

PISTES DIDACTIQUES POUR LA CONSTRUCTION DES RATIONNELS AU CYCLE 10/12

ÉQUIPE DE RECHERCHE COLLABORATIVE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Pierre Stegen

Centre interfacultaire de formation des Enseignants
(CIFEN) de l'ULg

Département pédagogique de la Haute École de la
Ville de Liège

Annick Sacré

Enseignement de Promotion sociale de la Ville de Liège

Un précédent article (*voir Math-Ecole 210*) a mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves dans la construction des nombres décimaux. En de nombreuses

occasions, des hypothèses explicatives ont été suggérées. Elles pointent des progressions didactiques qui ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles épistémologiques et didactiques liés à l'enseignement des décimaux.

L'objet de cet article est de préciser les fondements théoriques (didactiques et mathématiques) sur lesquels repose la progression didactique développée pour favoriser la construction des rationnels. Enfin, pour ne pas terminer un second article sans présenter d'activité, la troisième partie de cet article détaille l'activité: «la carte en trop pour faire 1».

Quels sont les obstacles didactiques et épistémologiques rencontrés dans l'enseignement des décimaux?

Le tableau suivant détaille les hypothèses suggérées par les analyses d'erreurs commises par les élèves lors d'épreuves diagnostiques portant sur l'enseignement des décimaux.

Obstacles didactiques ¹	Obstacles épistémologiques
<p>1. Partir des mesures de grandeurs pour introduire les décimaux?</p> <p>Bolon (1996): «<i>L'usage des décimaux a été introduit, dans l'enseignement primaire, pour imposer un système unifié de mesures de grandeurs et en finir avec un système d'unités non décimales. L'usage des décimaux a été associé au système métrique en insistant sur les avantages qu'ils comportaient pour effectuer les opérations de conversion</i>».</p>	<p>Comiti et Neyret (1979) mettent en évidence des liaisons possibles observées entre les erreurs commises par les élèves et ce mode d'introduction des décimaux: «<i>Les enfants utilisent des algorithmes qui sont pertinents pour certains décimaux (ceux de la vie quotidienne: les euros, les centimes, les kilomètres, les grammes...).</i> Ils traitent les mètres d'un côté et les centimètres de l'autre, puis ils effectuent les conversions. Les conséquences de ces pratiques les conduisent à traiter séparément les parties entières et décimales et à poser que $0,3 \times 0,3 = 0,9$ (faux) ou que $0,3 \times 0,4 = 0,12$ (vrai)».</p>

1 Les termes d'obstacles épistémologiques et didactiques ont été définis dans le précédent article.

2. Construire le concept de nombre décimal par analogie avec celui de nombre entier ?

2.1. Du côté des élèves, l'enseignement des décimaux survient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entiers.

2.2. D'un autre côté, plutôt qu'aborder les obstacles liés à l'introduction des décimaux et aborder la question centrale du sens des décimaux, les enseignants préfèrent doter leurs élèves de trucs supposés leur permettre de se débrouiller avec ces nouveaux nombres.

Exemples :

Pour comparer '3,14' et '3,9', les enseignants suggèrent à leurs élèves d'ajouter un zéro à la droite de 9 dixièmes. Si l'élève ne comprend pas le pourquoi mathématique de cette consigne, il va la mémoriser ... et l'oublier très rapidement. Apprendre ce procédé sans pouvoir lui donner du sens ne lui permettra pas de reconnaître toutes les situations où ce « truc » est pertinent.

Construire les décimaux sur une analogie forte avec les naturels conduit les enseignants à laisser les élèves verbaliser les parties décimales comme s'il s'agissait de parties entières. Ainsi, 12,345 sera lu: « douze virgule 345 » et 12,34: « douze virgule 34 ».

Les règles de fonctionnement des entiers ne peuvent être étendues aux décimaux. Elles ne peuvent être supprimées pour autant; elles sont donc sources d'instabilité pour les élèves:

Exemples:

- un entier est d'autant plus grand qu'il a un plus grand nombre de chiffres... ce qui entraîne souvent que plus il y a de chiffres à la partie décimale, plus elle est petite... ce qui n'est pas toujours vrai.
- on peut fabriquer des collections de 1000 à 3000 objets développée dans le numéro de Mars/avril 2002 et les placer à côté de 3, 150, 765 objets et les comparer. Ce n'est pas vrai pour les décimaux: il est très difficile de fabriquer, en même temps, des objets dont les mesures seraient 13; 13,5; 13,05; 1,035. Les décimaux sont d'abord une construction mentale avant d'être une construction physique.

