12e RALLYE MATHÉMATIQUE TRANSALPIN

Les problèmes de la deuxième épreuve

La deuxième épreuve du 12e RMT s'est déroulée en mars et avril 2004, dans près de 250 classes de Suisse romande et 1800 autres en Italie, France, Luxembourg, Israël et Tessin. Les problèmes ont été préparés par les sections de Bourg-en-Bresse et de la Vallée d'Aoste, sur la base de sujets proposés par chacune des sections, puis ils ont repassé en consultation générale pour aboutir aux énoncés suivants dont certains sont fort éloignés des textes d'origine. Certaines analyses de ces problèmes figurent dans ce numéro, en pages 46 à 50. D'autres suivront dans les prochains numéros. Au cas où des lecteurs de *Math-Ecole* souhaiteraient proposer ces sujets à leurs classes, ils peuvent obtenir les analyses a priori auprès de la rédaction.

1. À LA FONTAINE (Cat. 3)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l'eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.

Leurs deux seaux contiennent ensemble 24 litres. Avec le seau de Laure on peut remplir exactement 3 fois le seau de Pauline.

Combien de litres contient le seau de Pauline?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

2. D'UN ÉTAGE À L'AUTRE (Cat. 3)

Six amies habitent dans le même immeuble de la rue Pythagore, chacune à un étage. Caroline habite au rez-de-chaussée ; Angeline habite au premier étage; Marie habite au deuxième étage, puis il y a Céline, Doris et enfin Joséphine qui habite au cinquième étage. Il y a toujours le même nombre de marches entre deux étages.

Caroline se rend d'abord chez Marie en montant 28 marches.

Puis, accompagnée de Marie, elle reprend l'escalier pour aller chez Joséphine.

Combien de marches Caroline et Marie doivent-elles monter pour aller de l'étage de Marie à celui de Joséphine?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

3. L'ÂGE DES GRANDS-PARENTS (Cat. 3, 4)

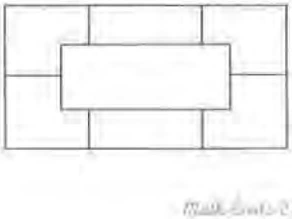
- Dis-moi, Camille, quel âge ont tes grands-parents?
- Je peux te dire que si j'additionne leurs âges, je trouve 132.
- Donne-moi un renseignement de plus.
- Mon grand-père a 6 ans de plus que ma grand-mère.
- Et ils vivent ensemble depuis longtemps?
- Ils se sont mariés, il y a exactement 42 ans.

Quel âge avaient les grands-parents de Camille le jour de leur mariage?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

4. COLORIAGE (Cat. 3, 4, 5)

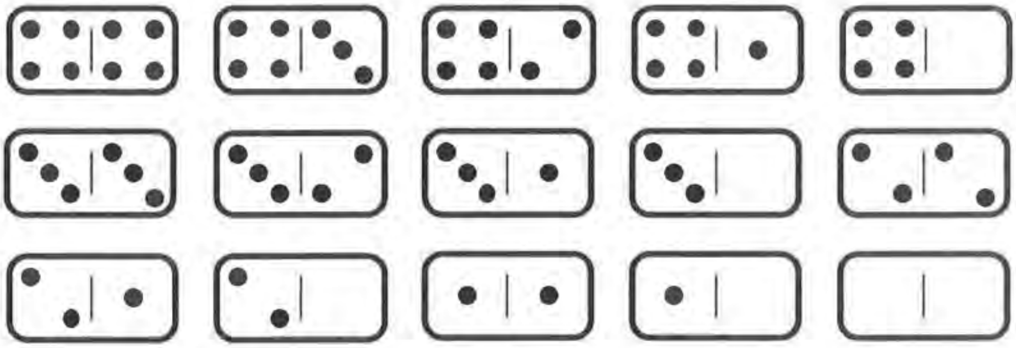
Léa veut colorier un pavage comme celui-ci, en respectant les conditions suivantes:
- chaque partie doit être d'une seule couleur;
- le bleu touche toutes les couleurs;
- le rouge et le jaune sont dans les coins gauches;
- le rouge, le violet et le noir ne touchent pas le vert;
- l'orange touche le noir.

Dessinez tous les coloriages différents que peut trouver Léa, en respectant toutes ces conditions.
Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.



