EVALUATION : NOMBRES CROISÉS

Michel Brêchet

De nombreuses situations mathématiques exigent des élèves un degré d'engagement élevé. Parmi elles, les « nombres croisés » occupent une place de choix. En effet, pour traiter avec succès l'information à disposition et en conséquence compléter – même partiellement – une grille donnée, il faut mobiliser des opérations intellectuelles comme l'anticipation, l'analyse, la déduction et la synthèse, dont l'importance a toujours été relevée par les plans d'études, en particulier par le PECARO[1], dans les *Capacités transversales* et dans le domaine de formation *Mathématiques et sciences de la nature* notamment. Les «nombres croisés» constituent ainsi un beau sujet pour évaluer ces compétences fondamentales, même si cette tâche n'est pas aisée. Souvent, dans un compte rendu rédigé par un élève, leur mise en œuvre n'apparaît pas explicitement. Pour l'enseignant, il s'agit alors si possible de les mettre à jour, à partir de l'examen d'une démarche écrite ou d'un résultat, tout en ne perdant pas de vue que seul un entretien individuel avec l'élève permettrait d'identifier avec certitude son cheminement intellectuel. Dans une telle pratique d'évaluation, la tentative d'établir une photographie des capacités des élèves à se «dépatouiller» dans une situation complexe prime sur la logique des contrôles de connaissances bien précises, même si ceux-ci restent incontournables. La cohérence entre les situations d'apprentissage quotidiennes, les objectifs prioritaires des plans d'études et l'évaluation est dès lors renforcée.

Un « nombres croisés »... bien ficelé !

Au début janvier 2004, une quarantaine d'élèves jurassiens de 7^{e} année, niveaux A et B[2], ont tenté individuellement de compléter la grille présentée ci-après. Ils avaient déjà été confrontés à trois ou quatre situations de ce type (notamment à celles du domaine *Nombres et opérations* des moyens d'enseignement romand *Mathématiques 7-8-9*), chacune d'elles ayant été suivie d'une comparaison des diverses méthodes susceptibles de conduire au succès. En outre, les élève avaient été invités à noter systématiquement les nombres pouvant

1 Le PECARO (plan d'études cadre romand) est actuellement en consultation en Suisse romande.

2 Dans le canton du Jura, un troisième niveau regroupe les 25 % des élèves ayant le plus de difficultés en mathématiques.

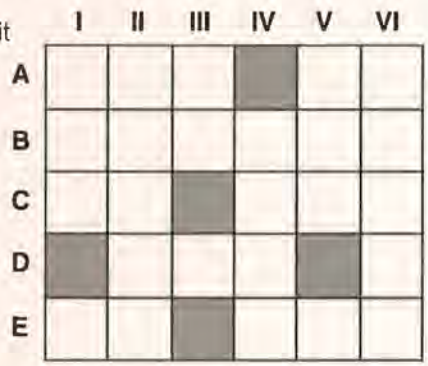
Horizontalement

A. Puissance de 3 – Carré d'un nombre premier
B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres
C. Multiple commun de 2 et de 3 – La somme de ses chiffres est 5
D. Carré parfait
E. Diviseur de 64 – Le produit de ses chiffres est un cube parfait

Verticalement

I. Multiple de 25
II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent)
III. Produit de deux nombres impairs consécutifs
IV. Cube parfait
V. Nombre premier
VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs

Note : Aucun nombre ne commence par zéro.



correspondre à chaque définition donnée. Le terrain avait donc été débroussaillé et la surprise n'était pas au rendez-vous. Sans ce travail préalable, le vocabulaire et la méthodologie auraient certainement constitués des écueils de taille pour bon nombre d'entre eux.

Pour accomplir leur tâche (voir la page précédente), les élèves avaient 45 minutes à disposition. Ils ont utilisé plusieurs grilles pour leurs essais, leur calculatrice de poche et l'*Aide-mémoire* de la collection susmentionnée.
D'autre part, les critères d'évaluation leur ont été communiqués.

Remarque: Pour une perception optimale des enjeux liés à la résolution de ce « nombres croisés », il est préférable que le lecteur l'examine dans un premier temps sans aide extérieure, et identifie par exemple les obstacles à franchir ou les indices permettant une progression rapide. La lecture de la solution et l'analyse des travaux des élèves en seront d'autant plus limpides.

Solution

Voici un cheminement parmi d'autres qui mène au but:

A_1. Seuls $3^5 = 243$ et $3^6 = 729$ peuvent convenir.