Ajouter des zéros inutiles aux parties décimales permet aux élèves d'étendre les règles de comparaison des nombres entiers aux décimaux. L'analyse des erreurs développées dans le numéro de Janvier/ février 2003 montre les limites de ce choix didactique. Ainsi, la partie décimale d'un nombre à virgule ne fonctionne pas de la même manière que la partie entière. En ce qui concerne le cas spécifique de l'ajout de zéros inutiles, on rappellera que, pour les entiers, ils se placent à la gauche du nombre... tandis que pour les nombres à virgule ils se placent à la droite de la partie décimale.

On trouve une autre illustration de la rupture entre les décimaux et les entiers dans l'oralisation des nombres décimaux: contrairement à ce que pensent de nombreux élèves, dans les deux nombres ci-contre, le chiffre 4 ne désigne pas tantôt le rang des centièmes, tantôt celui des dixièmes. Dans les deux expressions proposées, il représente le rang des centièmes.

Ermel (1997): une rupture essentielle entre

3. S'appuyer sur la droite numérique pour construire l'intercalation ou aborder la densité des décimaux

Bolon (1997): « En introduisant les décimaux par les codages de points sur une droite (ordre lexicographique), la comparaison de décimaux est facilitée ainsi que le principe d'intercalation indéfinie ».

Toutefois, l'analyse des erreurs commises par les élèves dans le positionnement de nombres sur une droite montre que cet outil ne constitue pas toujours une aide pour les élèves. Une nouvelle fois, on constate qu'un outil introduit précocement pour permettre le repérage de grandeurs discrètes est transposé tel quel dans l'univers des grandeurs continues.

les naturels et les décimaux est marquée par les propriétés relatives à l'ordre sur ces nombres et donc à leur comparaison :

- L'idée de successeur n'a plus de sens. Un naturel a un successeur (après 7, il y a 8), alors que cette idée n'a plus de sens sur les décimaux (quel décimal vient après 2,75?).
- Les problèmes d'intercalation n'ont pas les mêmes solutions dans les naturels et les décimaux. Entre deux naturels, il y a un nombre fini de naturels. Entre deux décimaux, il y a une infinité de décimaux.

Quels axes de progression didactique ?

1. Partir des fractions pour enseigner les décimaux ?

La progression didactique proposée s'appuie sur les conclusions formulées par de nombreux didacticiens français (Brousseau, 1998; Douady, 1986; Brissiaud, 1998; Bolon, 1997), que l'on peut résumer ainsi : **éviter d'enseigner les décimaux au départ de mesures de grandeurs**. Les nombres décimaux ne doivent pas, dans l'esprit des élèves, être assimilés à une forme de recodage des mesures entières (exemples : 1,32 mètres c'est 132 centimètres; 3,75 € c'est 375 centimes). Il convient plutôt d'enseigner les décimaux au départ de la notion de fraction décimale. Pour justifier ce principe, les didacticiens rappellent que les nombres décimaux (c'est-à-dire des fractions dont le dénominateur est une puissance de 10) ont été inventés pour permettre d'approcher le plus précisément possible n'importe quelle grandeur continue grâce à des fractionnements de plus en plus fins. « Faire disparaître l'idée de

fractionnement dans une progression didactique concernant les décimaux, c'est donc passer à côté de son objet d'étude, c'est quasiment décider de ne pas enseigner les décimaux, de laisser les élèves qui le peuvent les inventer eux-mêmes » (Brissiaud, 1998).

Partir des fractions pour enseigner les décimaux, c'est donc respecter le cheminement de l'histoire : comme le rappelle Bolon (1996), « les propriétés des fractions comme rapports de grandeurs commensurables étaient connues au VI-V^e siècle avant JC; on date la naissance des décimaux quelque 20 siècles plus tard ».