5. LES DOMINOS DE DOMINIQUE (Cat. 3, 4, 5)

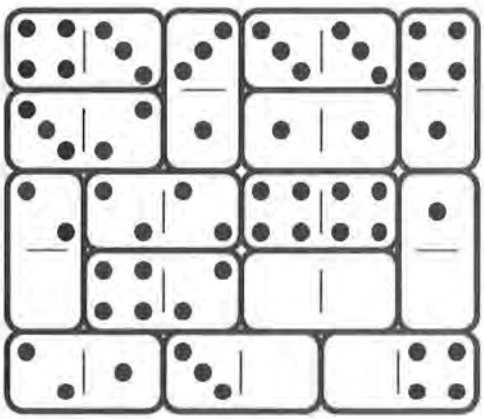
Voici les 15 pièces du jeu de domino de Dominique :



Dominique doit les placer sur ce tableau, selon le nombre de points indiqué dans chaque case.

4	3	3	3	3	4
3	2	1	1	1	1
2	2	2	4	4	1
0	4	2	0	0	0
2	1	3	0	0	4

Voici son travail !



Voici maintenant un autre tableau :

Dominique a déjà marqué la place de l'une des pièces sur ce tableau.

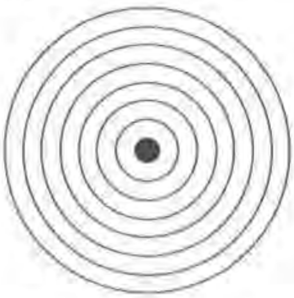
Comment Dominique va-t-elle placer ses 14 autres pièces sur ce nouveau tableau ?

Pour répondre, vous pouvez soit dessiner le contour de chaque pièce, soit découper les 15 pièces et les coller à la bonne place.

1	3	1	4	0	2
3	2	2	4	0	3
0	3	2	4	0	4
2	3	1	4	1	1
0	0	1	3	4	2

6. DES FLEURS DEVANT L'ÉCOLE (Cat. 4, 5, 6)

Monsieur Belplante décide d'aménager un massif de fleurs devant l'école. Il partage le massif en 7 anneaux, comme sur ce dessin.



Puis, il procède en suivant toujours une même règle pour les tulipes et une autre pour les roses, de la façon suivante :

- dans le premier anneau, en partant du centre, il plante 2 tulipes et 3 roses ;
- dans le deuxième anneau, il plante 5 tulipes et 7 roses ;
- dans le troisième anneau, il plante 8 tulipes et 15 roses ;
- dans le quatrième anneau, il plante 11 tulipes et 27 roses ;
- et ainsi de suite jusqu'au septième anneau.

Selon vous, combien de fleurs plantera-t-il en tout dans le septième anneau ?
Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

7. LE TEMPLE GREC (Cat. 4, 5, 6)

Mario veut réaliser une maquette de temple grec avec des blocs d'un jeu de construction. Il a lu que les temples grecs étaient de forme rectangulaire et qu'ils étaient entourés de colonnes. Le temple que veut construire Mario doit avoir ces caractéristiques :

- le nombre de colonnes disposées sur une longueur du rectangle vaut un de plus que le double du nombre de colonnes disposées sur une largeur ;
- il y a une colonne à chaque coin du temple ;
- il y a toujours plus de deux colonnes sur une largeur.

Sur ce schéma, est représenté le plus petit temple qu'il est possible de construire.
Mario dispose de 35 pièces en forme de colonnes. Il essaie de construire tous les temples possibles. Lorsqu'il en a construit un, il le dessine, puis le détruit pour essayer d'en réaliser un autre.

Combien de temples Mario peut-il réaliser ?
Combien chaque temple aura-t-il de colonnes sur sa longueur et sur sa largeur ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.

8. À LA FONTAINE (Cat. 4, 5, 6)

Deux amies, Laure et Pauline, vont chercher de l'eau avec un seau à la fontaine Eauclaire.
Leurs deux seaux contiennent ensemble 26 litres. Avec l'eau contenue dans le seau de Laure on peut remplir 3 fois le seau de Pauline et il reste encore 2 litres d'eau dans le seau de Laure.

Combien de litres contient le seau de Pauline ?
Et celui de Laure ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre solution.

