12e RMT, LA FINALE

1. LA FINALE DU 2 JUIN À BERNE

Pour la section de Suisse romande, la Finale du douzième rallye mathématique transalpin s'est déroulée le 2 juin 2004, à l'école cantonale de langue française (ECLF) de Berne. Cette année, 24 classes sont venues avec chacune deux accompagnants. L'invitée surprise, la pluie battante, s'est installée pour toute la journée. Cette finale s'est déroulée conformément à notre planification qui est toujours la même depuis de nombreuses années. Grâce à la ponctualité des classes participantes et à la disponibilité des accompagnants pour collaborer à la réussite de cette journée, tout s'est bien déroulé. Un message particulier pour les correcteurs qui ont dû accomplir leur tâche avec efficacité et célérité en 30 minutes.
Les remerciements vont également aux enseignants de l'ECLF pour leur participation active et tout particulièrement à Isabelle Torriani et Antoine Gaggero pour la planification de la journée. La remise des prix a eu lieu dans une ambiance du tonnerre à l'aula de l'école par la présidente de notre section de Suisse romande, Catherine Dupuis. Chaque élève a reçu un porte-CD. Une fois de plus, la mathématique était la gagnante de la journée.

Vers 16h30, la cérémonie protocolaire s'est terminée. Le rendez-vous est donné pour l'année prochaine.

Antoine Gaggero.

2. LES PROBLÈMES

Voici les 16 problèmes de la finale du 12e RMT, lus, adaptés, modifiés, relus, réadaptés, ... par une quinzaine d'équipes du RMT, sous la responsabilité particulière des animateurs des sections de Parma et Genova et avec l'appui des coordinateurs internationaux.

1. AU CINÉMA (Cat. 3)

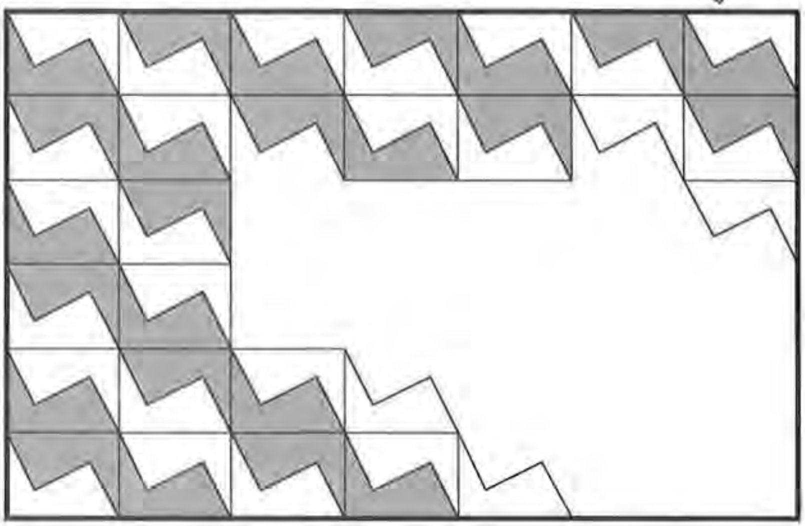
Quatre amies, Angèle, Danièle, Gabrielle et Lucie vont au cinéma et s'assoient l'une à côté de l'autre au même rang :
Angèle est à côté de Lucie,
Angèle est aussi à côté de Danièle,
Gabrielle n'est pas à côté de Lucie.

Comment les quatre amies peuvent-elles être assises? Notez vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

2. PAVAGE (Cat. 3, 4)

Combien manque-t-il de pièces blanches  **et de pièces grises**  **pour terminer le pavage de ce rectangle ?**

Indiquez le nombre de pièces blanches et le nombre de pièces grises qui manquent. Expliquez comment vous avez trouvé.



3. LES MARGUERITES (Cat. 3, 4)

En effeuillant une marguerite, Martine récite
la comptine suivante :

«Problème, beau problème
(et arrache le premier pétale)
je te résoudrai
(et arrache le deuxième pétale)
si je participe
(et arrache le troisième pétale)
au rallye transalpin»
(et arrache le quatrième pétale)
Puis elle recommence la comptine :
«Problème, beau problème
(et arrache le cinquième pétale)
...

Pour une marguerite de 10 pétales, la comptine s'arrête à ***«je te résoudrai»***.
Avec une marguerite de 47 pétales, sur quelle partie de la comptine Martine s'arrêtera-t-elle ?
Et pour un bouquet de marguerites avec 152 pétales en tout, où Martine s'arrêtera-t-elle ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

4. CHAUD - FROID (Cat. 3, 4, 5)

Julie pense à un nombre naturel plus petit que 50 et demande à ses amis de le deviner.
À chaque nombre proposé par ses amis,
Julie répondra ainsi :
«froid» si la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie (ou entre le nombre de Julie et le nombre proposé) est plus grande que 5 ;
«tiède» si la différence entre les deux nombres est 3, 4, ou 5 ;
« chaud » si la différence entre les deux nombres est 1 ou 2.

- Sylvie dit 25 et Julie répond «froid».
- Antonio dit 16 et Julie répond «tiède».
- Cécile dit 21 et Julie répond «chaud».

À quel nombre Julie a-t-elle pensé ?
Expliquez comment vous l'avez trouvé.

5. LES PATINEUSES (Cat. 3, 4, 5)

Dans un concours de patinage qui se déroule en cinq épreuves, quatre enfants ont obtenu les points indiqués par le tableau suivant :
L'entraîneuse remarque qu'en éliminant la note d'une épreuve pour chaque patineuse, toutes les

	Agnès	Blanche	Carine	Diane
1re épreuve	5	4	6	5
2e épreuve	1	5	4	7
3e épreuve	4	6	4	2
4e épreuve	2	3	3	4
5e épreuve	6	3	2	4

concurrentes obtiennent le même total de points.