La filiation historique doit également être respectée au niveau de l'écriture. Ainsi, on commencera par présenter aux élèves des fractions en utilisant la barre de fraction comme système de notation puis en utilisant l'écriture à virgule de ces fractions décimales. L'écriture à virgule est, dans l'histoire des mathématiques, assez récente. « Vouloir que des enfants conceptualisent d'emblée les décimaux avec cette sorte d'écriture (l'écriture décimale), alors qu'elle masque leur véri-

table nature, ne peut qu'échouer pour la plupart d'entre-eux. Il est important que les enfants travaillent longtemps avec des nombres décimaux représentés par des fractions décimales. Ce parcours est, à notre sens, le seul qui puisse laisser un espoir de voir un jour les élèves conceptualiser les décimaux à l'école élémentaire dans une proportion supérieure aux résultats actuels » (Brissiaud, 1998).

2. Favoriser la mise en place de dialectiques outil-objet

Poser comme choix didactique de partir des fractions décimales et de la notation fractionnaire pour aborder l'étude des décimaux n'est pas suffisant. Bon nombre d'erreurs des élèves peuvent être attribuées à une installation trop rapide de mécanismes ou de techniques au détriment d'un travail approfondi sur le sens.

Si, dans un premier temps, le recours à ces techniques peut donner l'illusion d'un apprentissage réussi, l'analyse des erreurs des élèves montre que les connaissances ainsi développées résistent mal à l'épreuve du temps ou aux changements de contexte. Trop souvent, ces techniques sont liées à des résolutions de problèmes spécifiques ; l'enfant ne reconnaît pas d'autres situations dans lesquelles elles seraient également opératoires.

Dans de nombreux articles précédents, l'accent a été mis sur la dialectique outil-objet pour caractériser la manière dont se développent les connaissances mathématiques. Pour rappel, Douady (1986), distingue, pour chaque concept mathématique, son caractère « **outil** » et son caractère « **objet** ». « Par son caractère **outil**, nous entendons l'usage que l'enfant en fait pour résoudre un problème. Un concept prend d'abord son sens par son caractère outil. Par son caractère **objet**, nous entendons le concept mathématique considéré comme ayant sa place dans le savoir mathématique

de référence à un moment donné de l'apprentissage » (Douady, 1986).

Les activités d'apprentissage proposées dans la progression didactique ci-après ont pour objectif d'assurer la mise en place de dialectiques outil-objet ; les situations-problèmes, les jeux, les défis posés permettent aux élèves, dans un premier temps, de rencontrer les rationnels dans leur statut d'outil. Dans un second temps, le recours au symbolisme mathématique pour formaliser le résultat des manipulations et la généralisation de leur portée permet de travailler le nombre pour lui-même, indépendamment de tout contexte et d'en faire un objet d'étude.

A titre d'exemple, au niveau de la découverte des fractions, nous avons déjà détaillé une progression élaborée par Rouche (1998). Elle a pour but de faire vivre aux élèves des situations de fractionnement les plus diversifiées possible. Elle comporte 4 étapes dont le rappel permet d'identifier les démarches d'apprentissage des fractions développées avant l'entrée au cycle 10/12 :

A. partager en parts égales des objets quelconques

Ces objets quelconques sont des objets pris dans la vie courante, comme un fil, une baguette, une tarte, une barre de chocolat, le contenu d'une boîte de biscuit, le contenu d'une bouteille, l'argent récolté lors de la vente d'objets, etc. Il importe de varier les objets de manière à développer un maximum de stratégies. Ainsi, pour partager un fil en deux, on peut le plier en deux et donner un coup de ciseau. Une telle technique sera inopérante s'il s'agit de partager une baguette. A ce moment, le choix d'un étalon (comme le fil dont nous venons de parler) pourra être très utile.

Comment partager en deux le contenu d'une bouteille ? Un élève peut proposer le choix de deux verres identiques. Le contenu de la bou-

teille est alors réparti équitablement entre ces deux verres et l'équivalence des hauteurs permet de juger de l'équivalence des volumes. Les techniques de dénombrement seront bien utiles pour partager le contenu d'une boîte de biscuits.

Les différents objets à fractionner peuvent donc être considérés du point de vue de leur longueur, de leur volume, de leur poids ou de leur nombre, ce qui permet de faire des liens avec d'autres champs mathématiques.

Comme le montrent ces exemples, il ne s'agit pas de réduire les manipulations effectuées à des fractionnements d'objets. Au contraire, dès le départ, les élèves ont pour tâche d'effectuer des partitions d'une pluralité d'objets.

