

FRACTIONS ET DÉCIMAUX

APPROCHES PÉDAGOGIQUES

François Boule

Fractions et décimaux constituent un domaine dont l'abord (définitions, calculs) est réputé difficile, et que les programmes scolaires français étendent du cycle III au collège. On ne s'attardera pas ici sur l'objet mathématique lui-même (définition des rationnels). Il s'agit plutôt de comparer quelques présentations diverses, plus ou moins anciennes et d'en signaler les avantages et les inconvénients, aucune ne semblant, malgré les nombreuses recherches didactiques des vingt dernières années, éviter tous les obstacles et mériter une préférence définitive.

Une distinction quasi-rituelle (et inscrite jadis dans les programmes de 1945) consiste à séparer les « fractions simples » des autres ; les premières sont celles qui portent un nom particulier en français (une moitié, un demi, un tiers, un quart) et qui par conséquent appartiennent au vocabulaire et à l'expérience courante des enfants. Une représentation classique associée à ces fractions de l'unité un secteur angulaire :

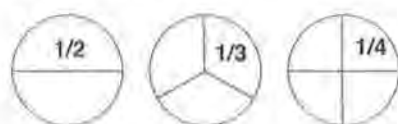


fig. 1

On reviendra plus tard sur les inconvénients de cette représentation. Remarquons au passage plusieurs caractéristiques : le numérateur est 1 ; elles sont inférieures à l'unité ; elles sont classiquement représentées par une barre de fraction horizontale ou oblique (comme ci-dessus).

Une approche historiquement ancienne (antérieure à 1970) consiste à définir une fraction

comme une division à faire : « $17/3 =$ diviser 17 par 3 » ; l'écriture et la technique de la division étant supposées connues, cette définition permet de disposer aussitôt d'un décimal aussi proche que l'on veut, en poursuivant la division. Cette définition, qui a l'avantage de présenter parallèlement fraction et encadrement décimal, ne donne pas un statut de nombre aux fractions, ce qui rend vide de sens leur addition (on ne peut « additionner » des procédures) ou leur produit. La comparaison est rendue difficile, voire faussée puisqu'on ne peut comparer par exemple $3/17$ et $2/11$ sans passer par une approximation décimale. La maîtrise très incertaine, par les élèves, de la division avec quotient décimal rend cette définition, non seulement insatisfaisante, mais malaisée. On pourrait penser que l'usage des calculettes est de nature à faciliter cette approche. Il n'en est rien puisque la calculette rend un résultat tronqué. La définition, qui confondrait alors $2/3$ et 0.666666 , en devient fautive.

Une approche de nature voisine, et qui a eu un succès certain dans les années 70 est fondée sur l'usage des « opérateurs ». Un opérateur est défini par la donnée de deux listes (fig. 2)

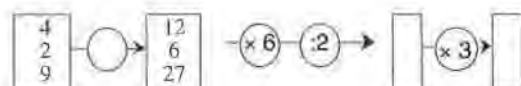


fig. 2

fig. 3

fig. 4

Ainsi défini fonctionnellement, un opérateur peut être étudié indépendamment des listes (fig. 3), et notamment être intégré dans des chaînes (fig. 4). Ces chaînes permettent commutations, associations et réductions. Ainsi les différentes chaînes ci-dessous sont dites « équivalentes ».

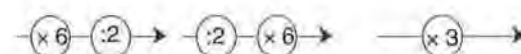


fig. 5

Une fraction est définie comme une chaîne composée d'une multiplication et d'une division (fig. 6).

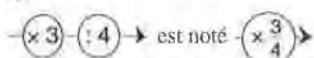


fig. 6

Et l'on convient que $(:p) \rightarrow$ c'est $(\times \frac{1}{p}) \rightarrow$

Cette définition peut sembler relever d'un certain arbitraire. Mais elle facilite beaucoup l'étude de certaines propriétés et particulièrement l'usage du calcul multiplicatif. En effet, moyennant un léger flou initial (qui risque peu de froisser les élèves), on accepte volontiers la commutativité et l'associativité des opérateurs. En revanche elle a deux inconvénients majeurs. D'une part le *nombre 4* et

l'*opérateur x 4* sont, par définition, des objets de nature différente. On peut trouver assez naturel de désigner par *x 5* l'opérateur qui appliqué à 1 produit le nombre 5. Mais l'on crée ainsi une confusion, gravement indigeste lorsqu'il faut *admettre* que *x 1/2* opérant sur le nombre 1 produit le **nombre** 1/2. D'autre part, comme précédemment, la comparaison et surtout l'addition d'opérateurs sont dépourvues de sens.

Ces approches peuvent être appelées « fonctionnelles » puisqu'elles privilégient une propriété algébrique.

Une approche d'usage actuel offre quelque parenté avec celle-là: la situation des **automates**. Un automate, partant du zéro d'une graduation, arrive au point 7 en trois sauts (fig. 7).

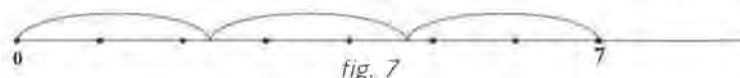


fig. 7

Un saut est un *déplacement*, mais on lui associe implicitement la longueur du saut, qui est repérée par un nombre. L'avantage de cette définition par rapport à la précédente est d'associer de manière naturelle des nombres intermédiaires, en tant que repères sur un axe. Mais on retrouve le même arbitraire formel lorsque l'on désigne ce saut par *la fraction 7/3*.