Selon vous, quelle est la note à éliminer pour chaque patineuse pour qu'elles obtiennent toutes le même total de points ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

6. LES PETITS-ENFANTS D'ALICE (Cat. 4, 5)

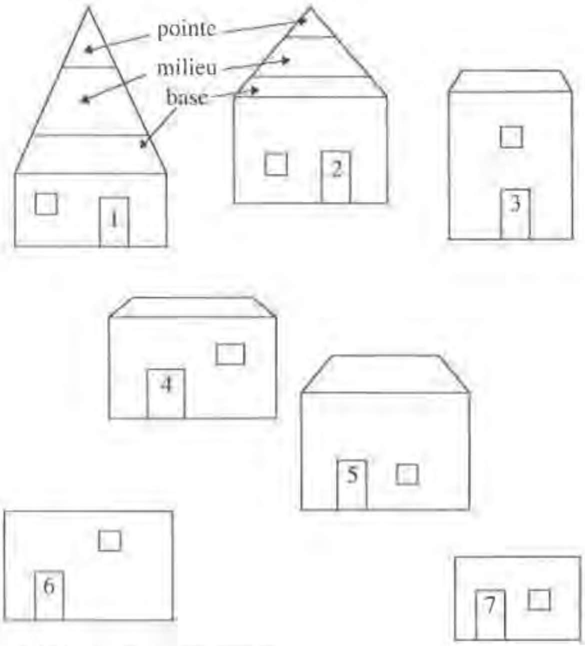
C'est samedi et grand-mère Alice attend ses petits-enfants. Elle a préparé 3 tartelettes au chocolat pour chacun d'eux. Mais … surprise ! Ses petits-enfants sont venus avec deux amis.
Pour qu'il n'y ait pas de jaloux, la grand-mère mange une des tartelettes et peut ainsi en donner 2 à chaque enfant.

Combien Grand-mère Alice a-t-elle de petits-enfants ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

7. LE VILLAGE DE BOIS (Cat. 4, 5)

Dany construit un village de 7 maisons avec des blocs d'un jeu de construction.
Les maisons sont toutes différentes, mais chacune a un toit en forme de triangle. Chaque toit est composé de trois parties : une pointe, une pièce de milieu, une base.
Dany a déjà construit entièrement les maisons 1 et 2. Pour les maisons 3, 4 et 5, il n'a placé que la base du toit.
Son petit frère a pris les autres pièces, il ne reste à Dany que les pointes des maisons 3, 4, 5, 6 et 7 :

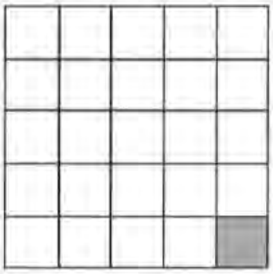
Quelle est la pointe de la maison 3 ? de la maison 4 ? de la maison 5 ?



Indiquez comment vous avez fait pour trouver ces pointes.

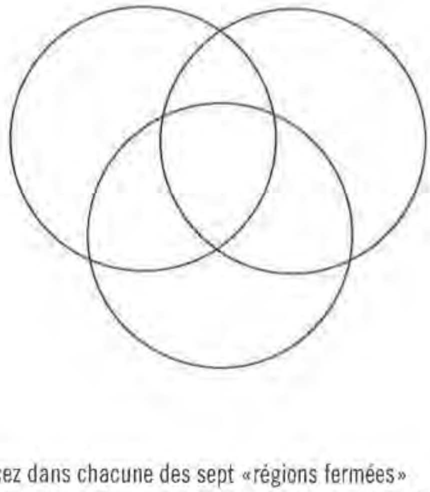
8. GRILLE INCOMPLÈTE (Cat. 5, 6)

Voici une grille quadrillée à laquelle on a enlevé une case dans un angle (marquée en gris).
On désire partager la figure ainsi obtenue en 6 parties composées de cases entières, qui ont toutes la même aire et la même forme.



Combien de formes différentes peut-on utiliser pour ce partage ?
Expliquez comment vous les avez trouvées et dessinez, pour chaque forme, une façon de partager la figure.

9. NOMBRES DANS LES CERCLES (Cat. 5, 6, 7)



Placez dans chacune des sept «régions fermées» déterminées par ces trois cercles un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Cherchez une disposition où la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle est la même et la plus grande possible.
Cherchez aussi une disposition où la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle est toujours la même, mais la plus petite possible.
Montrez vos solutions et expliquez votre raisonnement.

10. LA VALISE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Le père d'André est toujours en voyage pour son travail. La valise qu'il utilise pour ses déplacements ne s'ouvre que s'il compose la combinaison de quatre chiffres du mécanisme d'ouverture, que lui seul connaît.
André, curieux, désire découvrir cette combinaison mystérieuse.
Son père lui donne alors les indications suivantes :

- le troisième chiffre à partir de la gauche est la somme des trois autres chiffres,
- le deuxième et le quatrième sont les seuls chiffres égaux de la combinaison,
- la somme de tous les chiffres est 12.

Les indications données permettent-elles d'ouvrir la valise avec certitude au premier essai ?
Justifiez votre réponse en expliquant votre raisonnement.

11. CHAUD - FROID (Cat. 6, 7, 8)

Julie pense à un nombre naturel, compris entre 0 et 100, elle demande à ses camarades de le deviner.
À chaque nombre proposé par ses amis, Julie donnera une des quatre réponses suivantes :
«Froid» si la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie (ou entre le nombre de Julie et le nombre proposé) est plus grande que 10.
«Tiède» si l'écart entre le nombre proposé et le nombre auquel elle a pensé est 6, 7, 8, 9 ou 10.
«Chaud» si l'écart entre le nombre proposé et le nombre auquel elle a pensé est 1, 2, 3, 4 ou 5.
«Gagné» si le nombre proposé est le nombre auquel elle a pensé.

- Sylvie propose 39, Julie répond «froid».
- Antoine propose 23, Julie répond «tiède».
- Sophie propose 27.
- Avant que Julie ne réponde, Antoine dit à Sophie : «tu as mal joué !».

Que pensez-vous de la remarque d'Antoine ?
Dites quelles sont les réponses que Sophie peut attendre à sa proposition «27» et dites aussi laquelle de ces réponses est la plus probable selon vous.

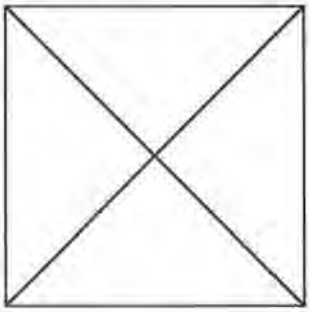
12. C'EST L'HEURE ! (Cat. 6, 7, 8)

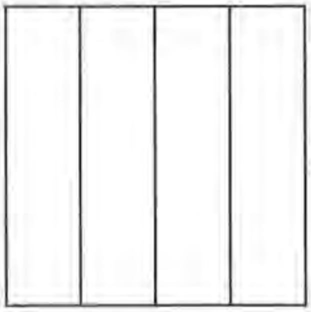
Jacques regarde l'heure affichée sur l'écran de son lecteur vidéo.
En additionnant les 4 chiffres il obtient 17.
En multipliant les 4 chiffres il obtient 90.