B partager en parts égales des objets standards

Cette deuxième étape constitue un pas vers une abstraction plus grande. Il s'agit ici de choisir des objets prototypiques, des représentants. De cette manière, on fait le choix de se dégager des caractéristiques particulières des objets à fractionner pour ne se préoccuper que des techniques du fractionnement.

Ainsi, la boule de plastiline remplacera avantageusement les partages d'objets pesants ou solides, tandis que des bâtonnets, par leur longueur, seront les représentants des partages de longueur. Les jetons, par leur caractère discret, permettront le partage de collections.

C. partager en parts égales des représentations dessinées

Un pas supplémentaire vers l'abstraction est à nouveau franchi. Il s'agit cette fois d'opérer non plus sur des objets concrets (naturels ou prototypiques) mais sur des représentations dessinées. C'est un passage décisif qui ne peut être opéré en une seule fois. En effet, tous les types de manipulations effectuées précédemment sont représentées à l'aide de dessins : les segments de droite permettent de

fractionner des longueurs mais aussi des durées, les figures géométriques permettent de fractionner des aires. Des ensembles d'objets peuvent également être représentés par des dessins.

D. partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres

Dans ce cas, on ne fractionne plus des objets ou leur représentation mais leur mesure qui s'exprime à l'aide de nombres. Ces nombres s'écrivent avec des chiffres, dont le symbolisme est arbitraire ; il n'y a aucune ressemblance avec les objets auxquels ils renvoient. « On travaille à ce moment avec des symboles purs, c'est-à-dire dont la signification est entièrement conventionnelle » (Rouche, 1998).

Les trois premières étapes sont plus spécifiquement réservées aux cycles 5/8 et 8/10 ; elles permettent aux élèves de rencontrer, dans des contextes diversifiés, la notion de fraction dans son statut « outil ». Dès la fin du cycle 8/10 et au cycle 10/12, la quatrième étape permet d'assurer le difficile passage du concret à l'abstrait (de la notion de « *fraction-outil* » à la notion de « *fraction-objet* d'étude »). On notera également que la mise en place de cette progression n'est pas purement linéaire. Au contraire, elle est faite d'allers et retours entre les différentes étapes.

Un aspect intéressant de cette progression est le déséquilibre entre le nombre d'étapes abordant le concept de fraction dans son statut d'outil et l'unique étape où le statut objet est privilégié.

Pour être complet et pour diversifier au maximum les occasions de rencontres des fractions, les activités de partage se caractériseront aussi par le nombre de parts prélevées ; ainsi, partager en deux ou en trois parts équivalentes, ce n'est pas la même chose. Les fractionnements peuvent aussi se révéler plus ou moins complexes selon les caractéristiques

des objets (ou collections) à fractionner. Ainsi, partager en deux une bandelette de papier ne pose pas de problème. cela s'avère plus difficile quand la consigne impose de la partager en trois. Par ailleurs, les objets présentent parfois des axes de symétrie qui facilitent les activités de fractionnement. Il y a donc lieu de diversifier la progression proposée en la croisant avec le nombre de parts prélevées.



3. Quelles activités pour concrétiser les axes de progression didactique ?

Les différentes activités centrées sur la construction des nombres décimaux peuvent être organisées séquentiellement de la manière suivante :

Fraction	Écriture fractionnaire	Écriture décimale	
« nombre mesure »			
<ul style="list-style-type: none"> ● Carré magique pour faire 1 ● Carte en trop (voir ci-après) 	<ul style="list-style-type: none"> ● Comparaison de fractions à l'unité ● Mesurer les pièces d'un tangram ● Bande unité 		<ul style="list-style-type: none"> ● Sériation et comparaison de nombres à virgule
Construction de la droite numérique (Mai/juin 2001)			
Fraction opérateur <ul style="list-style-type: none"> ● Graduations ● Bandes colorées ● Recettes ● Tangram (agrandissement) ● Pourcentages ● Soldes 		<ul style="list-style-type: none"> ● Reconstitution de droites graduées ● Feuille A3 ● Construction de nombres décimaux ● Rôle du zéro dans la numération de position 	<ul style="list-style-type: none"> ● Jeu de bataille avec des décimaux ● Le tournoi des décimaux
		<ul style="list-style-type: none"> ● Trimino 	



