RÉPONSES AU PROBLÈME «LA FORÊT TRIANGULAIRE»

Denis Odiet, François Jaquet

Nous avons reçu plusieurs réponses au problème de «La forêt triangulaire», de la finale 2003 du championnat de la FFJM, présenté dans notre numéro 210 (pages 4 à 8) et il n'y aura pas besoin d'attendre la parution des annales de cette édition du concours pour connaître la solution de ce problème, qui n'exige pas de calculatrice, non autorisée lors des épreuves.

Solution 1

Daniel Poncet-Montange, qui nous a déjà donné une solution trigonométrique du problème dans le numéro 210 (solution 2, pages 7 et 8), nous en propose une nouvelle, ne mettant en oeuvre que des connaissances sur le triangle équilatéral, le théorème de Pythagore et quelques règles élémentaires de calcul de fractions et carrés. (V. annexe I)

Solution 2

Michel Criton (un des animateurs de la FFJM) nous écrit :

Je viens de recevoir Math-Ecole, dont j'apprécie toujours beaucoup le contenu.

A propos du problème «La forêt triangulaire» évoqué par Denis Odiet, voici une solution en forme de puzzle, sans calcul ou presque.

Cette solution, inspirée d'une lecture dont j'ai oublié la référence, n'est pas originale, mais son côté astucieux me paraît remarquable.

Nous l'avons présenté lors du «rama» le premier jour de la finale. (V. annexe II)

Solution 3

Christian Bazzoni, de Bôle, a une solution tout à fait analogue. (V. annexe III)

Solution 4

En feuilletant les annales de la FFJM, nous avons trouvé, dans le numéro 13, «Le Roi des nuls» (7e Championnat, Pole Ed. 1994) un problème de structure identique : «Comme la Lune». La solution donnée s'appuie sur une «belle» formule, sobre et symétrique :

$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$ (I)

La question est de savoir d'où tombe cette formule.

Daniel Poncet-Montange nous en donne une démonstration, qui exige la maîtrise de quelques formules de trigonométrie. (V. annexe IV)

Solution 5

La rédaction de *Math-Ecole* propose une autre manière d'arriver à cette formule, par un puzzle qui généralise la solution de Michel Criton et qui évite le passage par la trigonométrie, mais qui fait appel à la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle en fonction des mesures de ses trois côtés. (V. annexe V)

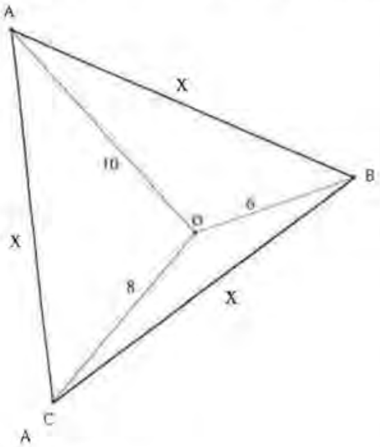
Solution 6

Denis Froidcoeur, de Lugano, nous envoie un message laconique avec un dessin en quatre étapes, sur papier transparent, obtenues à partir de la figure de base par une succession de symétries, rotations de 60 degrés et translations. (V. annexe VI)

En conclusion, un bien beau problème, qui a fait passer de bons moments à tous ceux qui s'y sont frottés. Les solutions ne sont pas très différentes, mais c'est la variété des approches qui est intéressante : découpages, rotations, trigonométrie, formules « classiques » s'enrichissent mutuellement. On peut exploiter largement ce sujet avec des élèves de l'école secondaire et du Lycée, dès le degré 9.