9. DRÔLE DE PIZZA (Cat. 5, 6)

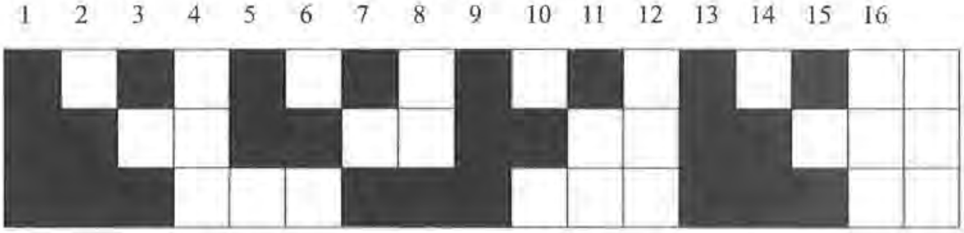
Pour battre un record, les habitants d'un village décident de faire une très grande pizza de forme rectangulaire. Elle doit mesurer 4 m de long et être composée de quatre parties : une aux champignons, une au jambon, une aux olives et une au fromage. Pour tenir compte des goûts de chacun, les habitants décident que :

- la longueur de la partie au jambon doit être le double de celle aux champignons et la moitié de celle aux olives ;
- la longueur de la partie au fromage doit être le quart de celle de la partie la plus longue.

Quelle sera la longueur de chaque part ?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

10. COLORIAGE BIZARRE (Cat. 5, 6, 7)

Maxime colorie un quadrillage en respectant, pour chaque ligne, une règle de coloriage différente:



Il a déjà colorié correctement les 15 premières colonnes. Il constate que les colonnes 1, 9 et 13 sont complètement coloriées. Il continue le coloriage en allant bien après la colonne 16.

La colonne 83 sera-t-elle entièrement coloriée? Et la colonne 265?
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

11. LA FEUILLE DE TIMBRES (Cat. 6, 7, 8)

Jean est collectionneur de timbres. Il a devant lui une feuille rectangulaire de 24 timbres dont il a déjà détaché les bords blancs. Il a décidé de la partager avec les 23 camarades de sa classe.
Pour séparer les timbres sans les abîmer, un collectionneur commence toujours par plier fermement la feuille en suivant les lignes de dents avant de la séparer en deux parties. Puis ainsi de suite, il continue, toujours avec une seule partie à la fois, en la pliant et la séparant pour obtenir deux nouvelles parties.

Combien de plis, au minimum, Jean devra-t-il faire pour obtenir 24 timbres isolés?
Expliquez votre raisonnement

12. VOYAGES (Cat. 6, 7, 8)

Paul, Jacques et Marie habitent dans trois villes de Transalpie, situées à égales distances de la capitale, Equalia. Ils se donnent rendez-vous à la gare d'Equalia, un jour à 11 h 00.
Chacun d'eux part le jour du rendez-vous à une heure sonnante (lorsque l'aiguille des minutes est sur le « 12 ») et arrive exactement à l'heure prévue, en utilisant un moyen de transport différent.

- Paul voyage à bicyclette, à la vitesse moyenne de 20 km/h.
- Jacques se déplace en train, à la vitesse moyenne de 60 km/h.
- Marie voyage en autobus, à la vitesse moyenne de 40 km/h.

À quelle heure chacun d'eux est-il parti et quelle distance a-t-il parcourue pour se rendre à Equalia?
Justifiez vos réponses.

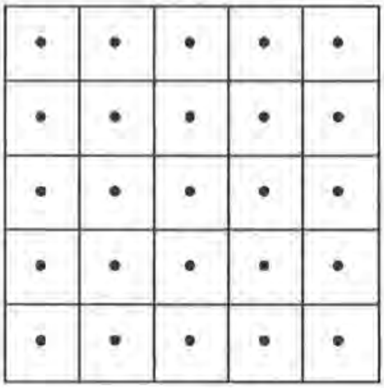
13. CHIFFRES ÉGAUX (Cat. 7, 8)

Richard découvre que lorsqu'il multiplie 12345679 par 0,45 il obtient un nombre qui ne s'écrit qu'avec neuf chiffres 5, et une virgule.
Intrigué, il se demande s'il peut trouver des nombres qui, lorsqu'il les multiplie par 12345679, ne s'écrivent qu'avec neuf chiffres 7 et une virgule éventuellement.

Richard pourra-t-il y arriver? De combien de manières?
Écrivez les nombres que vous avez trouvés et expliquez votre raisonnement.