Le versant « transformations » du contexte des sauts permet d'étudier aisément les équivalences, c'est-à-dire la « simplification » des fractions, de laquelle découlent les procédures de calcul. En revanche la signification des opérations somme et produit réclame, comme on va le voir, de recourir au versant « mesure ». Les approches suivantes privilégient toutes une relation avec la mesure.

La première, d'usage encore très répandu, consiste à utiliser la représentation proposée en fig. 1. Mais elle a un grave inconvénient: elle permet difficilement d'aborder des fractions supérieures à l'unité.

En effet on n'a pas de mal à accepter que la partie grisée (fig. 8) représente un quart, même en l'absence du disque de référence.



fig. 8



fig. 9



En revanche si la figure de référence n'est pas un disque (fig. 9) la partie grisée n'a plus de sens en l'absence de l'unité de référence. Ce qui est pire encore, c'est la représentation d'une fraction supérieure à l'unité. La figure 10 représente-t-elle 5/4 ou bien 5/8 ?

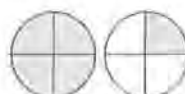


fig. 10

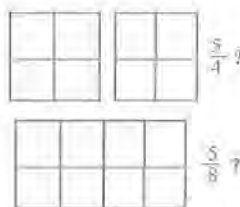


fig. 11

Une dernière approche permet de définir fractions et décimaux par un **système de mesure**.

On considère un objet L à mesurer et une unité de longueur U , subdivisée en dix sous-unités V :



fig. 12

ficultés se présentent cependant, dont l'une est de caractère théorique.
La première est due à la *confusion de la longueur* et du *repère* de l'extrémité (qui est un point):

La seconde difficulté, plus théorique, n'est certainement pas un obstacle pédagogique: il est nécessaire *d'admettre* que la formule donnant l'aire d'un rectangle, que l'on peut établir pour des côtés dont les mesures sont des entiers est encore valable pour des côtés dont les mesures ne sont pas entières. Cette définition a l'intérêt majeur de lier fermement les décimaux aux fractions et permet de ramener les comparaisons et tous les calculs sur des décimaux à des calculs sur des entiers par translation de l'unité principale:

Si, au lieu d'un partage en dix parties, on utilise un partage en trois, on crée une subdivision en tiers.

Elle présente un avantage considérable qui est de permettre rapidement des comparaisons empiriques, en constituant diverses graduations, et de donner une interprétation très accessible de l'addition et même (quoique moins simple) de la multiplication. Deux dif-

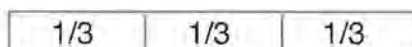


fig. 13

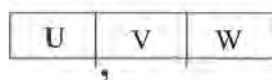


fig. 14

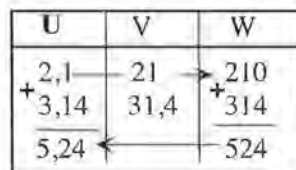


Fig. 15

Ce système fonctionne bien tant que l'on conserve la base dix, c'est-à-dire les *décimaux et fractions décimales*. La définition de $2/3$ comme « nombre à virgule » obligerait à recourir à la base trois, ce qui n'est pas souhaitable puisque les bases autres que dix n'ont aucun usage au-delà du CP. Mais ce système a l'avantage d'offrir un recours simple et sûr en cas de difficulté, notamment concernant la comparaison et l'ordre et en particulier dans le cas de l'erreur classique qui consiste à confondre a/b avec le couple (a, b) . Mais, pour l'addition, il oblige à un détour par le tableau ci-dessus, plus

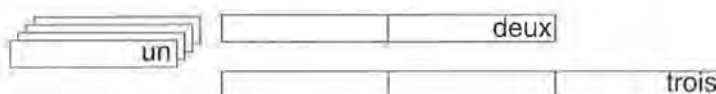


fig. 16

Ceci permet de graduer un axe.



fig. 17

Pour améliorer la précision d'une mesure, on partage l'unité (éventuellement les autres bandes).



fig. 18

On a plié la première bande (unité) en deux, on obtient des *demis*. La notation chiffrée conventionnelle est une fraction, dont le numérateur représente l'objet partagé, et le dénominateur le nombre de parties. On a plié la seconde bande [2] en trois parties, on obtient des tiers de 2. Au passage, on obtient un premier résultat important: « il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité ».

compliqué encore lorsqu'il s'agit de la multiplication.

Un moyen d'éviter le recours à un tel tableau et de maintenir l'entrée principale par les fractions, consiste à construire des échelles superposables. Les échelles ont pour but de repérer avec précision croissante des longueurs à mesurer.

Pendant cette phase, on laisse bien sûr de côté les unités et les instruments de mesure habituels. On se donne une unité, par exemple la largeur d'une feuille de papier A4 (il est facile d'en obtenir par pliage un grand nombre d'exemplaires de couleurs variées).

En reportant le long de l'axe précédent, on obtient de nouvelles échelles.

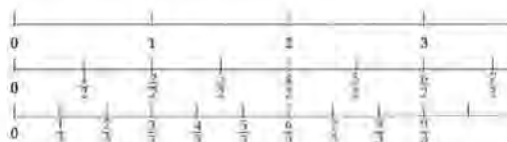


fig. 19

Les coïncidences entre ces échelles permettent d'écrire des égalités (et aussi des inégalités).

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1 \quad \frac{4}{3} < \frac{3}{2} < \frac{5}{3}$$

Cette méthode n'échappe pas à la difficulté signalée plus haut, confusion entre longueur et repère.

Mais elle a l'avantage de s'appuyer sur une mesure, de favoriser le repérage d'une fraction par rapport à d'autres, de ne pas favoriser les fractions inférieures à l'unité, de fournir des moyens d'établir des procédures de calcul, en introduisant tôt une pluralité d'écriture.