I. Quatre possibilités à ce stade: 225, 275, 725 et 775.

C_1. Son premier chiffre étant 5, le nombre cherché est 54.

II. Un seul nombre possible en regard de ce qui précède: 23456. (Cette définition mériterait d'être améliorée, car elle ne contient pas l'information selon laquelle les chiffres doivent former une suite croissante ou décroissante. Ainsi, par exemple, on pourrait admettre que le nombre 24365 est formé de chiffres consécutifs. Aucun élève n'a toutefois adopté ce point de vue.)

III. Son premier chiffre étant 9, le deuxième est 9 également ($99 = 9 \cdot 11$).

La définition **B** conduisant à connaître les deux derniers chiffres du nombre en question, la situation est dès lors la suivante:

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9			
B		3	9		3	9
C	5	4				
D		5				
E		6				

D. Deux choix: $23^2 = 529$ ou $24^2 = 576$.

IV. Son premier chiffre est 2 ou 7 (voir **I**) et son troisième est 6 ou 9 (voir **D**). En conséquence, ce nombre est $13^3 = 2197$.

E_1. 16 est le seul diviseur de 64 qui se termine par 6.

On en arrive à:

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9			
B	2	3	9	2	3	9
C	5	4		1		
D		5	2	9		
E	1	6		7		

A_2. $25 = 5^2$ et $49 = 7^2$ conviennent. Mais selon **VI**, on peut éliminer 49.

V. 233 et 239 sont des nombres premiers, mais la définition **C_2** conduit à conserver 233.

C_2. C'est 131, car $1 + 3 + 1 = 5$

E_2. Le nombre cherché est 777 ($7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$) qui est un cube parfait. Il n'y a pas d'autres possibilités.

Finalement, l'unique solution est:

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9		2	5
B	2	3	9	2	3	9
C	5	4		1	3	1
D		5	2	9		3
E	1	6		7	7	7

Ce « nombres croisés » a été créé de sorte que sa résolution nécessite, à maintes reprises, la formulation de conjectures et la prise en compte simultanée de plusieurs définitions. Dans la délicate optique d'évaluer des compétences liées à la démarche scientifique, il était important d'éviter que des élèves puissent accéder à la solution sans un réel engagement, par exemple en identifiant une « entrée » privilégiée et en progressant ensuite pas à pas selon un cheminement évident. Cette situation est donc intentionnellement complexe, du moins pour des élèves de 7e année. Avec le recul, elle convient bien pour des classes de niveau A (40 % des élèves). Aux élèves ayant plus de difficultés, il serait préférable de la soumettre au cours du degré 8, voire du degré 9.

Compétences en jeu

Elles sont nombreuses et il serait vain de vouloir toutes les décrire. En voici quelques-unes :

