

« COIN MATHS »

François Jaquet

L'ESCALIER DES DIFFÉRENCES



L'escalier de gauche, de quatre étages, est construit ainsi :

Règle 1 : Chaque brique porte un nombre naturel qui est la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose.

Règle 2 : Tous les nombres de l'escalier sont différents.

Avec les mêmes règles, construisez des escaliers de trois étages, (comme celui de droite) en utilisant les nombres de 1 à 6.

Combien en trouverez-vous de différents ?

Les origines

Il est difficile de situer les origines de ce thème des différences successives et de sa version en « escaliers », qui doivent remonter aux temps où l'on s'est mis à s'intéresser aux mathématiques dites « récréatives », et, plus certainement, où l'on s'est mis à organiser des compétitions mathématiques. On en trouve de nombreuses variantes : dans le premier championnat de la FFJM en 1987, dans un concours par classes du Valais en 1992, dans le concours *Mathématiques 93*, dans une épreuve du Rallye mathématique romand de 1993 ; puis dans des brochures de jeux mathématiques, et enfin dans nos manuels scolaires.

Son intérêt mathématique est évident. Une variante de ce problème figure, entre autres, dans les colonnes de *Math-Ecole*, avec des développements pour les escaliers à 5 étages ou plus, dans les numéros 161, 163 et 165. À l'occasion du 4^e Salon des jeux et de la culture mathématiques à Paris, en 2003, il est apparu sous une forme nouvelle, dans la version ci-dessus, parmi une vingtaine de « manipulations » tirées de problèmes du RMT.

Et, depuis, il poursuit une carrière prometteuse, sous forme de six briques que des centaines et des centaines d'enfants – mais aussi d'adultes – ont essayé de disposer en « escaliers » selon les règles données, du Nord au Sud de l'Europe. Très récemment encore, dans le cadre d'une journée d'études organisée par le Centre de recherche et d'expérimentation sur l'enseignement des mathématiques (CRSM) de Cagliari - une trentaine de maîtres ont eu beaucoup de « plaisir à faire des mathématiques » (thème de la journée) sur cet escalier. C'est le succès de cette activité qui nous permet de le proposer maintenant pour un « coin mathématique ».

De l'activité « papier-crayon » à la « manipulation »

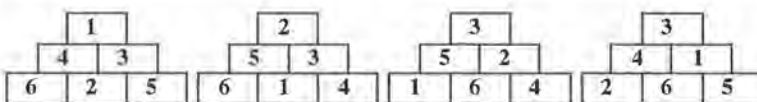
Le matériel est simple à réaliser : une dizaine d'ensembles de six « briques » (petits parallélépipèdes de bois de 2 x 2 x 4 cm dans le cas des « ateliers » du RMT) avec, pour chacune d'entre elles, l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 noté sur deux faces opposées. Il n'est pas nécessaire de réaliser la pyramide de gauche qui n'est là que pour illustrer la règle de construction.

On peut aussi travailler avec des petits cartons rectangulaires, dans le plan. On perd alors la lecture sur deux faces de l'escalier et l'exploitation des symétries qui en découle : deux solutions symétriques dans le plan représentent le même escalier, vu de part et d'autre de son plan vertical.

Le matériel permet des essais immédiats, avec rapidité, où la gomme est inutile en cas d'erreur. Par rapport à l'écriture, le gain de

temps est considérable, mais c'est surtout l'entrée dans le problème qui est facilitée. Le matériel évite encore les erreurs des nombres qui seraient écrits deux fois dans la recherche « papier-crayon ».

Les escaliers construits restent comme mémoire des solutions trouvées. Placés à proximité, ils permettent de vérifier qu'ils sont différents les uns des autres. Les quatre solutions sont ainsi clairement distinctes.



Évaluation

L'observation des enfants – ou adultes – au travail permet une visualisation directe des raisonnements qui guident la recherche et qui indiquent ainsi le niveau des procédures ou stratégies adoptées :

- il y a les essais au hasard, qui durent longtemps chez les jeunes enfants de 7 à 9 ans, où de nombreuses erreurs ou inattentions apparaissent en début de recherche (le nombre d'une brique n'est pas la différence des nombres des deux briques sur lesquelles elle repose) ;
- il y a le processus de contrôle systématique des différences, où, par exemple, l'élève prend deux briques, puis une troisième à placer sur les premières, qui respecte la règle de construction, (différence des deux premières), puis une quatrième, à placer à côté d'une des précédentes, avec recherche d'une cinquième convenable ... et retrait de la quatrième au cas où il n'y a plus de brique disponible... ;
- vient alors l'apparition de petits « théorèmes locaux », par exemple : *le « 6 » ne peut pas être ailleurs que dans la base*, sous-entendant que l'élève s'est rendu compte que 6 ne peut pas être une différence dans l'ensemble des six premiers nombres naturels ; ou, comme on l'a souvent observé : *le « 6 » et le « 3 » ne peuvent pas être placés l'un à côté de l'autre ou*

l'un sur l'autre, (car le nombre 3 apparaît deux fois dans la relation $6 - 3 = 3$), ce qui fait que l'enfant écarte systématiquement la brique « 3 » lorsqu'il a en main la brique « 6 », etc. ;