14. COMBIEN DE DISTANCES? (Cat. 7, 8)

Un pépiniériste a planté des arbres très régulièrement sur un terrain de forme carrée, comme le montre ce dessin. Son fils, qui a l'esprit mathématique, remarque que la distance entre deux arbres n'est pas toujours la même. Il lui pose alors cette question: *«Combien existe-t-il de distances différentes entre deux arbres de ta plantation?»*



Répondez vous aussi à cette question.
Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

15. JEU DE CARTES (Cat. 7, 8)

Luc et ses amis jouent avec un jeu de 52 cartes, composé de quatre séries de cartes numérotées de 1 à 13. À ce jeu, on retourne quatre cartes, faces visibles et l'on forme un «talon» avec les autres, faces cachées.

À tour de rôle, chaque joueur tire la carte supérieure du talon et, lorsque c'est possible, prend les cartes retournées dont la somme correspond au nombre de la carte tirée.

Par exemple, si on tire un «8», on peut prendre un «8» retourné ou deux, trois ou quatre cartes retournées dont la somme est 8.
C'est à Luc de jouer. Il observe les quatre cartes retournées et dit, avant de tirer la carte supérieure du talon: «J'ai de la chance, je suis sûr de pouvoir prendre au moins une des cartes retournées!»

Quels peuvent être les nombres écrits sur les quatre cartes retournées?
Expliquez comment vous les avez trouvés.

16. CHIFFRES MOBILES (Cat. 7, 8)

Un nombre est composé de quatre chiffres tous différents et différents de 0.
En mettant le chiffre des unités à la place de celui des milliers, celui des dizaines à la place de celui des centaines, celui des centaines à la place de celui des unités et celui des milliers à la place de celui des dizaines on obtient un nouveau nombre qui, additionné au nombre de départ, donne 9613.

Quels sont les nombres de quatre chiffres qui satisfont ces conditions?
Expliquez comment vous les avez trouvés.

17. GÂTEAUX: GROS OU PETITS? (Cat. 8)

Chaque dimanche, Mme Boulanger prépare sa pâte et en remplit à ras-bords un moule cylindrique. Une fois cuit, ça lui donne un excellent gâteau.

Mais aujourd'hui, avec la même quantité de pâte, elle fait plusieurs petits gâteaux au lieu d'un seul grand gâteau, en utilisant des moules dont le diamètre et la hauteur sont la moitié de celui qu'elle utilise habituellement.

Combien de petits gâteaux obtiendra-t-elle avec la même quantité de pâte?
Expliquez votre raisonnement.

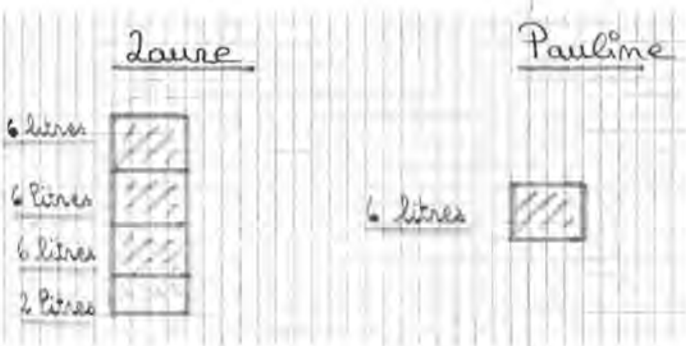
QUELQUES RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

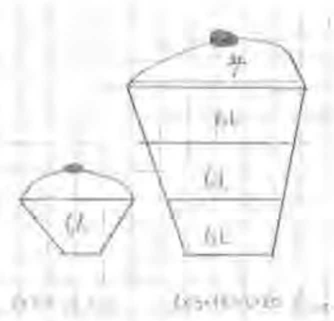
8. A LA FONTAINE (135 classes, 34 de cat. 4, 49 de cat. 5, 52 de cat. 6)

Du point de vue algébrique, ce problème se traduit par le système de deux équations: $26 = P + L$ et $L = 3P + 2$, où P représente la contenance du seau de Pauline et L celle du seau de Laure, en litres. Une des méthodes les plus simples pour résoudre ce système est la substitution de L par $3P + 2$ permettant d'arriver à une équation d'inconnue P; $26 = P + (3P + 2)$ se réduisant à $26 = 4P + 2$. Pour l'élève qui ne dispose pas de l'outil algébrique, le cheminement le plus naturel semble être l'un de ceux prévus par l'analyse a priori du problème:

- Comprendre que la contenance du seau de Laure, diminuée de 2 litres est trois fois celle du seau de Pauline.
- Comprendre que 26 l est la somme des contenances des deux seaux.
- Chercher à obtenir 26 comme somme de trois nombres: l'un est le triple de l'autre et le 3e est 2, par essais et réajustements.
- Enlever 2 à 26 et chercher à obtenir 24 comme somme de deux nombres dont l'un est le triple de l'autre;
- ou: comprendre que la contenance du seau de Pauline est le quart de 24 l, et déterminer cette contenance, c'est-à-dire 6 l, soit par essais additifs ou multiplicatifs, soit par reconnaissance du fait que le nombre qui, multiplié par 4 donne 24, est 6 ou par division.