- *Gérer simultanément plusieurs paramètres, déduire une information d'une autre*: pour progresser, il faut plus d'une fois tenir compte de deux définitions ou plus. Par exemple : $\mathbf{A_1} = 243 \Rightarrow \mathbf{I} = 225$ ou $275 \Rightarrow \mathbf{C} = 54$. D'où l'impossibilité de trouver un nombre satisfaisant à l'énoncé **II**, car il comprendrait le chiffre 4 en première et troisième position. La gestion simultanée de plusieurs informations est souvent source d'une surcharge de la mémoire de travail. En conséquence, sans un minimum de rigueur et d'organisation dans leur démarche et leurs notations, beaucoup d'élèves seront rapidement perdus dans cette jungle de chiffres enchevêtrés.
- *Chercher des indices pertinents:* certaines définitions conduisent à un petit nombre de possibilités ($\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{E_1}$...), alors que d'autres sont inexploitables dans un premier temps (**II**, $\mathbf{C_2}$, **VI**...). Malgré tout, quelques élèves débutent par le traitement de l'une de ces dernières, ce qui les mène rapidement dans une impasse, tant les cas à étudier sont nombreux. Mais encore faut-il qu'ils s'en rendent compte et qu'ils ajustent leur méthode !
- *Envisager tous les nombres pouvant répondre à une définition donnée*: $\mathbf{A_1}$ peut être 243 ou 729, $\mathbf{A_2}$ peut être 25 ou 49... Bien des élèves se contentent trop rapidement d'un seul nombre répondant à une définition donnée, et ceci avec un haut degré de certitude : « 243 est une puissance de trois, donc $\mathbf{A_1} = 243$, j'en suis sûr ! » Comme si à chaque question, il n'y avait qu'une seule réponse possible !
- *Faire des essais «pour voir», effectuer des conjectures, les écrire dans les grilles à disposition ou sous forme de liste, adapter des essais successifs*: à plusieurs stades, on est dans l'incertitude et seules quelques tentatives permettent de s'en sortir. Par exemple, que se passe-t-il si $\mathbf{A_1} = 243$? Ou si $\mathbf{A_1} = 729$? Ou si $\mathbf{A_1} = 243$ et $\mathbf{I} = 225$? La gestion de l'incertitude pose de grandes difficultés à certains élèves, qui n'écrivent que ce dont ils sont sûrs. D'où de rapides blocages dans ce type d'activité. Il arrive par exemple que des élèves trouvent les deux puissances de 3 à trois chiffres (243 et 729), et ne s'appuient pas sur ces deux résultats pour progresser, car ils ne savent pas lequel des deux convient !
- *Distinguer les résultats certains des autres*: tous les résultats intermédiaires trouvés n'ont pas le même statut. A un moment donné, il s'agit de prendre du recul par rapport au travail effectué, notamment pour différencier les résultats justes des autres, hypothétiques.
- *Connaître la terminologie usuelle, ou utiliser adéquatement l'aide-mémoire*: une puissance de trois (3^n) n'est pas un cube parfait (n^3), un produit de deux nombres impairs consécutifs n'est pas forcément un nombre formé de deux chiffres impairs consécutifs. L'apprentissage et la compréhension de la langue mathématique sont bien difficiles ! Cette dernière compétence étant liée à la communication de données, elle ne s'inscrit donc pas dans le même registre que les précédentes, qui relèvent de démarches de pensée.

Evaluation de trois travaux d'élèves de 7e

L'enseignant pourrait être tenté de retracer le plus fidèlement possible le(s) parcours suivi(s) par chaque élève. Mais cette entreprise, aussi louable soit-elle, montre assez vite ses limites. Si certaines étapes sont relativement transparentes, d'autres restent obscures à la lecture des grilles. La (les) méthodes(s) utilisée(s) sont ainsi la plupart du temps enrobée(s) d'un voile translucide et seuls des entretiens personnalisés permettraient à l'enseignant d'y voir tout à fait clair. Ce constat étant posé, voici un scénario pour évaluer les travaux d'élèves :

- 1 point par définition traitée exhaustivement (score maximal : 14 points) ;
- 1/2 point par définition traitée partiellement (par exemple, selon la situation, si l'élève n'a pris en compte qu'une partie de l'ensemble des nombres pouvant convenir) ;
- 0 point par définition non traitée. →

Une telle approche incite fortement les élèves à écrire les résultats de leurs recherches, dans les grilles à disposition ou sous forme de listes. Elle valorise ainsi davantage un processus – le cheminement suivi et les démarches mises en œuvre – qu'un produit fini – la grille complétée. Mais elle contraint l'enseignant à s'interroger sur les procédures des élèves, avec toutes les incertitudes que cela engendre, d'où une de ses faiblesses. Faut-il pour autant renoncer à évaluer de la sorte et se contenter par exemple d'attribuer 1 point par nombre trouvé, sans autre questionnement ? Le débat est ouvert et les réactions sont les bienvenues. Une dernière chose. L'évaluation proposée ici paraît à première vue très gourmande en temps. En réalité, il faut compter une dizaine de minutes pour chacun des trois ou quatre premiers travaux. En raison des similarités qui apparaissent, la correction des suivants est plus rapide. Pour une classe de 20 élèves, deux heures suffisent généralement.

Travail 1

erreur

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	5	■	1	1
B	2	3	7	2	3	7
C	5	4	■	1	1	
D	■	5	2	9	■	7
E	1	6	■	7		9

erreur

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	6	1
B	2	3	7		0	9
C	5	4	■		1	3
D	■	5	7	6	■	7
E	1	6	■			5

erreur

	I	II	III	IV	V	VI
A		2		■	1	6
B		3				
C		4	■			
D	■	5			■	
E	1	6	■			

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	1	
B	2	3	7	2	3	7
C		4	■		1	
D	■	5			■	
E	1	6	■			