Annexe I

Solution de D. Poncet-Montange, pour le cas «6, 8, 10»

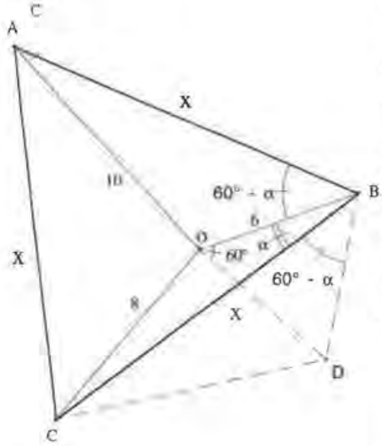


Rappel :

Le triangle ABC est équilatéral.
O est un point intérieur du triangle tel que
la distance OB vaut 6,
la distance OC vaut 8,
la distance OA vaut 10.

Calculer l'aire du triangle équilatéral de côté x.

Voici une solution tirée de l'ouvrage *Mathematical Quickies* de Charles Trigg.



Construire le triangle équilatéral BDO.

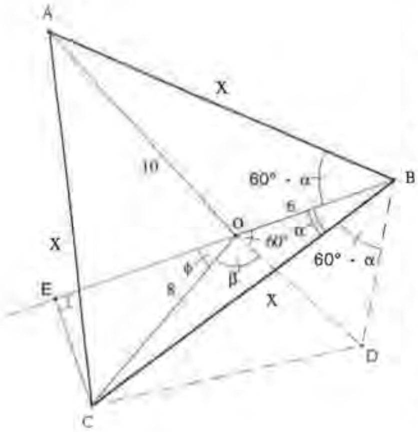
BD mesure donc 6.

Les triangles ABO et BCD ont chacun un angle égal (60° - α) entre deux côtés égaux (X et 6). Ils sont donc isométriques.

DC mesure donc 10.

Les côtés du triangle CDO mesurent 6, 8 et 10.

Ce triangle est donc rectangle en O.



L'angle BOD vaut 60°. β est un angle droit.

On prolonge le segment BO.

L'angle ϕ vaut 30° (180° - 60° - 90°).

On construit la perpendiculaire à la demi-droite BO passant par C.
Son intersection avec celle-ci est le point E.

L'angle ECO vaut 60° (180° - 90° - 30°).

OE est donc la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 8,

sa mesure vaut $\frac{8\sqrt{3}}{2}$, celle de BE est égale à $6+\frac{8\sqrt{3}}{2}$.

EC mesure 4.

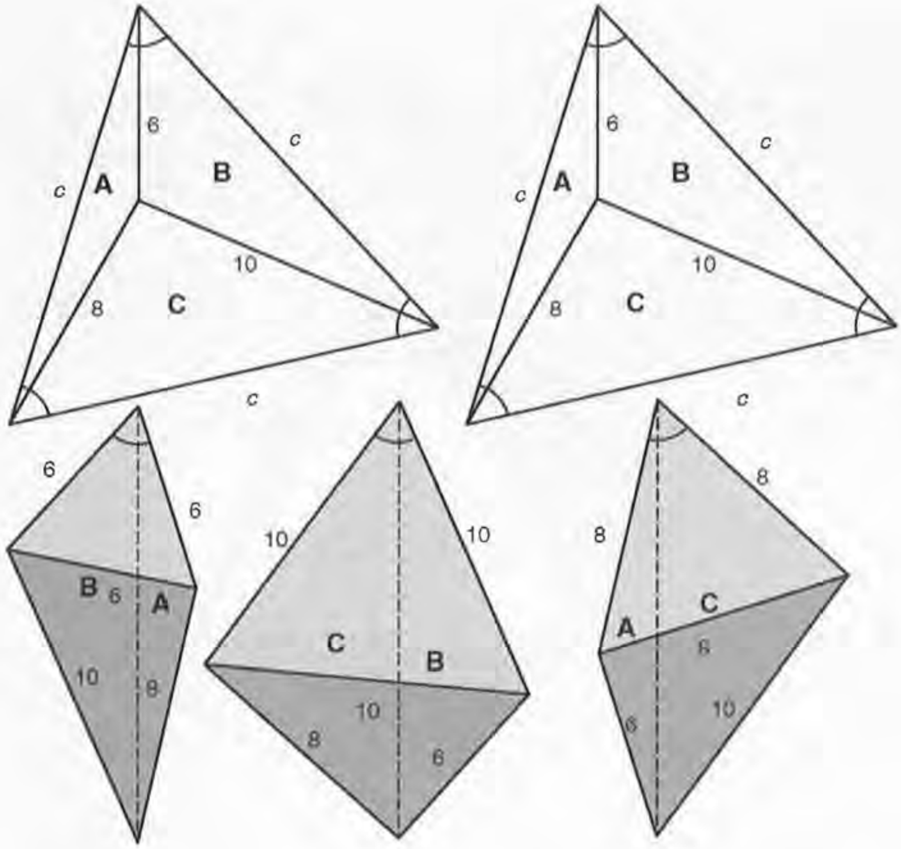
Par Pythagore dans le triangle BCE, on a