Quelle heure peut-il bien être ?
Expliquez votre raisonnement et notez toutes les réponses possibles.

13. PARTAGE DU CARRÉ (Cat. 6, 7, 8)

On a partagé le carré de gauche par deux segments, en quatre parties isométriques (superposables) : des triangles isocèles rectangles.





On a partagé le carré de droite par trois segments, mais aussi en quatre parties isométriques : des rectangles.
a) Y a-t-il d'autres manières de partager un carré par deux segments en quatre parties isométriques ? Comment ?
b) Y a-t-il d'autres manières de partager un carré par trois segments en quatre parties isométriques. Comment ?
Pour chaque manière découverte de partager le carré, dessinez un exemple, décrivez les parties obtenues, et indiquez combien il y a de solutions.

14. LES NOMBRES DE CLAIRE (CAT. 6, 7, 8)

Claire construit une suite de nombres : 96, 48, 24, 12, 6, ... en effectuant toujours la même opération pour passer d'un terme au suivant.

Lorsqu'elle écrit le huitième nombre de la suite, Claire se rend compte qu'il est inférieur à 1.

Combien de chiffres après la virgule aura le vingtième nombre de la suite de Claire ?
Quels seront ses quatre derniers chiffres ?
Expliquez comment vous avez procédé pour répondre à ces questions.

15. LA FAMILLE DUCHESNE (Cat. 7, 8)

Pour respecter une tradition de famille, Monsieur Duchesne plante un chêne à la naissance de chacun de ses enfants, selon les règles suivantes:

- chaque chêne doit être planté à 10 mètres de celui qui a été planté à la naissance de M. Duchesne;
- les chênes des enfants doivent avoir, entre eux, une distance supérieure ou égale à 10 mètres.

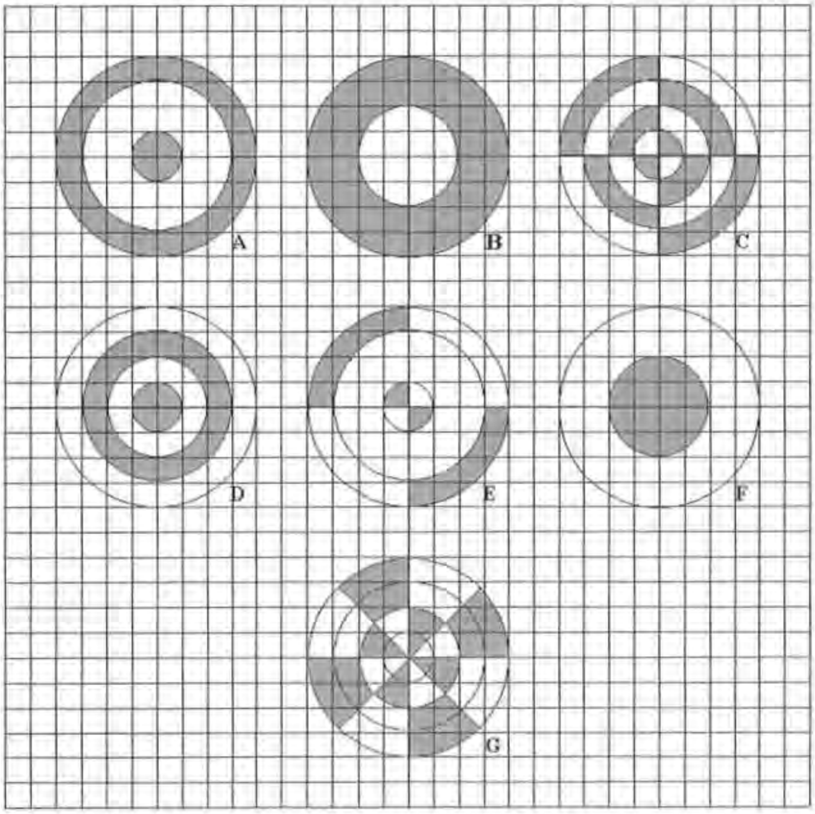
Après avoir planté, le dernier chêne, M. Duchesne se rend compte que, s'il a encore d'autres enfants, il ne pourra plus respecter ces règles.

Combien M. Duchesne peut-il avoir d'enfants aujourd'hui?

Expliquez votre raisonnement et montrez comment M. Duchesne peut avoir planté ses chênes.

16. SUPERFICIES ÉQUIVALENTES (Cat. 8)

André a dessiné beaucoup de disques égaux et il en a colorié en gris quelques parties. Voilà ce qu'il a obtenu:



André observe que, parmi ces disques, certains ont une partie coloriée de même aire, même si la forme de ces parties coloriées n'est pas la même.

Trouvez les disques qui ont une partie coloriée de même aire, et indiquez à quelle fraction de l'aire du disque correspond l'aire de cette partie coloriée. Justifiez votre raisonnement.

3. QUELQUES RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Le tableau suivant donne les moyennes de points obtenus par problème, selon les six catégories d'âge, pour les classes ayant participé aux finales de 14 sections de l'ARMT (Belluno, Bourg-en-Bresse, Genova, Israel, Lodi, Luxembourg, Milano, Siena, Parma, Cagliari, Rozzano, Perugia, Riva del Garda, Suisse romande).
Le nombre de classe par catégorie est donné, entre parenthèses, dans la première colonne. (Chaque section accueille, pour sa finale, de 2 à 4, voire 5 classes par catégorie).
La dernière colonne donne la moyenne des moyennes par catégorie.
Les points attribués, selon un barème déterminé pour l'ensemble des sections, vont de 0 à 4.

4 points correspondent à une réponse juste, avec explications complètes,
3 points correspondent en général à une réponse correcte mais avec des explications laissant à désirer,
2 points vont aux réponses justes sans explications ou avec quelques petites erreurs ou oublis et explications,
1 point récompense l'entrée dans le problème et un début explicite de recherche, sans parvenir à une solution,
0 signifie l'incompréhension du problème ou une solution absolument fantaisiste.

