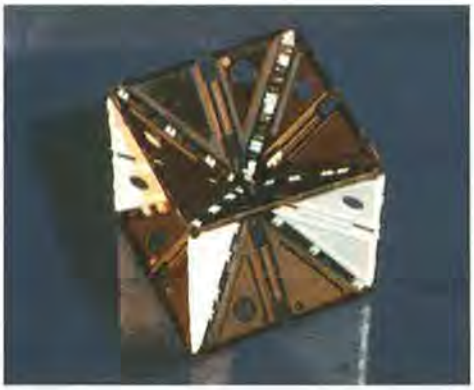
PAVAGE DE L'ESPACE 3D
(suite)

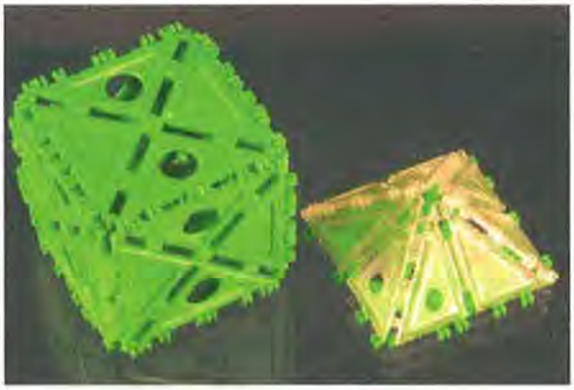
Jean Bauer
Jean-Philippe Lebet

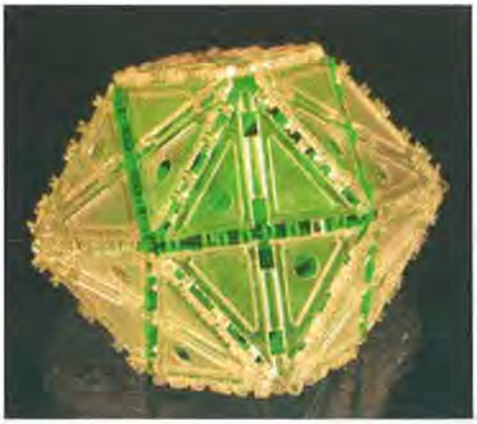
Dans un article précédent nous avons étudié l'octaèdre tronqué (dont toutes les arêtes présentent la même longueur) qui remplit tout l'espace. Dans cet article, nous examinons le dodécaèdre rhombique et d'autres solides dérivés de la même famille, offrant la même particularité. →

On a vu dans l'article précédent que pour remplir tout l'espace 3D, un solide devait contenir l'équivalent du volume d'un cube ou de plusieurs cubes. De plus nous avions également montré qu'un cube d'arête *a* se divisait en un tétraèdre et une pyramide à base carrée avec des faces triangulaires équilatérales dont les arêtes sont de longueur $a\sqrt{2}$. En outre, cette condition est nécessaire mais pas suffisante.

Examinons une autre découpe du cube basée cette fois sur les 4 diagonales passant par le centre du cube. Le volume du cube se répartit en 6 pyramides égales à base carrée.