$$x=\sqrt{4^2+\left(6+\frac{8\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{100+48\sqrt{3}}$$

L'aire du triangle ($\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$) vaut donc $\frac{\left(100+48\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}+36\cong 79{,}3$

Annexe II

La solution de M. Criton, pour le cas «6, 8, 10» : décomposition de deux triangles équilatéraux de côté *c* en trois quadrilatères qui, à leur tour, forment 3 triangles rectangles «6, 8, 10» et trois triangles équilatéraux, de côtés 6, 8 et 10.



On prend deux exemplaires du triangle équilatéral et on partage chacun d'eux en trois triangles de côtés respectifs [6;8;c], [8;10;c] et [6;10;c] où c est la longueur d'un côté des triangles équilatéraux.

A l'aide des six petits triangles, on réalise les trois quadrilatères de la figure jointe en les assemblant deux à deux par leur côté de longueur c.

On montre facilement que ces trois quadrilatères possèdent un angle de 60 degrés et que chacun est donc constitué d'un triangle équilatéral accolé à un triangle rectangle de côtés 6, 8 et 10. La somme des aires des trois quadrilatères est égale au triple de l'aire du triangle rectangle 6-8-10 augmenté des aires de trois triangles équilatéraux de côtés respectifs 6, 8 et 10.

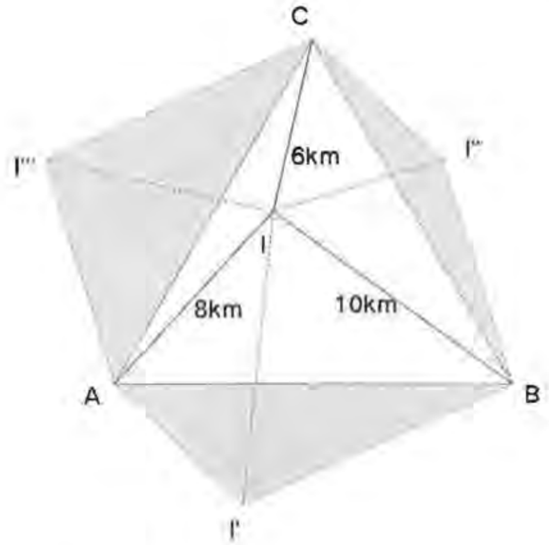
En prenant la moitié de cette somme, on obtient l'aire d'un triangle équilatéral de côté c, d'où l'on déduit ensuite la valeur de ce côté.

Annexe III

Christian Bazzoni sans découpage, en trois rotations, construit un hexagone dont l'aire est deux fois celle du triangle de départ, ce qui revient à une autre disposition des six pièces de la solution précédente.

Je partage le triangle équilatéral ABC en trois triangles auxquels je fais subir une rotation de 60^0 ainsi

$BIC \xrightarrow[R(B\,;\,60^0)]{} AI'B \qquad ABI \xrightarrow[R(A\,;\,60^0)]{} AI'''C \qquad AIC \xrightarrow[R(C\,;\,60^0)]{} CBI''$



On fabrique ainsi trois quadrilatères BICI'', AI'''CI et BI'AI dont la somme de leurs aires vaut le double de celui du triangle équilatéral.