Un problème qui obtient une moyenne proche de 2 peut ainsi être considéré comme de difficulté «normale», si la moyenne s'approche de 3, le problème est «facile» ou «bien réussi», les problèmes «difficiles» obtiennent des moyennes proches de 1.

Moyenne des points obtenus par problème, selon les catégories

Problème :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	m
Cat. 3 (37)	2,92	1,64	1,99	1,08	2,65												2,14
Cat. 4 (39)		2,31	2,67	1,79	2,92	2,36	1,62										2,28
Cat. 5 (43)				2,52	3,15	2,86	2,14	2,23	1,56	1,90							2,34
Cat. 6 (37)								2,60	2,14	2,05	0,88	2,55	0,81	1,26			1,75
Cat. 7 (38)									2,47	2,21	1,61	3,00	1,45	1,32	1,61		1,97
Cat. 8 (33)										2,33	1,76	3,15	1,85	1,70	1,97	2,45	2,22

La lecture de ce tableau est intéressante à plus d'un point de vue :

- Pour un même problème, la réussite moyenne augmente toujours avec la catégorie, c'est-à-dire avec l'âge des élèves. Ce phénomène, vérifié pour la finale, semble naturel, mais ne se produit pas toujours pour les épreuves I et II, où l'on constate souvent une régression au passage du primaire au secondaire, le plus souvent entre les catégories 5 et 6.
- La dernière colonne montre que l'épreuve est de «difficulté moyenne» en général, avec toutefois des différences sensibles. Par exemple, elle était nettement plus facile en catégorie 5 qu'en catégorie 6.
- Les problèmes les mieux réussis sont le 1, 3, 5, 6, 8, 12, 16 et les moins bien réussis sont le 4, en catégorie 3, le 11 en catégorie 6, le 13 et le 14 en catégories 6 et 7.

Mais, derrière l'homogénéité, toute relative, des moyennes, il peut y avoir une grande dispersion des résultats, qui apparaît dans le tableau détaillé des résultats par classe (non publié ici) et dans les commentaires qui suivent dans l'analyse spécifique de certains problèmes.

4. ANALYSE DE CERTAINS PROBLÈMES

PROBLÈME 1 : AU CINÉMA

Ce problème classique, à propos de relation d'ordre et de position dans l'espace est bien réussi. La grande majorité des classes a compris que Angèle doit être entre Lucie et Danièle, mais seulement un tiers se sont rendu compte qu'il y a deux dispositions symétriques de ces trois amies et l'ont bien expliqué. Les autres ont perdu 1 ou 2 points pour absence de la deuxième solution ou pour des explications insuffisantes. Exemple : *G D A L. Nous avons mis A en premier, puis L à côté et aussi D, et vu que G ne doit pas être à côté de L, elle est à côté de D.*

PROBLÈME 2 : PAVAGE

Il s'agit ici du développement d'un ancien problème «Le trou» du 2e RMR (épreuve II) et aussi inspiré par le problème «Les remparts», de l'enquête *Matheval*. (J.-Ph. Antonietti et al. IRDP 2003). L'enjeu était d'approfondir l'analyse de cette dernière enquête avec un motif de pavé un peu plus complexe, selon l'analyse a priori suivante :

« -Pour dénombrer les pièces qui manquent, les élèves ont plusieurs méthodes à leur disposition :

- percevoir la trame rectangulaire et le motif en «diagonale» et compléter le dessin,
- ne compléter que la trame rectangulaire, remarquer que chaque rectangle est formé d'une pièce grise et d'une pièce blanche et compter,
- Calculer le nombre total de rectangles, 6 x 7 = 42, en déduire qu'il y aura 42 pièces de chaque sorte, et calculer la différence pour chaque sorte : blancs 42 - 27 = 15, gris 42 - 24 = 18, (procédure évoluée, par passage dans le registre numérique),
- Compléter la trame rectangulaire et constater que les 14 rectangles vides se remplissent par 14 pièces grises et 14 blanches ; noter qu'il reste 5 rectangles avec une seule pièce : dans l'un il manque la pièce blanche (14 + 1 = 15) et dans les quatre autres la pièce grise (14 + 4 = 18).
- Effectuer un comptage par lignes horizontales, ou verticales, ou selon les motifs, sans dessin (procédure délicate). »

Le problème s'est révélé encore difficile en catégorie 3, malgré les conditions de passation supposées favorables : travail par groupe, classes finalistes, haute motivation (l'enquête Mathéval concernait des élèves de 2e année, travaillant individuellement). La réponse «18 grises et 14 blanches» est fréquente, ainsi que «15 et 15» ou «14 et 14». La procédure qui s'est révélée la plus sûre est le dessin et le comptage par numérotation des pavés.
Ces problèmes de pavage donnent des idées intéressantes d'activités qui vont au-delà de la simple manipulation ou du dessin pour intégrer une reconnaissance consciente de régularités exigée par la demande numérique de dénombrement.

PROBLÈME 3 : LES MARQUERITES

Lors de l'analyse a priori, on avait espéré que certains groupes verraient le lien entre ce problème et les multiples de 4 ou encore une division par 4 avec reste. Mais c'était compter sans la patience aveugle de la plupart des élèves qui n'ont pas hésité à écrire ou réciter les 152 premiers versets de la comptine (en les abrégeant souvent) et à les numéroter.
Certains, plus nombreux en 4 qu'en 3e sont ainsi arrivés aux réponses justes, mais plus de la moitié n'ont pu maîtriser le synchronisme de la récitation et du comptage jusqu'au bout.
S'ils ont effectivement effeuillé la marguerite, ces élèves n'ont en revanche pas fait de mathématiques de haut niveau à cette occasion.

PROBLÈME 4 : CHAUD – FROID (Version I)

Nous sommes ici dans les domaines de l'arithmétique élémentaire (soustraction et addition de nombres naturels inférieurs à 50) et de la logique, teintée d'ensemblisme (conjonction ou «intersection», négation ou « complémentaire»).

L'analyse de la tâche prévoyait:

« -Comprendre que chaque condition permet de reconnaître les nombres possibles de ceux qui sont à éliminer:
le 25 «froid» admet les nombres inférieurs à 20 et supérieurs à 30 et élimine donc les nombres de 20 à 30,
le 16 «tiède» admet les nombres 11, 12, 13 et 19, 20, 21 et élimine les autres,
le 21 «chaud» admet les nombres 19, 20 et 22, 23, et le nombre 19 se révèle l'unique possibilité.