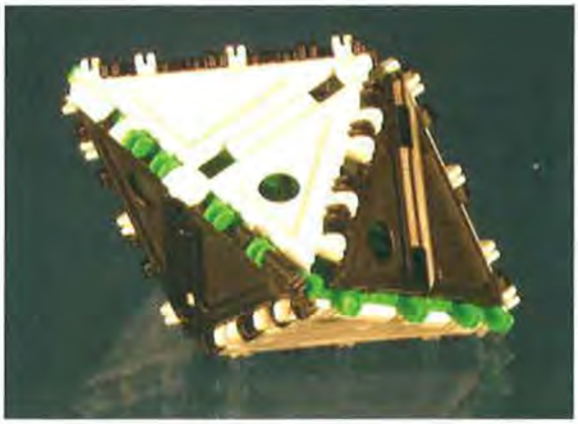




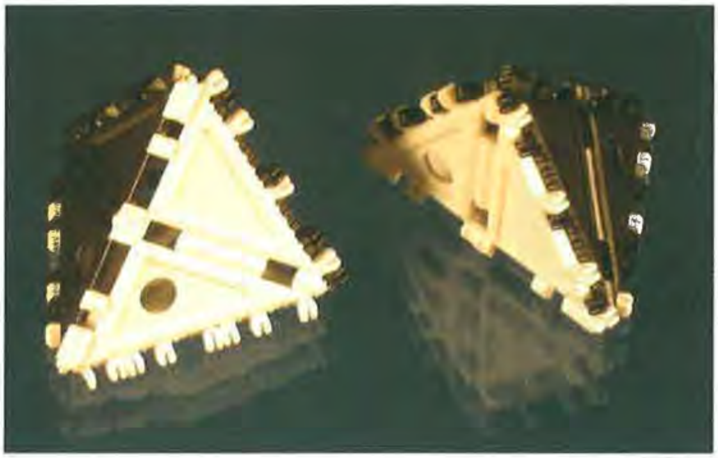


Si maintenant nous collons ces 6 pyramides sur les faces extérieures d'un second cube, nous obtenons un solide connu sous le nom de dodécaèdre rhombique. Ses faces sont formées de 12 losanges identiques de rapport de diagonales $\sqrt{2}/1$.
Le solide ainsi obtenu a donc un volume double de celui du cube.

Le dodécaèdre rhombique est par construction un solide empilable sans vides. Nous voyons aussi que ce solide, par construction se divise en 6 morceaux identiques. Ces 6 solides sont des octaèdres dont les faces sont des triangles isocèles de longueurs de côtés respectives $a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a. Ces solides octaédriques remplissent aussi tout l'espace.



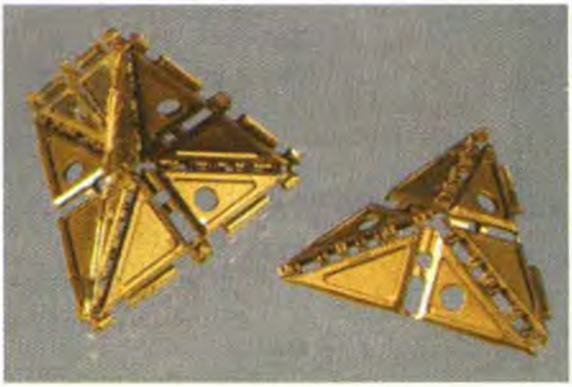
De plus ce solide octaédrique peut à son tour être coupé en 4 tétraèdres identiques présentant chacun 4 faces isocèles identiques de côtés $a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a. Les faces forment entre elles des angles respectifs de 60° et 90° sur le tétraèdre.



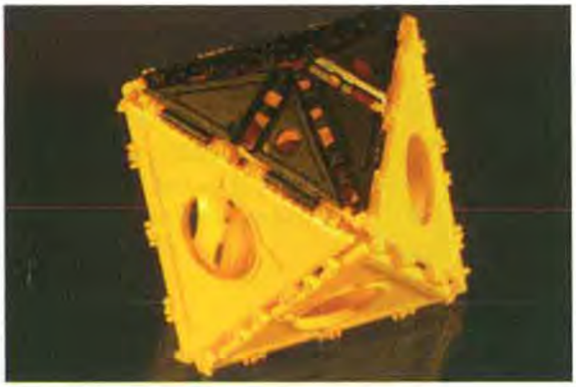
A son tour ce dernier solide tétraédrique remplit par construction tout l'espace. Il est à remarquer que les faces des losanges du dodécaèdre rhombique (constitué de 24 de ces tétraèdres) sont formées de 2 de ces triangles isocèles : $a\sqrt{3}/2$; $a\sqrt{3}/2$; a.

REMARQUE :

Une autre manière d'obtenir le dodécaèdre rhombique est de rapporter 1/4 de tétraèdre régulier (formant un tétraèdre «aplati») sur chacune des faces d'un octaèdre régulier d'arête $a\sqrt{2}$.

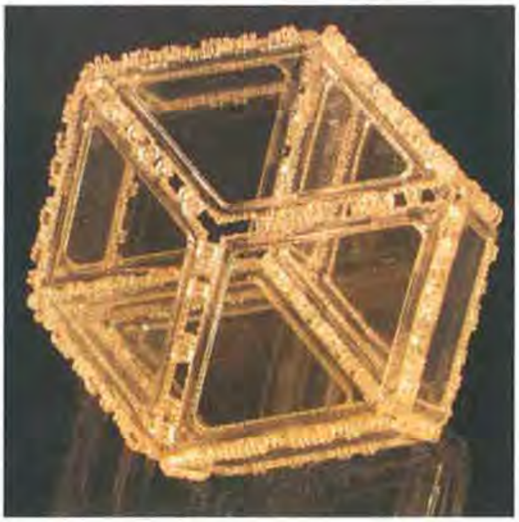


Tétraèdre régulier divisé en 4 tétraèdres «aplatis» dont l'un de ceux-ci se trouve sur la droite de la figure.