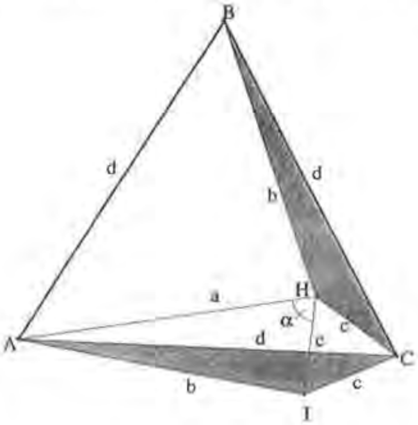
Chacun de ces quadrilatères est composé d'un triangle rectangle dont le côtés des angles droits valent 6km et 8km et d'un triangle équilatéral de respectivement 6km, 10km et 8km de côtés.

Aire du triangle équilatéral : $\dfrac{3(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8) + \frac{\sqrt{3}\cdot 6^2}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot 8^2}{4} + \frac{\sqrt{3}\cdot 10^2}{4}}{2}$

Donc l'aire de la forêt est de : $36 + 25\sqrt{3} = 79{,}30\ km^2$!

Annexe IV

Solution de D. Poncet-Montange, pour le cas général



Une équation fournit la mesure du côté d'un triangle équilatéral lorsque l'on connaît les distances d'un point aux trois sommets.

Si, comme ci-contre, *a*, *b* et *c* sont les trois distances du point H à chacun des sommets du triangle équilatéral de côté *d*, alors :

$$\boxed{3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2}$$

<u>Idée de départ :</u>

Construire CHI, triangle équilatéral de côté c;

L'angle HCB est égal à l'angle ACI;

Les triangles BHC et ACI sont isométriques : un angle égal entre deux côtés égaux.

<u>Démonstration de la formule:</u>

Théorème du cosinus dans AHI

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha$$

$$ac\cos\alpha=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$

$$a^2c^2\cos^2\alpha=\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4}$$

Théorème du cosinus dans ACH

$$d^2=a^2+c^2-2ac\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-2ac\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-2ac\left(\cos\alpha\cdot\frac{1}{2}-\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$d^2=a^2+c^2-ac\cos\alpha+ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$d^2-a^2-c^2+ac\cos\alpha=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$d^2-a^2-c^2+\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}=ac\sqrt{3}\sin\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=\left(ac\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2\sin^2\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2-3a^2c^2\cos^2\alpha$$

$$\left(\frac{2d^2-a^2-b^2-c^2}{2}\right)^2=3a^2c^2-3\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)^2}{4}$$

$$\left(2d^2-a^2-b^2-c^2\right)^2=12a^2c^2-3\left(a^2+c^2-b^2\right)^2$$

$$4d^4+a^4+b^4+c^4-4a^2d^2-4c^2d^2-4b^2d^2+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=12a^2c^2-3a^4-3c^4-3b^4-6a^2c^2+6a^2b^2+6b^2c^2$$

$$4a^4+4b^4+4c^4+4d^4=4a^2b^2+4a^2c^2+4a^2d^2+4b^2c^2+4b^2d^2+4c^2d^2$$

$$2a^4+2b^4+2c^4+2d^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2$$

$$2a^4+2b^4+2c^4+2d^4=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2-a^4-b^4-c^4-d^4$$

$$3\left(a^4+b^4+c^4+d^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$

C.Q.F.D.

A noter que la formule reste valable si le point H se trouve à l'extérieur du triangle équilatéral.