- Ou: comprendre que la condition « 21 chaud » permet de limiter à quatre les nombres possibles (19, 20, 22, 23), pour les examiner un à un et déterminer lequel satisfait les premières conditions.»

C'est la première règle, à propos de «froid» qui a posé le plus de difficultés, car plusieurs groupes n'ont pas compris la consigne et ont traduit «... la différence entre le nombre proposé et le nombre de Julie ... *est plus grande que 5*» par «est 5» pour aboutir à la réponse «20» qui vérifie les deux autres règles. Une classe a compris la consigne «est plus grande que 5» par «est 6», semble-t-il, et est arrivée à la réponse juste «19»: ... *la première information disait qu'il y avait une différence au moins de 5 nombres entre le nombre de Julie à partir de 25 et donc que le nombre devait être au minimum 19 ou 30. La deuxième information disait que la différence entre 16 et le nombre de Julie était 3, 4 ou 5, ainsi 30 ne pouvait être le nombre et le nombre restant était 19. ...*

La maîtrise simultanée des trois conditions et une bonne lecture de la règle du jeu ne sont pas maîtrisées en catégorie 3 (moyenne 1,08, avec de nombreuses incompréhensions du problème). Le progrès est sensible, mais insuffisant encore pour la catégorie 4 (1,79). Ce n'est qu'à partir de la cinquième année (moyenne 2,52) que la majorité des groupes ont résolu le problème, avec toutefois encore des difficultés à expliquer leur raisonnement. Des difficultés apparaissent encore plus tard, comme nous le verrons à l'analyse du problème 11, version plus complexe de ce problème.

PROBLÈME 6: LES PETITS-ENFANTS D'ALICE

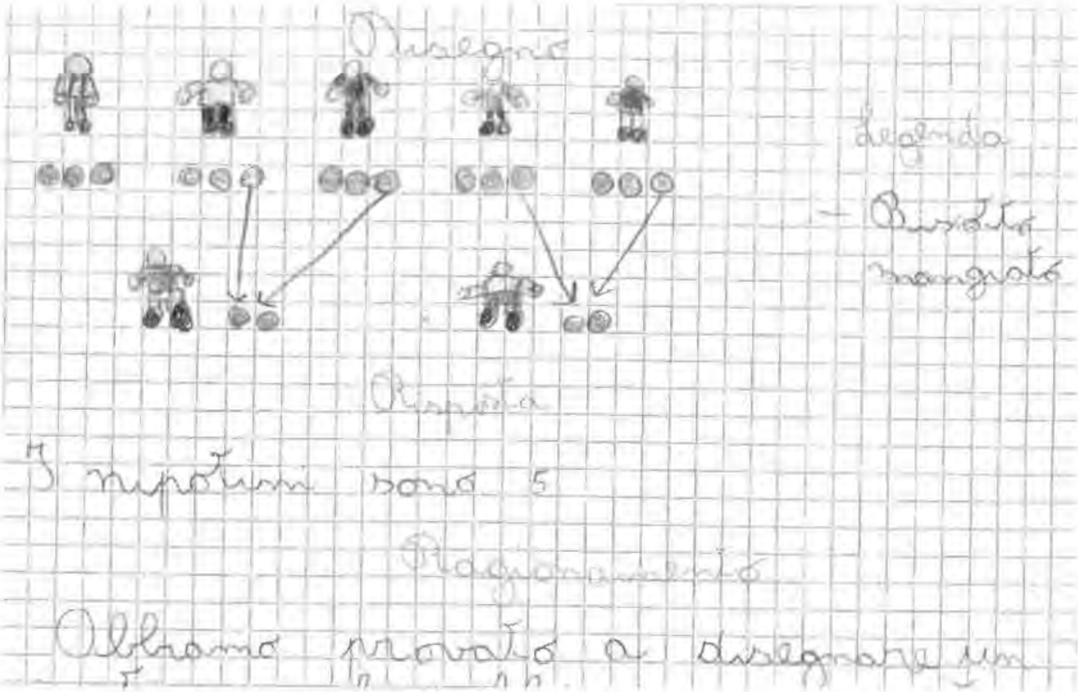
Un adulte résoudrait ce problème par une équation au cas où ses connaissances algébriques seraient encore mobilisables. Pour des élèves de 4e et 5e, il est évident qu'il faut trouver une autre approche. L'analyse a priori du problème décrivait la tâche ainsi:

« -Comprendre que le nombre de tartelettes préparées est multiple de 3.
- Comprendre que le nombre de tartelettes distribuées est un multiple de 2.
- Faire des hypothèses successives, éventuellement organisées en tableau:

petits-enfants	tartelettes préparées	tartelettes qui restent	petits-enfants + 2	tartelettes nécessaires	
2	6	5	4	8	manque 3
3	9	8	5	10	manque 2
4	12	11	6	12	manque 1
5	15	14	7	14	solution juste
6	18	17	8	16	1 en trop
7	21	20	9	18	2 en trop

- Ou, comprendre que la grand-mère retire une tartelette à chacun de ses petits-enfants et donc que le nombre de tartelettes qu'elle distribue aux deux autres enfants plus celle qu'elle mange elle-même, c'est-à-dire 5, est égal au nombre de ses petits-enfants.»

Toutes ces procédures prévues figurent dans les copies examinées, y compris l'organisation en tableau. Par exemple, la dernière d'entre elles, ci-dessus, nous a été donnée, mais de manière beaucoup plus claire, par une classe de 4e, de Cagliari :



Nous avons commencé par dessiner un petit-enfant et lui avons attribué 3 tartelettes. Puis nous avons enlevé celle que la grand-mère a mangée. Nous avons ajouté d'autres enfant pour arriver à 5 petits-enfants. De 4 petits-enfants (4, parce qu'on avait déjà retiré une tartelette à l'un d'eux) nous avons retiré une tartelette et ainsi nous avons récupéré 4 tartelettes. Comme il y a 2 amis, nous avons dessiné 2 tartelettes pour chaque ami et avons trouvé la solution.

