calcul réfléchi et des livrets:

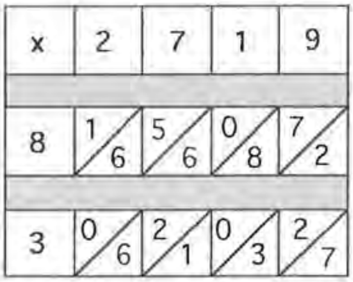
x	5	7	0	9
8	/	/	/	/

Donc
8x5709=______

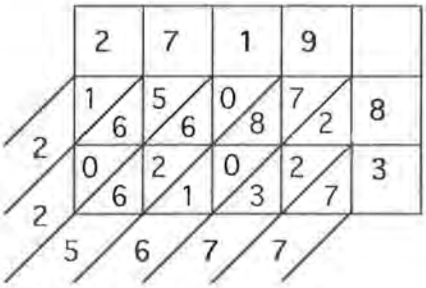
Réglettes de Neper et algorithme « per gelosia »

Effectuer le produit 83 x 2719 avec les réglettes de Neper et «per gelosia» :

avec les réglettes de Neper



« per gelosia »



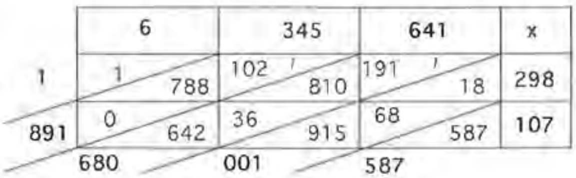
Voici la situation selon que l'élève prend l'option de calculer avec les réglettes de Neper ou avec la méthode « per gelosia ».

- S'il choisit « per gelosia », il appliquera la méthode comme le montre le tableau ci-dessus.
- S'il choisit les réglettes de Neper, il va sélectionner les bâtons 2, 7, 1, 9, puis recopier les lignes significatives 8 et 3. Que va-t-il faire ensuite ?
  - Il peut accoler ces deux lignes dans un tableau et se ramener à une situation qu'il connaît, à savoir la méthode « per gelosia ». Cette option est illustrée ci-dessus.
  - Par contre s'il prend l'option de traiter chaque ligne de manière indépendante, alors il obtiendra les deux résultats partiels suivants :
    8 x 2719 = 21752 et 3 x 2719 = 8157

  En prenant ce chemin, l'élève va devoir montrer qu'il a compris notre système de numération car il devra compléter son opération de la manière suivante :
  83 x 2719 = (80 x 2719) + (3 x 2719) = 217520 + 8157 = 225677

Calculatrice et algorithme « per gelosia »

Une extension astucieuse de la méthode « per gelosia » permet de calculer des produits de grands nombres donnant tous les chiffres du résultat alors que la calculatrice nous donne un résultat en notation scientifique dès que ce nombre compte plus de 12 chiffres.
Au lieu de prendre les deux facteurs chiffre par chiffre, on les découpe en tranches de trois chiffres. Les calculs intermédiaires sont plus simples : des multiplications de nombres de trois chiffres et des additions, faisables à la calculatrice, « per gelosia » ou « à la main ».
En voici un exemple :
Calculer 6345641 x 298107 =



On obtient ainsi :
6 345 641 x 298 107 = 1 891 680 001 587

Quelques remarques didactiques

Les réglettes de Neper ne sont pas un objet d'enseignement, mais un simple instrument de calcul qui a été largement utilisé à une certaine époque. Cet article n'a pas d'autre

but que de montrer son intérêt historique, son fonctionnement et ses liens avec l'algorithme «per gelosia», comme enrichissement de la collection d'outils qui permettent d'effectuer des multiplications.
À ce propos, il faut rappeler que, en résolution de problème, c'est le choix de l'opération qui a la priorité absolue. Ce n'est que lorsque l'élève a identifié l'opération lui permettant d'arriver à la solution, lorsqu'il a déterminé quels sont les nombres à prendre en compte, qu'il peut passer à la phase de calcul et choisir l'instrument ou l'algorithme le plus adéquat: la calculatrice, l'algorithme «classique» de la multiplication «en colonne», la méthode «per gelosia», ou d'autres algorithmes personnels.
Les réglettes de Neper ne vont pas entrer en concurrence avec les autres méthodes mais, au cas où on les introduirait, comme curiosité technique, on peut y voir des liens avec les précédents.

- Il s'agit d'une «machine» au même titre que la calculatrice, pratique pour les multiplications dont un des facteurs a un seul chiffre : plutôt que de presser, sur le clavier, les touches correspondant au facteur de plusieurs chiffres, on dispose les réglettes, dans le même ordre; plutôt que de presser la touche «x» et celle du deuxième facteur, on observe la ligne correspondante sur les réglettes. La différence est dans la lecture du résultat: immédiat sur la calculatrice après la touche «=», un peu plus délicat sur les baguettes car il demande des additions intermédiaires, de deux termes, avec d'éventuelles retenues. Dans un cas comme dans l'autre, on n'utilise pas son répertoire multiplicatif. C'est la « machine » qui le fournit. La nouveauté de la manipulation de ces réglettes et l'imaginaire de l'enfant font qu'il s'imagine posséder un outil de calcul vraiment performant.

- Le lien entre les réglettes de Neper et l'algorithme «per gelosia» a été mis en évidence dans un des paragraphes précédents: lorsque les deux facteurs ont plus d'un chiffre, il suffit de reporter les lignes des réglettes - qui correspondent aux chiffres du deuxième facteur - dans un tableau, à condition de respecter l'ordre des chiffres. Ce n'est pas un gain de temps pour qui a mémorisé ses «livrets», mais ça peut être un moyen de contrôle.
  Pour la lecture, il faudra effectuer une série d'additions de plus de deux termes, qui peut nécessiter des retenues.

- Les réglettes de Neper permettent de trouver les différentes lignes de l'algorithme traditionnel «en colonnes» qui sont des produits d'un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre. Ces résultats partiels demandent d'effectuer mentalement les retenues d'un produit sur l'autre dans l'algorithme traditionnel, avec les réglettes, tous les chiffres de tous les produits partiels apparaissent.
  (Dans le premier exemple d'utilisation des réglettes donné précédemment:
  $295 \times 7 = 2065$, il n'y a des retenues que dans une des additions, $6 + 4$; par l'algorithme traditionnel, il y en a entre les trois produits:

  $5 \times 7 = 35$, je retiens 3 et je note 5,
  $9 \times 7 = 63$, j'ajoute la retenue 3,
  j'obtiens 66, je note 6 et je retiens 6,
  $2 \times 7 = 14$, j'ajoute la retenue 6, j'obtiens 20 et je note les deux chiffres car c'est le dernier produit.)

  La question du décalage des lignes ou de l'ajout de «0» reste une difficulté, dans un cas comme dans l'autre.

D'une manière générale, la réflexion sur le fonctionnement des réglettes est une bonne occasion de revoir les propriétés de notre système de numération, de se rendre compte qu'un répertoire multiplicatif mémorisé est encore plus économe en écriture et en temps et, finalement, de faire appel au calcul réfléchi pour justifier les résultats.