En effet, nous avons trouvé souvent ces procédures, comme par exemple celle-ci:
Nous avons commencé par faire 26-2, puis nous avons divisé le résultat (24) par 4. Cela nous a donné 6. Il y a donc 6 litres dans le seau de Pauline. Nous avons multiplié 6 par 3, puis nous avons ajouté 2. Cela nous a donné 20. Il y a donc 20 litres dans le seau de Laure.
Parfois, les élèves ont illustré leurs solutions de dessins de seaux, souvent purement décoratifs (6 en 4e, 8 en 5e, 10 en 6e) mais quelques fois avec l'intention de représenter les proportions correctes (2 en 4e, 4 en 5e, 4 en 6e), comme ci-dessous:





Nous avons ainsi pu attribuer «4 points» à un grand nombre de réponses correctes et bien expliquées, mais de très nombreux «1 point» témoignent de l'ambiguïté (?) de la consigne. Malgré un contrôle rigoureux, il arrive en effet que les énoncés des problèmes du RMT - comme aussi ceux des manuels - offrent des interprétations différentes. Nous l'expliquons ainsi: en voulant donner un habillage plaisant au problème mathématique, «trouver deux nombres dont la somme est 26 et dont l'un vaut 2 de plus que le triple de l'autre» on a mis en scène deux fillettes et une histoire d'eau, de seaux et de fontaine. Cette situation

fictive introduit, dans ce cas, deux concepts que l'énoncé ne distingue pas : les « capacités » des seaux, indépendamment du contexte, et les « quantités d'eau » rapportées de la fontaine.
Voici un exemple d'une classe (la seule sur 136) qui a une réponse « fausse » du point de vue des « capacités » des seaux, mais dont la compréhension du problème nous a paru correcte et qui, manifestement, a pensé aux « quantités » d'eau prises à la fontaine :

Pauline a 0 litre dans le seau
Laure a 26 litres dans son seau
Chaque fois Laure met 8 litres
dans le seau de Pauline
nous avons fait : 3 x 8=24, 24+2=26
Il y a plus de solutions parce qu'il y a
que 3 x 8 qui font 24

Notre explication de leur démarche est la suivante)
Deux amies... vont chercher... avec un seau... (donc l'autre seau n'est pas utilisé pour prendre l'eau et reste vide).
Elles reviennent donc avec un seau plein de 26 l (Laure) et un seau vide d'une capacité de 8 l (Pauline). Après avoir versé à trois reprises le contenu du grand seau dans le petit, il reste 2 l dans le seau de Laure.
26+0=26 et 26-(3x8)=2
Certes, l'interprétation est inattendue car, si l'on va chercher de l'eau à deux à la fontaine, ce n'est, en principe, pas pour revenir avec un seau vide. L'expression « ... chercher de l'eau avec un seau » peut-elle avoir suggéré la possibilité qu'un seul soit utilisé ? Aurait-il fallu dire « ... chacune avec un seau » ou simplement « ... chercher de l'eau » puisque la suite de l'énoncé est claire sur la présence de deux seaux ?
Dans une résolution en classe, en présence du maître, ces incertitudes sont immédiatement levées par une courte intervention d'un élève, d'un groupe ou du maître. Dans les conditions du RMT, les groupes travaillent sur des problèmes différents, le maître est absent pour la régularité de l'épreuve, le « surveillant » n'a évidemment pas le droit d'intervenir ; c'est au sein du groupe que doit s'interpréter l'énoncé et, parfois le leader impose sa représentation sans laisser une discussion se développer.
Au bénéfice du doute, l'équipe des correcteurs a été généreuse et fait une exception aux critères d'attribution des points[1]. Nous avons ainsi attribué « 4 points » à cette classe.
Ce petit épisode montre que la tâche des équipes de correcteurs des problèmes du RMT va bien au-delà d'une attribution mécanique de points. On entre ici dans l'interprétation de la pensée des élèves, seuil caractéristique dans le passage d'une évaluation sommative - au sens restrictif du terme - vers une évaluation plus formative.
Parmi les « 1 point », il y a beaucoup (4 en 4e, 9 en 5e, 13 en 6e soit au total 1 classe sur 5 !) de groupes qui ont compris que le seau de Laure était plus petit et qu'il fallait le remplir 3 fois pour obtenir la contenance de celui de Pauline. Cette interprétation erronée entraînant une multiplication est vraisemblablement due à l'expression « trois fois » qui figure dans l'énoncé.
Un élève écrit : « *... le seau de Pauline contient le triple du seau de Laure...* »
Il est probable également à la lecture des explications, que certains élèves ont compris qu'il y avait un transvasement à effectuer et que l'on demandait d'indiquer ce qu'il restait dans les seaux à la fin de l'opération : « et ils nous disent que dans le seau de Laure on peut mettre 3 fois son contenu dans celui de Pauline... » ou encore « ... on met 3 fois le contenu du seau de Laure chez Pauline... ».