Annexe V

Solution de F. Jaquet pour le cas général :

La *Figure 1* montre, à gauche, le triangle équilatéral de côté *d*, d'aire **E***(d)*, et sa répartition en trois triangles d'aires **A, B, C,** ayant un sommet commun P. Une rotation de 60 degrés et de centre O, déplace le triangle (OPQ) en OP'Q' (au centre). Le triangle OPP' est équilatéral, de côté *a*, car il a deux côtés isométriques et l'angle compris de 60 degrés, désigné par **E** *(a)* sur la figure de droite. Le triangle PP'Q' a pour côtés *a, b, c,* il est désigné par **T** (*abc*) sur la figure de droite.
On a donc l'équivalence des aires :
E(*d*) = **A** + **B** + **C** = **A** + **E** (*a*) + **T**(*abc*)

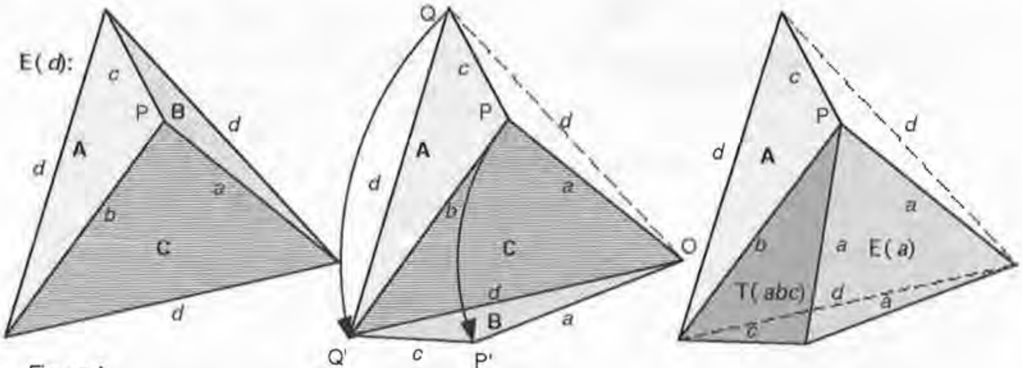


Figure 1

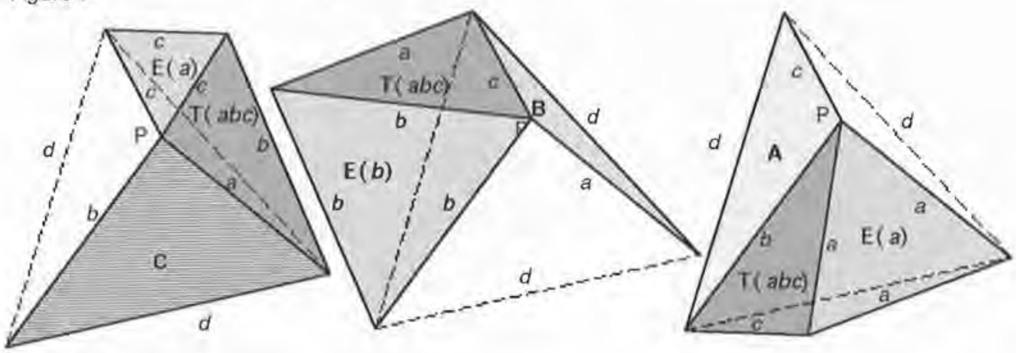
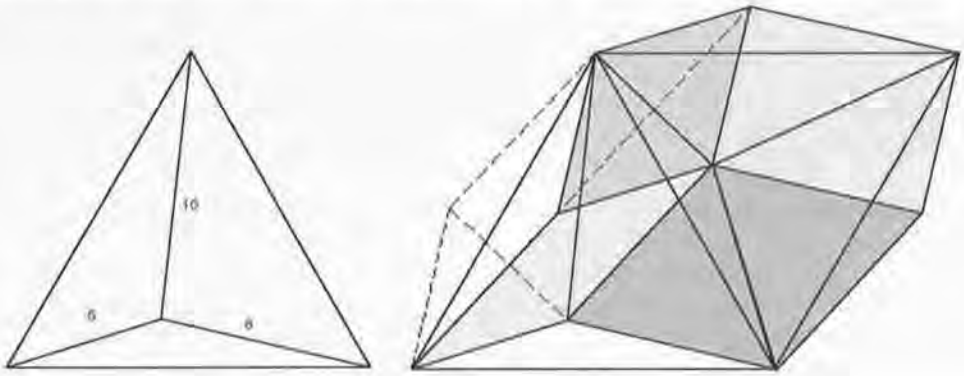