Tétraèdre «aplati» posé sur une des faces d'un octaèdre régulier ébauchant les faces du dodécaèdre rhombique. On en a besoin de 8, donc il faut 2 tétraèdres pour un octaèdre. (voir article du numéro 211 de *Math-Ecole*).

JEUX DE SOLIDES BASÉS SUR LE DODÉCAÈDRE RHOMBIQUE



vue de dessus
vue de dessous

vue à 54.736

vue Nord
vue Sud
vue Est
vue Ouest

Le dodécaèdre rhombique a toutes ses arêtes de même longueur. De plus, ses 14 sommets sont situés sur 2 sphères concentriques de rayons respectifs $a\sqrt{3}/2$ et a.

Les sommets S_{10}-S_{14} sont ceux des coordonnées Z négatives

On considère 3 plans yz de coordonnées x :

$x = -\ a\sqrt{2}/2$ pour S_2; S_6; S_9; S_{10}
$x = \ 0$ pour S_1; S_3; S_5; S_{11}; S_{13}; S_{14}
$x = +\ a\sqrt{2}/2$ pour S_4; S_7; S_8; S_{12}

On considère 3 plans xz de coordonnées y :

$y = -\ a\sqrt{2}/2$ pour S_5; S_8; S_9; S_{13}
$y = \ 0$ pour S_1; S_2; S_4; S_{10}; S_{12}; S_{14}
$y = +\ a\sqrt{2}/2$ pour S_3; S_6; S_7; S_{11}

On considère 5 plans xy de coordonnées z :

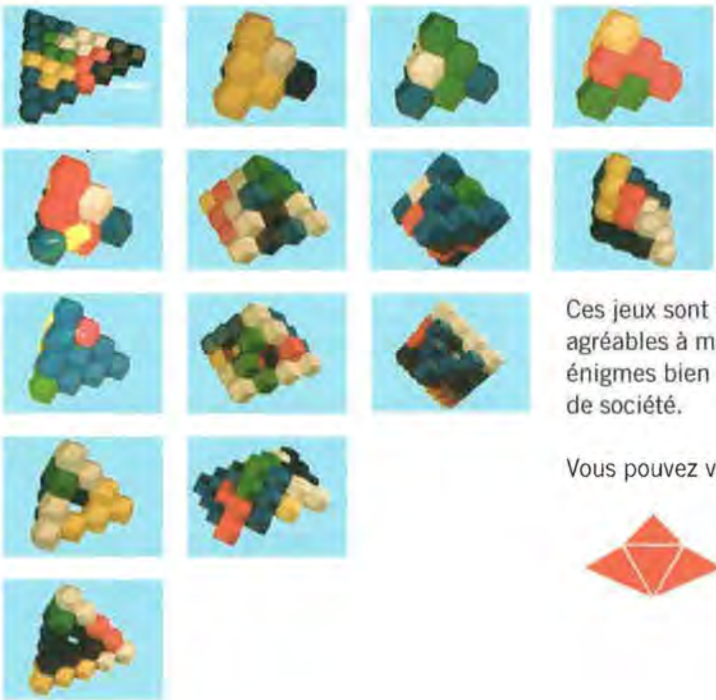
$z = -\ a$ pour S_{14}
$z = -\ a/2$ pour S_{10} à S_{13}
$z = \ 0$ pour S_6 à S_9
$z = +\ a/2$ pour $S_2$1 à S_5
$z = +\ a$ pour S_1j

En faisant pivoter doucement le dodécaèdre rhombique sur l'un de ses axes de symétrie, on découvre successivement 3 directions d'empilement permettant :

1. Le montage de pyramides à base carrée :  à 0°
2. Le montage de pyramides à base rectangulaire :  à 90°
3. Le montage de tétraèdres :  à 54.736° ou de pyramides à base rhombique.

Nous avons développé un jeu TRIDIX, véritable TANGRAM à 3D, qui illustre toutes les possibilités d'assemblage. Il est composé de 9 pièces formées chacune de 2 à 5 dodécaèdres rhombiques liés rigidement.

Voici quelques exemples d'assemblage du jeu TRIDIX :
Autres jeux basés sur les propriétés du dodécaèdre rhombique :



Ces jeux sont en plastique injecté très agréables à manipuler et posant des énigmes bien illustrées et des règles de jeux de société.

Vous pouvez vous le procurer auprès de

trigam
CH-Neuchâtel CH,
tél. +41 32 721 28 38
fax. +41 32 721 28 46
www.trigam.ch
info@trigam.ch