- apparaissent enfin les procédures de recherche systématique lorsqu'une solution est trouvée et qu'il s'agit d'en découvrir d'autres, en essayant par exemple toutes les dispositions où 1, puis 2, puis 3 sont au sommet (le 5 et le 6 étant exclus et le 4 se révélant rapidement impossible lui aussi) ; ou en essayant les différentes positions du « 6 » de ses voisins possibles dans la base, etc. ;

La gestion

Les modalités de gestion sont multiples, elles dépendent du temps à disposition, de l'autonomie des élèves, des objectifs que le maître souhaite poursuivre au travers de cette activité.

- Dans une variante « pour occuper les élèves », le matériel est libre d'accès, à destination des élèves qui ont terminé le travail ordinaire de la classe et qui ont un moment à occuper. Ils s'engagent dans la recherche de la solution, créent un escalier ou deux, ou abandonnent en cas d'obstacle trop important, puis remettent le matériel dans sa boîte et passent à une autre occupation. En travaillant ainsi, ils n'ont certes « pas fait de mal » ; ils ont peut-être fait un peu de

mathématiques, vérifié leur(s) solution(s), éprouvé du plaisir ou de l'ennui, modifié leur rapport affectif avec la discipline, toutes choses que le maître ne peut pas évaluer.

- Dans une variante d'occupation avec «contrat minimum», les élèves doivent conserver une trace écrite de leur activité: les solutions trouvées, la date, l'heure, la durée et quelques explications éventuelles sur leur démarche. L'examen des protocoles va permettre au maître, s'il en a le temps et l'envie, de contrôler les solutions et de demander à l'élève des compléments.
- Dans une variante avec «contrat» collectif, les élèves travaillent par groupe et rédigent un compte rendu de leurs recherches avec solutions et explications, sachant qu'on exige toutes les solutions. Le maître pourra alors estimer le travail et provoquer une

confrontation entre les membres du groupe sur les solutions et leurs explications.

Il y a d'autres variantes encore, qui pourraient aller jusqu'à des phases d'institutionnalisation, c'est-à-dire, dans notre cas, d'explicitations de propriétés des différences ou de valorisation de procédures de recherche systématique. Pour des élèves plus grands, il y a aussi des développements vers des escaliers à quatre étages, voire cinq, qui exigent l'élaboration de nombreuses règles pour limiter les essais.

Dans un cas comme dans l'autre, le maître est le chef d'orchestre, qui choisit de donner, par ses interventions, de la substance à cet *Escalier des différences*. Le matériel, en lui-même, n'a pas le pouvoir de faire *faire des mathématiques* à l'élève.

Première rencontre de l'Association Math-Ecole

Les enquêtes ou évaluations à grande échelle, quels profits pour les enseignants?

Table ronde suivie d'un débat public

Présentation de **quelques résultats de confrontations régionales ou internationales** (Matheval, PISA, RMT): taux de réussite globaux, taux de réussite pour certains problèmes, procédures de résolution par les élèves, erreurs les plus fréquentes ... suivie de **réflexions sur les retombées qu'ils pourraient avoir pour la classe et pour les maîtres** qui ont à la conduire.

Mercredi 2 décembre, à 16h, à Neuchâtel

Rencontre ouverte à tous, suivie, à 18h, de l'Assemblée générale statutaire de l'Association *Math-Ecole*.

Le site internet de Math-Ecole, <http://www.math-ecole.ch> donnera, dès la fin d'octobre, toutes les informations utiles sur le lieu de la rencontre et les noms des animateurs de la table ronde. Il fournira aussi une documentation sur les enquêtes traitées à cette occasion.

En attendant, la réflexion peut débiter à la lecture de ce numéro: Editorial et articles présentant quelques résultats du *Kangourou* et du RMT, ainsi que du numéro 208 (J.-Ph. Antonietti «Apprendre les mathématiques sans parler l'espéranto», in *Math-Ecole* 208, pp 37-45) et 209 («Notes de lecture» p 62).

Avant l'annonce prochaine des résultats de PISA 2003, il vaut la peine de se demander, au-delà du rang obtenu par nos élèves, ce qui sera utile – ou ne le sera pas – pour notre enseignement, nos plans d'étude, nos moyens d'enseignement. Alors, reprenez la date du 2 décembre!

[indir]