D'autres procédures que celles qui sont mentionnées dans l'analyse a priori ont vraisemblablement été mises en œuvre, dont celles des recherches où l'on «tombe» sur la solution par hasard. Il est cependant difficile de les reconnaître car elles sont dissimulées sous des «explications» qui ne sont en réalité que des justifications de la réponse, du genre :

Nous avons fait comme ceci :
15 : 5 = 3 (tartelettes pour chaque enfant)
15 – 1 = 14
(la tartelette de la grand-mère en moins)
14 : 7 (+ les deux amis) = 2 (tartelettes pour chacun)
Donc les petits-enfants sont 5 plus les deux amis, en tout il y a 7 enfants.

Pour les cas de ce genre, les «3 points» du barème d'attribution des points étaient bien généreux :

« 4 Réponse correcte (5) avec explications claires et détaillées
3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou seulement avec vérification ou réponse 7 avec raisonnement correct mais confusion entre nombre d'enfants et nombre de «petits-enfants»
2 Réponse correcte sans explications ou réponse fausse due à une erreur de calcul, mais avec procédure correcte et bien illustrée
1 Début de recherche
0 Incompréhension du problème»

Dans un cas de ce genre, si le problème est repris en classe, il serait opportun de choisir des valeurs plus élevées de la variable didactique «nombre de tartelettes» (par exemple 7 et 6 au lieu de 3 et 2) afin de valoriser les procédures avec une stratégie bien explicite et de montrer les limites d'une recherche par essais non organisés.
La réussite à ce problème est moyenne à bonne (2,36 en 4e et 2,86 en 5e) et les points se répartissent largement sur l'échelle de 0 à 4, de la manière suivante pour les 82 copies examinée : 39 «4», 16 «3», 5 «2», 6 «1» et 18 «0».

PROBLÈME 7 : LE VILLAGE DE BOIS

Le concept d'angle est bien délicat à introduire dans l'enseignement. La majorité des manuels ou dictionnaires de mathématiques destinés aux élèves des niveaux 6 à 8, voire au-delà, renoncent, par prudence[1] à donner une définition de l'angle et se contentent de présenter des exemples. Il y a plusieurs années que le RMT cherche et construit des problèmes où le concept d'angle est présent mais où l'énoncé n'en parle pas explicitement (alors que la grande majorité des problèmes des manuels demandent de comparer des angles, de reporter des angles, de mesurer des angles, de calculer des sommes ou différences d'angles, etc.), comme, dans l'épreuve I du 13e RMT, le problème «Balle au rebond»[2], ou «Tarte Tatin», de l'épreuve I du 9e RMT :
«Martine a fait une tarte ronde pour le goûter. Ses copains ont déjà mangé chacun leur part. Le morceau qui reste est pour elle.

Combien de copains Martine a-t-elle invités?
(Bien sûr, toutes les tranches de tarte étaient égales !)
Comment avez-vous fait pour trouver votre réponse ?»

Le problème du «Village de bois», comme tous les autres problèmes avec l'intention de faire émerger le concept d'angle à ce stade encore intuitif, peut se résoudre par simple manipulation (découpages, reports...). Beaucoup de classes ont procédé ainsi. On peut aussi, vu que tous les triangles isocèles proposés ont leur base horizontale, comme celles de la première partie du toit des maisons, contrôler seulement le parallélisme des côtés obliques. On peut encore, comme l'ont fait plusieurs classes, prolonger les côtés non parallèles des bases des toits (trapèzes) pour pouvoir y insérer les pointes par report. Il y a aussi quelques classes qui ont utilisé le rapporteur. Pour chacune de ces procédures, il faut toutefois que les dessins, reports ou découpages soient précis car les mesures des angles aux sommets des différents toits proposés ne diffèrent parfois que par 5 degrés. Une moitié des classes s'est engagée dans des mesures de la longueur des bases ou n'a pas trouvé de stratégie efficace. Vu la diversité des procédures relevées, on peut être assuré que ce problème, repris en classe par l'ensemble des élèves, doit conduire à des échanges intéressants pour l'approche du concept d'angle et pour juger de la précision des mesures ou reports.

PROBLÈME 9 : NOMBRES DANS LES CERCLES

La première phrase de l'énoncé parlant de sept *«régions fermées» déterminées par ces trois cercles* a manifestement été mal été

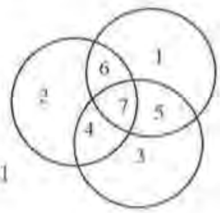
1 La définition de «partie du plan limitée par deux demi-droites de même origine» ignore en général «l'autre» angle défini par les deux mêmes demi-droites et est déjà prise en défaut lorsqu'on veut parler de la somme des angles d'un polygone à plus de quatre côtés ! Les définitions vectorielles ou s'appuyant sur des rotations demandent des connaissances trop ambitieuses pour l'âge des élèves.

2 Voir Math-Ecole 210, p. 44

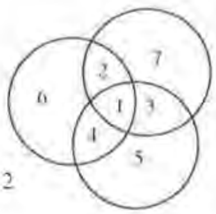
comprise par les 27 classes qui se sont vues attribuer «0 point» (incompréhension du problème). Il aurait été plus simple de placer 7 cases vides dans les cercles et de demander d'y disposer les nombres de 1 à 7. Certains y avaient pensé, mais on a préféré maintenir une touche de «topologie» dans le domaine des connaissances requises pour la résolution, d'autant plus que le problème était destiné à des classes finalistes de catégories 5 et 6, censées être capables de savoir ou de deviner ce que peuvent être les «régions fermées» délimitées par les cercles.

Pour les classes qui ont pu surmonter cette tâche de lecture, les recherches ont été dans l'ensemble fructueuses et correspondent parfaitement aux démarches proposées par l'analyse a priori :

« -Se rendre compte que chaque cercle entoure quatre des sept régions.
- Comprendre que, pour obtenir la somme maximale, il faut placer le nombre le plus grand (7) dans l'intersection des trois cercles, puis, successivement 4, 5, 6 dans les régions communes à deux cercles et terminer le placement pour que la somme des nombres à l'intérieur de chaque cercle soit la même (19).
- Procéder par analogie pour la somme minimale (13).
- Ou, procéder par essais et ajustements successifs jusqu'à trouver les combinaisons :



sol.1



sol. 2

Ce problème peut être enrichi ou développé en classe par la recherche de toutes les solutions où la somme des nombres est la même dans chaque cercle, sans être la plus grande ni la plus petite.