Au centre de la progression, on trouve deux colonnes intitulées : « écriture fractionnaire » et « écriture décimale ». La séquence d'activités « construction de la droite numérique » est centrale ; elle permet d'assurer la jonction et l'équivalence entre les notations fractionnaires et décimales. Au terme de celles-ci, on retrouve des activités plus spécifiques de positionnement de nombres décimaux sur une droite numérique ou de comparaison de nombres décimaux ; elles ont pour objet de stabiliser les connaissances des élèves et de favoriser la prise en compte des nombres décimaux en tant qu'objet d'études

À la gauche de la colonne « écriture fractionnaire », on retrouve une série d'activités privilégiant le développement du concept de fraction. La présence de cette colonne et le découpage des activités qui y sont reprises nécessitent quelques explications complémentaires. Comme le souligne Brissiaud (1998), une progression didactique où l'on enseigne d'abord les décimaux sous forme de fractions décimales n'est pas entièrement satisfaisante. En effet, cela fait quelques années qu'en France, des enseignants procèdent de la sorte (suite notamment aux travaux de Brousseau et de Douady) sans que les élèves conceptualisent mieux les décimaux. La raison en est simple : les élèves conceptualisent mal les fractions. L'origine de cette mauvaise conceptualisation est sans doute liée à une conception trop étroite de la notion de fraction. Trop souvent, celle-ci se réduit à l'idée du fractionnement d'une unité. Ainsi, trois quarts est vu comme le partage d'une unité en 4 parts égales dont on en prélève trois.

Cette colonne se subdivise en deux parties qui renvoient aux deux aspects complémentaires de la notion de fraction : celui de nombre-mesure et celui d'opérateur fractionnaire.

3.1 La fraction comme nombre-mesure

« La fraction comme résultat d'une mesure apparaît souvent au travers de problèmes de partage dans lesquels l'unité doit être découpée en autant de parts égales qu'il y a de candidats » (Maurin et Joshua, 1993).

Ainsi, par exemple, si trois tartelettes doivent être réparties entre 5 invités, on les partagera chacune en cinq parts égales (de manière à obtenir, pour chacune, des cinquièmes). Dans un second temps, ces cinquièmes sont répartis entre les 5 invités ; chacun en reçoit 3 (soit trois cinquièmes). Dans ce cas précis, $\frac{3}{5}$ constitue une mesure de la part de chacun avec pour « unité », le cinquième d'unité.

Cet exemple illustre une approche non conventionnelle de la fraction « trois cinquièmes ». Contrairement à ce qui est souvent observé dans les classes, la notion de fraction « nombre-mesure » ne doit pas se construire uniquement sur des fractionnements d'unité mais bien également sur des collections d'objets prises comme unité. Brissiaud parle dans ce cas de « division partition d'une pluralité » ; démarche plus complexe que le fractionnement d'une unité, mais fondamentale dans la construction de la notion de fraction.

Au vu de ces exemples, la « fraction nombre mesure » trois cinquièmes peut donc être le résultat de deux opérations différentes :

- Une tartelette partagée en 5 portions équivalentes dont on considère la partie formée par 3 de ces portions (fractionnement d'une unité) ;
- 3 tartelettes partagées entre 5 personnes dont chacune reçoit l'équivalent de trois cinquièmes (partition de la pluralité).

Pour Brissiaud, il est essentiel de ne pas limiter le sens de la « fraction nombre-mesure » à celui d'un fractionnement d'une unité. Trois cinquièmes doivent aussi renvoyer à la division de trois par cinq. Dans cette perspective, la fraction devient un outil permettant de résoudre de façon satisfaisante des problèmes

de partage d'entiers en n parts égales, que la division euclidienne ne parvient pas à résoudre sans qu'il y ait de reste. Comme le soulignent Maurin et Joshua (1993), « pour partager 26 en 7 parts égales, la division euclidienne nous dit que chaque part doit comprendre 3 unités et qu'il reste 5 unités qui ne sont pas partagées. Les nombres entiers ne permettent pas de mieux faire. Si les nombres fractionnaires viennent au secours des nombres entiers, nous pourrons partager chaque unité restante en sept parts égales et, à l'issue du partage, chaque part sera alors composée de 3 unités et de $5/7$ d'unité, ce qui s'écrit : $3 + 5/7$ ».

On retiendra de cet exemple que les nombres fractionnaires permettent de définir une division exacte entre deux nombres entiers sans avoir à se préoccuper si le dividende est divisible ou non par le diviseur ; $5 : 3$ peut alors s'écrire sous la forme de $5/3$.