Figure 2

De même, par une rotation de la partie **A** (*Figure 2*, à gauche) et de la partie C (*Figure 2*, au centre) on obtient des décompositions du triangle initial en trois parties, respectivement **C, T**(*abc*), **E** (*c*) et **B**, **T**(*abc*), **E** (*b*). Le bilan des trois transformations donne la relation :
3**E**(*d*) = (**A** + **E** (*a*) + **T**(*abc*)) + (**B** + **E** (*b*) + **T**(*abc*)) + (**C** + **E** (*c*) + **T**(*abc*)) =
3**E**(*d*) = (**A** + **B** + **C**) + 3 **T**(*abc*) + **E** (*a*) + **E** (*b*) + **E** (*c*)
2**E**(*d*) = 3**T**(*abc*) + **E** (*a*) + **E** (*b*) + **E** (*c*)
On retombe ici, sur la relation de la solution 2, de M. Criton, mais pour le cas général.
Si l'on passe aux mesures des côtés, il faut faire intervenir la formule de Héron (moins courante mais qu'on trouve dans les formulaires) qui exprime l'aire d'un triangle en fonction de ses trois côtés (plus concise en faisant intervenir le demi-périmètre *p*) :

$2d^2\sqrt{3}/4 - a^2\sqrt{3}/4 - b^2\sqrt{3}/4 - c^2\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}$
$(2d^2 - a^2 - b^2 - c)^2 = 48p(p-a)(p-b)(p-c)$
Selon la formule classique, le lecteur vérifiera aisément que, en substituant $(a + b + c)/2$ à p et en simplifiant l'équation, on retombe rapidement sur l'une des cinq dernières lignes de la solution IV.

Annexe VI
Voici la figure de base de D. Froidcoeur et la figure finale, où l'on constate que l'aire de deux grands triangles (A) se décompose en 2 triangles équilatéraux de côté 6 (T_6),
2 triangles équilatéraux de côté 8 (T_8) et
3 triangles rectangles de côtés 6, 8 et 10 (T_{10}), d'où:
$A = T_6 + T_8 + 3/2\ T_{10} = (9 + 16)\sqrt{3} + (3/2)24 = 25\sqrt{3} + 36$



Cryptarithmes

M. Bernard Lamirel, nous envoie régulièrement des cryptarithmes, par thèmes, que nous n'avons pas publiés depuis notre numéro 204. Nous présentons nos excuses pour ce retard à ce fidèle lecteur et le remercions de ses sujets toujours intéressants, comme celui-ci, sur le thème de la santé !

```
a)      M A N G E R      b)     R E P A S      c)        T A B A C
      + M A N G E R           + R E P O S             + A L C O O L
      -------------           -----------             -------------
      G R O S S I R             S A N T E               C A N C E R
```

Le a), facile, vient du *Kangourou*; le b) et le c), de plus en plus difficiles, sont des créations de M. Lamirel.
Les règles de ces opérations arithmétiques à reconstituer, sont toujours les mêmes :
- chaque chiffre est représenté par une même lettre,
- deux lettres différentes représentent deux chiffres différents,
- aucun nombre ne commence par le chiffre 0.

L'intérêt des cryptarithmes est évident : c'est un jeu individuel passionnant, exigeant au niveau de la logique, qui appelle de solides connaissances mathématiques sur les algorithmes de calcul dans notre système de numération, ainsi que la résolution de systèmes d'équations jusqu'à 10 inconnues !