Voici un aperçu de la grande diversité des erreurs.
Réponse : Pauline = 4, Laure = 14 ; justifications : 3 x 4 = 12 et 12 + 2 = 14
Réponse : Pauline = 4, Laure = 14 ; justifications : 26 – 2 = 24 et 24 : 2 = 12

1 Les règles du RMT accordent une autonomie relative aux équipes régionales dans l'interprétation des critères d'attribution des points, pour autant que les modifications soient justifiées et communiquées aux autres sections et que toutes les classes d'une même région soient traitées avec le même barème.

puis 12 : 3 = 4 et 12 + 2 = 14
Réponse : Pauline = 5, Laure = 1 ; justifications : 26 : 2 = 13 et 13 + 2 = 15
Réponse : Pauline = 6,5, Laure = 19,5 ; justifications : 26 : 4 = 6,5 et 6,5 x 3 = 19,5
...

Certaines classes inscrivent exactement les mêmes calculs et parviennent à des réponses totalement différentes, le reste de 2 litres posant visiblement problème.
26 – 2 = 24 et 24 : 3 = 8 avec les réponses P = 24 L = 8 , P = 8 L = 16, P = 12 L = 14, P = 16 L = 10
26 – 2 = 24 et 6 x 4 = 24 (ou 24 : 4 = 6) avec les réponses P=18 L=6 , P=6 L=18 , P=8 L=18 , L=8 P=18

Les critères d'attribution des points définis dans l'analyse a priori ont été légèrement affinés, en fonction des procédures observées. Les voici, avec les résultats, sur 136 classes :

4 56 classes (41%) : 7 de 4e (21%) ; 19 de 5e (39%) ; 30 de 6e (57%)
Réponses correctes (Pauline 6 litres, Laure 20 litres), avec argumentation détaillée →

3 6 classes (4%) : 1 de 4e (3%) ; 5 de 5e (10%) ; 0 de 6e (0%)
Réponses correctes sans justification ou absence de la justification des 2 litres restant ou réponse totalement correcte mais inversion des prénoms (Pauline 20 litres et Laure 6 litres)

2 4 classes (3%) : 1 de 4e (3%) ; 2 de 5e (4%) ; 1 de 6e (2%)
Une seule réponse correcte ou 20 l et 6 l mais absence des prénoms

1 48 classes (35%) : 12 de 4e (35%) ; 16 de 5e (33%) ; 20 de 6e (38%)
Essais de recherche de la solution par le calcul (avec total cohérent de 24 l ou 26 l pour les deux seaux), ou schéma incomplet

0 22 classes (16%) : 13 de 4e (38%) ; 7 de 5e (14%) ; 2 de 6e. (4%)
Incompréhension du problème (réponse fausse et pour un seul enfant ; total des contenances de 78 l ; ...)

Analyse, corrections et commentaires :
Edith, Pfander, Daniel Sauthier,
François Jaquet

9. DRÔLE DE PIZZA (102 classes : 49 de cat. 5, 53 de cat. 6)
Ce problème a réservé quelques surprises qu'il vaut la peine de raconter pour illustrer le rôle des représentations préalables d'un problème pour sa résolution.