A. Puissance de 3 : *1/2 point*, car 243 n'a pas été testé.
Carré d'un nombre premier : *0 point.*

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *1 point, pour la compréhension et la prise en compte de la définition.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1 point, car 54 est le seul nombre satisfaisant aux conditions de l'énoncé et dont le chiffre des dizaines est 5. Au passage, on remarquera* *ici une des limites de cette façon de corriger. L'élève pourrait très bien écrire successivement le nombre 729 (**A_1**), un multiple de 25 (**I**) et le nombre 23456 (**II**). Il obtiendrait ainsi le nombre 54 en **C_1**. Mais s'interrogera-t-il sur la validité de ce résultat ? Si oui, le point est mérité, si non...*

La somme de ses chiffres est 5 : *0 point.*

D. Carré parfait : *1 point, pour l'examen des nombres 529 et 576.*

E. Diviseur de 64 : *1 point, car 16 est le seul diviseur de 64 dont le chiffre des unités est 6. Là encore, le point est attribué sur la base de l'hypothèse selon laquelle l'élève avait écrit auparavant le nombre 23456 (**II**). Mais ce n'est pas certain. Il aurait pu commencer par la définition **E**, sans envisager les nombres 32 et 64.*

Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1/2 point, car 175 et 775 n'ont pas été testés.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *0 point.*

IV. Cube parfait : *1 point, avec 2 comme premier chiffre (selon **I**) et 6 ou 9 comme troisième chiffre (selon **D**), il n'y a que 2197.*

V. Nombre premier : *1/2 point, il y en a d'autres à examiner.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient donc 8,5 points sur 14.

Travail 2

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9		1	
B	7			2	0	
C	5	4		1	3	1
D		1	2	8		
E				7		

curseur

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9		8	5
B	7	3		2	8	3
C	5	4		1	3	1
D		5		8		8
E	1	6		7		7

ereur

	I	II	III	IV	V	VI
A	2	4	3		8	5
B	2	3	8	2	8	3
C	5	2		1	3	1
D		1	2	8		9
E	1	0		7		7

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9			
B	7			6		
C	5			5		
D		2	5	6		
E				1		

erreur

A. Puissance de 3 : *1 point, pour avoir examiné les incidences de 243 et 729.*

Carré d'un nombre premier : *0 point.*

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *0 point.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1/2 point, car 52 n'est pas juste... mais cette correction est un peu sévère !*

La somme de ses chiffres est 5 : *1/2 point, 131 est bien la réponse correcte, mais avec 1 comme chiffre des centaines (voir **IV**), 113 convient également. L'élève méritait peut-être ici 1 point, notamment s'il avait supposé que le nombre **B** se termine par 3.*

D. Carré parfait : *0 point. Il y a ici confusion avec une puissance de 2.*

E. Diviseur de 64 : *1/2 point, car 10 ne convient pas.*
Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1 point, pour avoir testé deux possibilités.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *0 point.* →

IV. Cube parfait : *0 point, confusion avec une puissance de 3.*

V. Nombre premier : *1/2 point, 103 et 883 sont bien des nombres premiers.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient 6 points sur 14.

Travail 3

ERREUR

	I	II	III	IV	V	VI
A	2	4	3	■	2	5
B		5	5			
C		6	■			
D	■	7			■	
E		8	■			

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	2	5
B	2	3	9	2	3	9
C	5	4	■	1	3	1
D	■	5	2	9	■	3
E	1	6	■			7

ERREUR

	I	II	III	IV	V	VI
A	2	4	3	■	4	9
B		5	5			
C		6	■			
D	■	7			■	
E		8	■			

ERREUR

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	4	9
B	2	3	9		0	3
C	5	4	■	3	1	1
D	■	5	7	6	■	
E	1	6	■			

ERREUR

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	2	5
B	2	3	9		1	
C	5	4	■	1	1	3
D	■	5	2	9	■	
E	1	6	■			

	I	II	III	IV	V	VI
A	7	2	9	■	4	9
B	7	3	9	3	9	7
C	5	4	■	8	1	1
D	■	5	2	7	■	
E	1	6	■	5		

A. Puissance de 3 : *1 point, car 243 et 729 sont les deux solutions possibles.*
Carré d'un nombre premier : *1 point, il n'y a pas d'autres nombres à examiner.*

B. Le nombre formé par ses trois premiers chiffres est égal à celui formé par ses trois derniers chiffres : *1/2 point, cette information n'est exploitée qu'une seule fois correctement.*

C. Multiple commun de 2 et de 3 : *1 point. On devine que l'élève a testé 36 et 66. Il s'est probablement rendu compte que ni 3 et ni 6 ne pouvaient être le dernier chiffre d'un multiple de 25* **(I)**.