PROBLÈME 11 : CHAUD – FROID (Version II)

Par rapport à la version I, destinée aux catégories 3, 4 et 5, cette version proposée aux catégories supérieures se distingue par des nombres un peu plus grands, mais surtout par une remarque critique donnée par Antoine sur la proposition de Sophie. On passe ainsi à un second degré : celui d'une réflexion sur une réponse. C'était trop ambitieux pour des élèves de 6ᵉ (moyenne de 0,88) et encore assez difficile en 7ᵉ et 8ᵉ (moyennes 1,61 et 1,76).

Pour y arriver, il fallait, par exemple, suivre la démarche décrite dans l'analyse de la tâche :

« -À chaque proposition, il faut déterminer les nombres encore possibles et ceux qui sont à éliminer :
  le 39 «froid» élimine les nombres de 29 à 49 et conserve les nombres de 0 à 28 et ceux de 50 à 100,
  le 23 «tiède» élimine les nombres de 0 à 12, de 18 à 28 et de 34 à 100 et autorise ceux de 13 à 17 et de 29 à 33,
  ne restent alors en lice que les cinq nombres 13, 14, 15, 16 et 17,
  le 27 ne peut par conséquent provoquer la réponse «gagné».
- Dresser l'inventaire des réponses pour chaque possibilité du nombre pensé :
  17 : réponse «tiède» (différence 10), 1 cas sur 5 ;
  16, 15, 14, 13 : réponse «froid» (différences 11, 12, 13, 14), 4 cas sur 5.
- Exprimer qu'il est plus probable que la réponse «froid» soit donnée puisqu'elle peut intervenir 4 fois sur les 5 possibilités restantes pour le nombre pensé.»

Mais, même si les résultats globaux sont faibles, de nombreuses copies montrent que des séquences partielles du raisonnement ont été conduites avec rigueur, comme celle-ci, d'une classe de 6ᵉ année (de Rozzano), où ne manque que la partie «probabiliste» de la démarche :

... Les nombres qu'on pouvait attendre étaient 13, 14, 15, 16, 17 et le plus probable était le 15. Nous les avons trouvés en faisant 39 moins tous les nombres inférieurs à 50 et

si le résultat était plus grand que 10 ça allait bien. Puis nous avons fait 23 moins tous les nombres et avons laissé de côté tous ceux qui nous donnaient une différence 6, 7, 8, 9 ou 10. Les nombres possibles étaient ceux qui restaient.

PROBLÈME 13 : PARTAGE DU CARRE

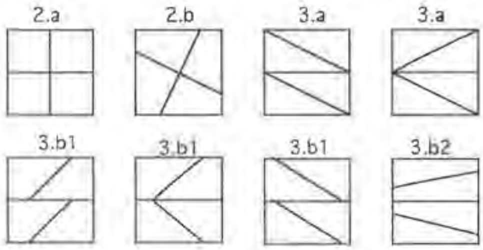
Voici un extrait de l'analyse a priori de ce problème :

«Domaine de connaissances

- Géométrie : figures, propriétés des isométries
- Approche de l'infini

Analyse de la tâche

- Découvrir les cas les plus évidents : les deux exemples et le cas du découpage en 4 carrés par deux segments médiatrices des côtés (fig. 2.a), en 4 triangles par une médiatrice et deux diagonales des rectangles (fig. 3.a).
- Après quelques essais, comprendre que, dans le cas de deux segments, ceux-ci doivent passer par le centre du carré et être perpendiculaires, pour des raisons d'isométrie ; dans le cas de trois segments, l'un doit être sur l'une des médiatrices, les autres doivent partager chacun des deux rectangles en deux parties égales.
- Découvrir que, pour le cas de deux segments, ceux-ci ne sont pas forcément sur les diagonales ou sur les médiatrices, mais que deux segments perpendiculaires, passant par le centre, non parallèles aux côtés forment quatre quadrilatères, et que ces quadrilatères sont isométriques (images les uns des autres par rotation d'un quart de tour autour du centre du carré). (fig. 2.b)
- Se rendre compte qu'on a «autant de solutions que l'on veut» ou «une infinité» dans ce dernier type de partage, correspondant à toutes les positions possibles d'un segment passant par le centre et dont une extrémité décrit un quart du périmètre du carré.
- Dans le cas de trois segments, constater que le premier doit obligatoirement diviser le carré en deux figures ayant un centre de symétrie - c'est-à-dire deux rectangles - et que les autres segments doivent passer par le centre de symétrie des rectangles. Ici aussi, se rendre compte qu'on a une infinité de possibilités de déplacer le deuxième segment en le faisant tourner autour du centre de symétrie du rectangle. (Le troisième se construit par symétrie axiale ou centrale dans le deuxième rectangle).
- Énoncer les résultats :
  Avec 2 segments : 1 solution donnant 4 triangles (exemple), 1 solution donnant 4 carrés (fig. 2.a), et une infinité donnant 4 quadrilatères dont deux angles opposés sont droits (fig. 2.b).
  Avec 3 segments : 1 solution donnant 4 rectangles (exemple), 1 solution donnant 4 triangles rectangles (fig. 3.a) et une infinité de solutions donnant quatre trapèzes rectangles qu'on pourrait encore subdiviser en deux catégories, de hauteur 1/2 (fig. 3.b1) ou de hauteur 1 (fig. 3.b2).



Le RMT cherche à proposer des problèmes qui sortent de l'ordinaire, pour ses finales en particulier. *Le Partage du carré* est «original» sur deux points : Il tente une ouverture vers le thème de l'infinité de solutions pour certains partages et il fait appel aux isométries sans les nommer. Dans les moyens d'enseignement traditionnels et dans les programmes officiels, on n'utilise pas volontiers le terme «infini» à ce stade de la scolarité et, en ce qui concerne les isométries, on se limite à des tâches explicites de construction, de reconnaissance, de composition, sur des «bonnes» figures, bien reconnaissables.