A. Commençons par
le point de vue des adultes.

Voici tout d'abord un extrait de son analyse a priori, établie lors de l'élaboration du problème après contrôle et relecture par toutes les sections du RMT :

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie aux olives est la plus longue.
- Comprendre les différents rapports entre longueurs et les rapporter à la part la plus longue : L(j) = 1/2 L(o) ; L(c) = L(f) = 1/4 L(o) (les rapports peuvent aussi être exprimés par rapport à l'une des parts les plus courtes comme celle aux champignons ou au fromage).
- En déduire que L(o) est égale à la moitié de la longueur totale (4 m), donc 2 m, puis les autres longueurs (1 m et 50 cm).
- Ou utiliser une représentation graphique pour représenter ces rapports.

A la lecture de ces lignes, il n'y a pas eu de doute, pour une trentaine d'adultes qui ont lu et relu les projets d'épreuve, que la représentation graphique de la pizza, mentionnée en fin d'analyse de la tâche est de ce type :

Champ.	From.	Jambon	Olives

En effet, ce problème appartient à la famille des « partages proportionnels d'une longueur », bien connue et bien entraînée dans les pratiques scolaires. Dans le RMT, sa dernière occurence remonte à 2002, (10e Epr. II, Probl. 1. Cat. 3) dans un contexte de segments mis bout à bout :

Les pompiers de Transalpie ont trois échelles: une courte, une moyenne, qui mesure deux fois la courte, une longue, qui mesure quatre fois la courte. Les pompiers peuvent les accrocher les trois à la suite l'une de l'autre, pour former une très grande échelle de 42 mètres de longueur. Combien mesure chacune des trois échelles?

On peut relever, en passant, que les deux problèmes 1 et 8, « A la fontaine » présentés dans les pages précédentes appartiennent à une famille très proche, celle des « partages proportionnels d'un volume » dans le contexte des liquides et qu'ils ont aussi été souvent résolus par une représentation graphique de segments.

B. Les solutions proposées, du **point de vue des élèves**, ne s'appuient pas toutes sur le même modèle. Loin s'en faut. En voici deux catégories :

B.1) 8 classes de 5e (sur 49) et 14 classes de 6e année (sur 53) ont représenté la pizza ainsi :

<table>
<tr><td>Champ.</td><td>From.</td><td>Jambon</td></tr>
<tr><td colspan="3">Olives</td></tr>
</table>

avec la réponse : *Olives : 4 m, Jambon : 2 m, Fromage : 1 m, Champignons : 1 m*

B.2) 4 classes de 5e et 8 classes de 6e année ont présenté ce schéma :

<table>
<tr><td colspan="2">Jambon</td><td rowspan="2">Olives</td></tr>
<tr><td>Champ.</td><td>From.</td></tr>
</table>

et cette réponse : *Olives : 4, Jambon : 2, Fromage : 1, Champignons : 1.* Certaines classes de 6e ont spécifié qu'il s'agissait de m², dans d'autres classes, cette unité n'est pas mentionnée et ne paraît que sous-entendue.

Ces deux solutions ne sont vraisemblablement pas dues au hasard puis qu'elles sont proposées par 22 classes sur 105 (20%) pour la première et 12 sur105 (11%) pour la seconde[2].

La première (B.1), respecte parfaitement toutes les contraintes de l'énoncé : rectangle et rapports des longueurs des différentes parts. Elle respecte aussi l'idée de répartition proportionnelle émise dans la phrase *« Pour tenir compte des goûts de chacun, les habitants décident que : ... »* qui sous entend clairement que ce sont les quantités de pizza qui sont en jeu ici et donc les surfaces respectives des quatre parties, puisque celles-ci sont de même largeur, ce qui n'aurait pas été le cas si la partie aux olives avait été d'une largeur différente des trois autres.

Il n'y a donc pas lieu d'hésiter pour l'attribution des points : même si ce modèle de pizza n'est pas prévu dans le barème, c'est le maximum, 4 points qui doit être attribué.

La deuxième solution (B.2) fait état d'une confusion entre aire et longueur. Il semble que les élèves n'ont retenu que la quantité de pizza. Le partage « 4 ; 2 ; 1 ; 1 » respecte en effet les proportions de l'énoncé, mais ne fait plus allusion aux longueurs. La représentation que les élèves ont d'une pizza « coupée en 4 » est vraisemblablement plus forte que celle du partage en 4 « bandes » ou d'une « longue bande partagée en 4 ».