La somme de ses chiffres est 5 : *1 point, l'information est bien exploitée.*

D. Carré parfait : *1 point pour les nombres 529 et 576.*

E. Diviseur de 64 : *1 point.*
Le produit de ses chiffres est un cube parfait : *0 point.*

I. Multiple de 25 : *1 point, pour avoir testé 725 et 775.*

II. Nombre formé de chiffres consécutifs (qui se suivent) : *1 point.*

III. Produit de deux nombres impairs consécutifs : *1 point, car 35 et 99 conviennent.*

IV. Cube parfait : *1/2 point, pour $15^3 = 3375$. Dommage que l'élève n'a pas vu, dans la grille en haut à droite, que 2197 convenait.*

V. Nombre premier : *1 point, les quatre nombres présents sont premiers.*

VI. Nombre formé de tous les chiffres impairs : *1 point pour la prise en compte de cette définition.*

L'élève obtient 12 points sur 14.

A ce stade, la lancinante question de la mise des notes (de 1 à 6 dans notre canton) refait inévitablement surface. Comment, en effet, déterminer la réussite dans une telle situation, et dans toute autre d'ailleurs ? Etant donné la difficulté de l'activité, j'ai estimé qu'un élève qui obtient 12 points mérite la note maximale (6), le seuil de suffisance (4) étant atteint avec 8 points.

Un problème à tiroirs

Ce « nombres croisés » en est bien un, chacun des nombres à trouver dépendant de plusieurs autres. D'où la légitime interrogation : « Un élève qui confond deux définitions ou qui bute sur l'une d'elles n'est-il pas trop pénalisé ? » Oui et non. Les définitions **B** et **II** ont une importance toute particulière. Ne pas les comprendre conduit inévitablement à de sérieuses difficultés. Un jugement plus nuancé s'impose pour les autres. De multiples cas de figure peuvent se présenter. Analysons-en brièvement trois :

- Hélène confond «puissance de trois» et « cube parfait ». Elle débute avec $\mathbf{A_1} = 125 = 5^3$. Elle trouve ensuite **I**, **II**, $\mathbf{C_1}$ et **E**, puis est bloquée par **III**, car il n'y a pas de produit de deux nombres impairs consécutifs dont le premier chiffre est 5. Si elle se trompe et cherche un nombre formé de deux chiffres impairs consécutifs, elle peut continuer. Dans le cas contraire, elle doit étudier les incidences d'un autre nombre en $\mathbf{A_1}$.
  Avec $216 = 6^3$, elle sera bloquée en $\mathbf{C_1}$ (il n'existe aucun multiple commun de 2 et de 3 qui se termine par 3), mais pas en **III** ($63 = 7 \cdot 9$ irait).
  Avec $343 = 7^3$, la route s'arrêtera en $\mathbf{E_1}$ (le dernier chiffre d'un diviseur de 64 ne peut être 0 ou 8), avec $512 = 8^3$, en $\mathbf{C_1}$ à nouveau. Finalement, avec $729 = 9^3$, la voie est ouverte, mais sera obstruée avec **IV** et **D**, toujours dans l'hypothétique confusion entre les expressions « puissance de trois » et « cube parfait » : si $\mathbf{IV} = 2187 = 3^7$, alors il n'y a pas de possibilité pour **D**.
- André cherche un multiple de trois en $\mathbf{A_1}$. Avec 111, il sera bloqué en $\mathbf{C_1}$, avec 123, il pourra aller très loin. D'une manière générale, des nombres dont le deuxième chiffre est 2 (**II** = 23456) ou 6 (**II** = 65432) sont porteurs d'espoir.
- Pauline n'envisage que les multiples de 75 qui se termine par 75. Elle pourra poursuivre sa route jusqu'à **IV**, car aucun cube parfait de quatre chiffres ne commence par 7.

Ces analyses sont certes théoriques et réductrices. Elles laissent cependant entrevoir que, malgré certaines erreurs, des progressions effectives sont possibles. Si c'était à refaire, pourquoi ne pas donner un « joker » à chaque élève ? Un coup de pouce de l'enseignant en quelque sorte. Par exemple sous la forme d'un conseil individualisé, pour aider l'élève à surmonter un obstacle important et lui permettre ainsi d'aller plus loin, en toute confiance. Cette pratique n'est pas très habituelle. Mais elle pourrait se justifier dans une telle activité. Affaire à suivre. (voir p. 46)