Dans le cas de deux segments, peu de classes ont trouvé le découpage en 4 quadrilatères non carrés et parmi celles-ci, une grande partie s'est limitée à un seul cas où les extrémités des segments sont exactement au quart des côtés (fig. 2.b). Plus généralement, les élèves n'ont pas trouvé d'autres partages qu'avec des segments horizontaux, verticaux ou suivant des diagonales de rectangles.
Le problème a obtenu une moyenne très faible en catégorie 6 (0,81) et encore basse pour les catégories 7 et 8 (1,45 et 1,85). La question est de savoir si c'est dû à une difficulté excessive ou à des pratiques d'enseignement où la créativité n'est pas au programme.

PROBLÈME 14: LES NOMBRES DE CLAIRE

Voici l'analyse de la tâche, faite a priori:

« -Comprendre que la suite de Claire s'obtient en divisant chaque terme par 2.
- Procéder de manière systématique, par exemple en écrivant les termes de la suite en colonnes pour observer l'évolution des parties décimales.
- Se rendre compte qu'à un certain moment dans la recherche des termes (selon le modèle de calculatrice utilisée), les décimales ne sont plus toutes affichées et qu'il est nécessaire d'effectuer les calculs à la main ou d'analyser les séquences des décimales des termes précédents.
- Se rendre compte que les deux derniers chiffres, à partir du huitième terme, sont toujours 7 et 5; que le troisième chiffre depuis la fin est alternativement: 3 ou 8; que le quatrième chiffre depuis la fin suit la séquence 1, 9, 6, 4.
- Se rendre compte, enfin, selon les régularités observées, que les quatre derniers chiffres du vingtième terme sont "6, 8, 7, 5".
- Se rendre compte que, à partir du septième terme, chacun des suivants a une décimale de plus et que, par conséquent, le vingtième terme a 14 chiffres après la virgule.»

Toutes les classes dont les copies ont été examinées ont compris qu'il s'agissait de diviser par 2 pour passer d'un nombre au suivant et ont écrit la suite des 20 nombres.
Mais, au-delà, c'est la débâcle totale pour 70 à 90 % des classes, selon le degré.
Voici la réponse type obtenue:
Le 20^e nombre a 7 décimales et se termine par ... 1831:

1) 96,
...
6) 3
7) 1,5
8) 0,75
9) 0,375
10) 0,1875
11) 0,09375
12) 0,046875
13) 0,0234375
14) 0,0117187
15) 0,0058593
...
19) 0,0003662
20) 0,000**1831**

De quoi rédiger une chronique nécrologique du genre: «La famille et les amis de Mme La Disme, ont le douloureux devoir de vous annoncer la disparition de son 8^e descendant, après une longue agonie due à un usage répété et non réfléchi de la calculatrice, muni des sacrements de l'industrie électronique...».
Il est bien évident que cette réponse-type varie selon le type de calculatrice utilisée. Deux classes disposant d'instruments très puissants sont arrivés à 13 chiffres après la virgule, ce qui signifie que, dans quelques années, tous les élèves donneront une réponse exacte à ce problème dans sa version actuelle.
Lors de l'élaboration de l'énoncé, une première idée était d'aller jusqu'au centième nombre de la suite. Elle n'a pas été retenue pour permettre aux élèves qui savent encore effectuer des divisions par 2 à la main de vérifier leur réponse. Mais l'idée sera reprise désormais et la question des décimales fera l'objet d'autres problèmes des futures éditions du RMT.

Remarques générales

Les analyses présentées ici vont être poursuivies sur l'ensemble des problèmes et à partir de toutes les copies qui n'ont pas encore été examinées, en particulier lors de la *Finale des finales* du 12e RMT (finale virtuelle consistant en une nouvelle attribution des points aux copies des classes gagnantes de chaque finale régionale, par un même jury) qui se déroulera en octobre à Bourg-en-Bresse, lors de la prochaine rencontre internationale sur le RMT.
Ces premiers résultats, cependant, montrent déjà tout l'intérêt d'une analyse des réponses d'élèves de provenances diverses à des problèmes communs. Dans son éditorial de ce numéro, Michel Brêchet fait allusion aux «grandes» enquêtes officielles gouvernementales, qui aboutissent à des classements, mais génèrent un sentiment de frustration chez les maîtres, qui n'obtiennent pas de résultats leur permettant d'agir dans leur classe. Le RMT, apporte, lui, à une échelle plus modeste et à moindres frais, des éléments concrets et pratiques qui peuvent répondre aux souhaits exprimés en fin d'éditorial. Il suffit parfois de reprendre un de ses problèmes en classe et de voir apparaître les mêmes obstacles pour ouvrir un débat collectif, pour proposer des variantes de l'activité, pour se sensibiliser aux lacunes que masquent des procédures routinières et des maîtrises superficielles de connaissances importantes.

Analyses et commentaires de François Jaquet

Nouveauté à la Boutique de Math-Ecole

Énigmes mathématiques pour les moins de 10 ans
POLE Éditions

Il y a peu de recueils de problèmes qui s'adressent à de jeunes lecteurs, comme il y a peu de concours de mathématiques pour les élèves des premiers degrés de l'école primaire. La FFJM a ouvert, ces dernières années, son concours aux classes du degré moyen, le RMT a une catégorie pour les classes de 3e. On atteint là les degrés «limite» pour une lecture autonome, permettant aux enfants de s'approprier seuls le problème.
Après le succès des annales de problèmes de la FFJM (*52/ 50/ 7x7 Enigmes pour l'école/faciles/pour tous/ pour lycéens*) les Éditions POLE ont relevé le défi en étendant leur collection aux «moins de 10 ans».
Ce recueil d'énigmes mathématiques s'adresse en particulier aux élèves de 3e année primaire. Il se lit comme un petit roman d'aventures fantastiques.
Quatre jeunes héros sont confrontés au fil des pages à toutes sortes d'énigmes dont la résolution va leur permettre de découvrir cinq mondes magiques. Des solutions en fin de volume permettent de vérifier le résultat et le raisonnement.
Activités numériques, manipulations et combinaisons, activités géométriques, logique et méthode : tel est le programme de ce livre dont les énigmes conduiront les jeunes lecteurs à faire le tour de tous les modes de raisonnement mathématique susceptibles d'être rencontrés au début de leur scolarité.

Il n'y a plus qu'à espérer que les jeunes enfants puissent entrer dans ce parcours avec la plus grande autonomie possible. Certaines fois, les parents ou le maître devront certes donner un coup de pouce, mais il a semblé aux responsables de la Boutique de *Math-Ecole* que le défi peut-être relevé. (Commandes en page 3 de couverture)