Pour l'attribution des points, le problème est plus délicat. Il faut développer les critères de l'analyse a priori. Nous avons décidé de considérer que le schéma de partage est conforme aux quantités données mais, vu l'absence de référence aux longueurs, cette solution ne valait qu'un point.

2 Nous avons eu l'occasion d'analyser aussi les productions de 17 classes de la section de Cagliari où nous avons observé 4 réponses du type B.1 ou B.2.

En conclusion, le fait que les adultes ne pensent qu'à une configurations de la pizza alors que les élèves en trouvent d'autres, dont une tout à fait correcte (comme B1) est sans doute à mettre sur le compte des modèles a priori dont chacun dispose. Les premiers disposent de la représentation «canonique» du partage proportionnel d'un segment; ils n'estiment donc pas nécessaire de remettre en cause leur modèle ou d'en trouver d'autres. Les seconds ont un répertoire de problèmes plus limité, non encore validé par une longue expérience; ils doivent construire leur modèle à partir du contexte réel: la pizza, un rectangle, sa répartition en quatre pour *tenir compte des goûts de chacun*, les longueurs respectives de ces quatre parties. Il y a donc plus de chances qu'apparaissent alors des pizzas différentes de celles auxquelles avaient pensé les auteurs du problème, dont la deuxième solution!

Voici les critères d'attribution des points définis dans l'analyse a priori avec les résultats des 102 classes de la section de Suisse romande:

4 47 classes (21 de 5e, 26 de 6e)
Réponse correcte (2 m ou 200 cm pour les olives, 1 m ou 100 cm pour le jambon, 0,5 m ou 50 cm pour les champignons et pour le fromage), avec argumentation ou schéma correct

3 14 classes (7 de 5e, 7 de 6e)
Réponse correcte sans justification

2 13 classes (6 de 5e, 7 de 6e)
Réponse partiellement correcte (au moins 2 parties correctes) ou raisonnement correct, mais erreur dans les calculs

1 16 classes (6 de 5e, 10 de 6e)
Début de raisonnement ou de schéma correct

0 12 classes (9 de 5e, 3 de 6e)
Incompréhension du problème

Analyses, corrections et commentaires:
Martine Simonet, François Jaquet

Réponses aux problèmes du numéro 210.

Problèmes du 21th Annual American Invitational Mathematics Examination 2003, tirés de *Mathématique et Pédagogie*.

2 *(210, p.8) Dans un plan, on dessine cent cercles concentriques de rayons respectifs de 1, 2, 3, ... 100. On colorie en rouge l'intérieur du cercle de rayon 1 et on colorie ou bien en rouge ou bien en vert chaque zone ayant pour frontières des cercles consécutifs, sans que jamais deux zones adjacentes ne soient de même couleur. Le rapport de l'aire totale des zones vertes à l'aire du cercle de rayon 100 peut s'écrire m/n où m et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux. Trouver m + n.*

L'aire de la partie verte est
$\pi[(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+...+(100^2-99^2)] =$
$= \pi(3+7+11+15+...+191+195+199) = 202 \times 25\pi = 5050\pi$
Le rapport est 5050/10000 = 101/200
$m = 101$, $n = 200$, $m + n = 301$

Commentaires: une belle occasion de mettre en oeuvre les connaissances sur l'aire du disque - en nombres réels et non en approximations inopportunes - sur l'associativité et la commutativité de l'addition, sur la distributivité de la multiplication amenant à une factorisation. Degrés 8, 9 et au-delà.

3. (210, p. 25) *Soit l'ensemble S = {8, 5, 1, 13, 34, 3, 21, 2}. Suzan dresse une liste comme suit: pour chaque sous-ensemble de S à deux éléments, elle écrit sur sa liste le plus grand des deux éléments de l'ensemble. Trouver la somme des nombres de sa liste.*

Il y a 28 = (8x7)/2 sous-ensembles de deux éléments de S.
Le 34 est le plus grand dans 7 cas, le 21 est le plus grand dans 6 cas, etc.
Réponse: 7 x 34 + 6 x 21 + 5 x 13 + 4 x 8 + 3 x 5 + 2 x 3 + 1 x 2 = 484.

Commentaires: Les 8 nombres de S appartiennent à la suite de Fibonacci, mais nous n'avons pas trouvé de «fonction» générale pour ce type de somme. Compétences requises: savoir dresser un inventaire ordonné de combinaisons, puis effectuer des calculs simples. Ce problème peut être résolu dès le degré 5 ou 6.

suite en page 25