Pour Brissiaud, les pratiques didactiques rencontrées dans les classes ne favorisent pas la compréhension, par les élèves, de cette caractéristique de l'écriture fractionnaire. Si on demande à ces derniers d'inventer un problème habillant l'opération « $11 : 4$ », il est vraisemblable que leurs propositions renverront à la partition d'une totalité et non d'une pluralité ; 4 objets d'un même prix valent 11€, quelle est la valeur d'un objet ? Ses recherches montrent que jamais un élève ne proposera un problème du type : 11 personnes mangent chacune un quart de pizza. Quel est le nombre de pizzas nécessaires ? Les élèves ne savent pas que pour rechercher la partie entière de $11/4$, il suffit de diviser 11 par 4. Il ne faut donc pas s'étonner, de constater que de nombreux élèves de fin de 6P soient incapables d'établir que $56 : 100 = 56/100$.

3.2 La fraction opérateur

Pour Maurin et Joshua (1993), « la notion de fraction opérateur apparaît comme la succession

de deux opérations, l'une étant une multiplication et, l'autre, une division (au sens de division exacte). L'ordre dans lequel s'effectuent ces deux opérations n'ayant pas une incidence sur le résultat final, l'opérateur fractionnaire est un résumé de l'enchaînement de ces deux opérations. Mathématiquement, on dirait qu'il est le composé commutatif d'un opérateur multiplication et d'un opérateur division ». Ainsi, par exemple, $2/3$ de 12 = $(12 : 3) \times 2$.

Une bonne maîtrise de cet aspect des fractions facilite la résolution de problèmes de proportionnalité.

Pour conclure ce deuxième article, la présentation de l'activité « la carte en trop pour faire 1 ».

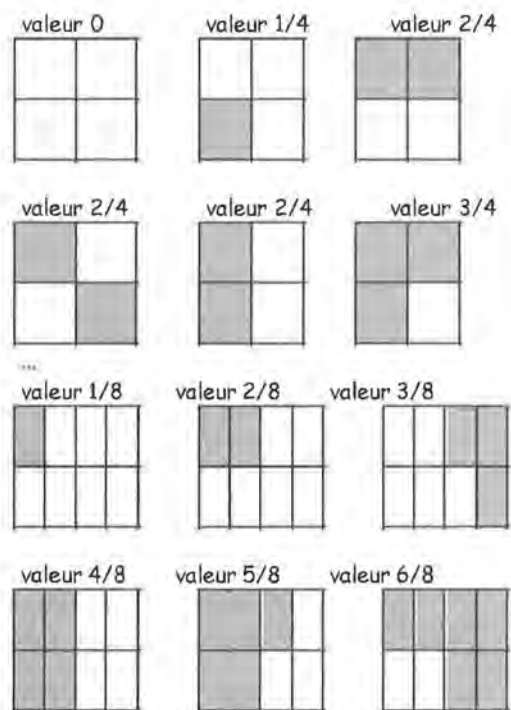
La construction des compétences numériques au cycle 10/12 se caractérise principalement par l'étude d'un nouvel univers de nombres : les rationnels. L'étude de ces nombres soulève de nombreuses questions chez les enseignants confrontés aux difficultés d'apprentissage de leurs élèves. L'apprentissage des décimaux va mobiliser le temps et l'énergie des élèves et de leurs enseignants. Comme le montrent les réflexions didactiques et mathématiques développées dans ces deux premiers articles, le parcours est long et semé d'embûches ! Dans les articles à venir, nous détaillerons les différentes activités reprises dans le tableau de progression didactique. Comme annoncé dans l'introduction, il reste maintenant à présenter la première activité reprise dans le tableau de progression, « la carte en trop pour faire 1 » ; soit une activité pour favoriser le développement de la fraction comme nombre-mesure.

A. Présentation de l'activité

L'introduction de cette activité est prévue en fin de cycle 8/10 ; elle peut toutefois être utilisée, en début de 5^e, par un enseignant soucieux de consolider la notion de fraction en début de cycle 10/12.

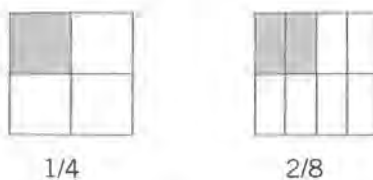
Trois ou quatre joueurs peuvent jouer ensemble. Ce jeu est une adaptation d'un jeu de cartes traditionnel (appelé, selon les régions, «Le valet noir» ou «Le puant»). Les cartes sont distribuées entre les joueurs. Chacun essaie alors, avec les cartes dont il dispose, de former le plus possible de couples dont la somme est égale à l'unité. Chaque couple formé est déposé sur la table. Lorsque aucun joueur ne peut plus former l'unité avec les cartes qu'il a en mains, les joueurs piochent une carte dans le jeu de leur voisin de droite et essaient à nouveau de former un couple. Le dernier joueur qui garde une carte en main (la carte en trop, celle que l'on ne peut associer à aucune autre pour former l'unité) a perdu.

B. Exemples de représentations des cartes à utiliser

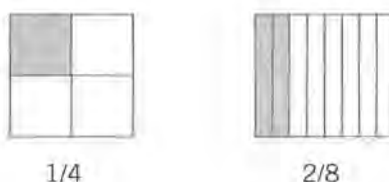


Sur les cartes, sont représentées des fractions. Le principe de construction des cartes à jouer

est très important. Pour que les élèves puissent comparer des quarts et des huitièmes, il importe que ces fractions soient représentées de la manière suivante :



Cette représentation permet aux élèves de poser plus facilement l'équivalence: $1/4 = 2/8$. Ce que n'autorise la représentation suivante :



Un tel mode de construction des cartes favorise la rencontre de la notion de «fraction-outil». Elle permet aux élèves de construire le passage de la troisième à la quatrième étape de la progression définie par Rouche (1998). Elle autorise également des modes de validation interne; les élèves sont autonomes dans le déroulement du jeu. Si cette activité ne pose aucun problème aux élèves, il est possible de remplacer les représentations des fractions par une notation chiffrée. Dans ce cas, le problème de validation des couples formés pour obtenir l'unité se pose. Toutefois, en cas de contestation, il est toujours possible pour l'enseignant de procéder rapidement à une vérification des paires proposées par les élèves.

C. Identification des cartes à utiliser

Avant le début du jeu, il convient de sélectionner les cartes soit selon les compétences numériques des élèves, soit selon les fractions que l'enseignant souhaite aborder. Chaque colonne

du tableau ci-dessous propose une sélection de cartes pour aborder une ou deux séries de fractions lors d'une partie. Plus on va vers la droite du tableau, plus les occasions de jouer en utilisant les fractions équivalentes sont nombreuses et plus les parties peuvent devenir complexes.

Cartes représentant	Partie 1	Partie 2	Partie 3	Partie 4
0 (carte blanche)	1	1	1	1
$1/2$	8	6	6	3
$1/4$	6	4	/	3
$2/4$	8	4	/	3
$3/4$	6	4	/	3
$1/8$	/	2	/	2
$2/8$	/	4	/	3
$3/8$	/	2	/	2
$4/8$	/	4	/	3
$5/8$	/	2	/	2
$6/8$	/	4	/	3
$7/8$	/	2	/	2
$1/3$	/	/	4	3
$2/3$	/	/	4	3
$1/6$	/	/	2	2
$2/6$	/	/	4	3
$3/6$	/	/	6	3
$4/6$	/	/	4	3
$5/6$	/	/	2	2
Total	29	39	33	49

Références bibliographiques

- Bolon, J. (1996). **Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière Ecole-Collège**. Paris: Thèse de doctorat non publiée.
- Bolon, J. (1997). L'enseignement des décimaux à l'école primaire. **Grand N**, 52.
- Brissiaud, R. (1998). **J'apprends les maths CM1**. Paris: Retz.
- Brousseau, G. (1998). **La théorie des situations didactiques**. Grenoble: la Pensée sauvage.
- Comiti, C. & Neyret, R. (1979). A propos des problèmes rencontrés dans l'enseignement des décimaux au cours moyen. **Grand N**, 18.
- CREM. (1995). **Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans - Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques**. Nivelles: CREM asbl.
- Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, 7 (2).
- Dubois, C., Fénichel, M. & Pauvert, M. (1993). **Se former pour enseigner les mathématiques - Numération, décimaux**. Paris: Armand Colin.
- Maurin, C. & Joshua, A. (1993). **Les structures numériques à l'école primaire**. Paris: Ellipses.
- Rouche, N. (1998). **Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?** Paris: Ellipses.