POURQUOI LA LINÉARITÉ JOUE-T-ELLE DES TOURS AUX ÉLÈVES ?

UNE ÉTUDE APPROFONDIE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE[1]

Dirk De Bock, Wim Van Dooren, Dirk Janssens et Lieven Verschaffel[2]

Mots-clés : linéarité, grandeurs proportionnelles, aire, figures semblables

Quiconque croit que, si l'on double le diamètre d'un cercle, l'aire est également doublée, est tombé dans le piège linéaire. Mais il peut être rassuré : il n'est certes pas le seul à pâtir de l'illusion de la linéarité. L'histoire des mathématiques regorge d'exemples de ce genre. Rappelons-nous, par exemple, l'esclave dans le dialogue «Ménon» de Platon qui devait dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, ou alors Cardan qui pensait qu'il faut lancer 18 fois deux dés avant que la probabilité d'un double-six atteigne les 50 %. A quel point cette illusion est-elle encore présente à ce jour auprès des élèves de 12 à 16 ans? Dans cet article, nous présenterons les résultats des recherches récentes effectuées à Leuven au sujet de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et de la réduction de figures géométriques. Après un aperçu des résultats d'une série d'études collectives à ce sujet, nous décrirons en détails une étude approfondie examinant les causes de ce phénomène par le biais d'interviews individuelles.

1. Introduction

Selon Freudenthal ([7]), la linéarité (ou la proportionnalité directe) est une propriété tellement évidente que l'on est facilement tenté de traiter n'importe quelle relation entre des grandeurs comme si elle était linéaire. Bien souvent, les élèves - mais aussi plusieurs adultes - ont tendance à voir partout des relations linéaires et à appliquer la linéarité même dans des situations où ceci n'est pas justifié. Dans ce cas, on parle parfois de l'*illusion de la linéarité*. Dans la littérature, on trouve d'innombrables exemples de ce phénomène, empruntés à des domaines divers des mathématiques (voir par exemple [2]).

Un exemple élémentaire, dans l'histoire des probabilités, est l'erreur commise par le mathématicien italien Cardan (1501-1576). Cardan, qui raisonna correctement que la probabilité d'un double-six en un lancement de deux dés vaut 1/36, continua son raisonnement en prétendant qu'il faut lancer 18 fois les deux dés afin que la probabilité d'un double-six atteigne au moins 50 %. Cardan s'appuyait donc sur un lien proportionnel (direct) entre le nombre de lancements et la probabilité d'un double-six. Une recherche récente effectuée par Van Dooren, De Bock et Verschaffel [16] démontre qu'aujourd'hui encore les élèves de 15 à 18 ans tombent massivement dans ce piège linéaire. Les élèves de cette recherche avaient vraisemblablement une bonne compréhension qualitative des différentes situations aléatoires qu'on leur avait présentées (ainsi, par exemple, presque tous les élèves estimaient correctement que la probabilité d'un succès augmente avec le nombre de tentatives et diminue avec le nombre requis de succès). En même temps, ces élèves étaient fortement portés à quantifier de façon linéaire cette compréhension

1 **[ndlr]** Cet article a été publié dans la revue *Mathématique et pédagogie* (no. 146, mars-avril 2004) de la Société Belge des Professeurs de Mathématique d'expression française. Nous remercions les auteurs et la rédaction de la revue de nous autoriser à le reproduire à l'intention des lecteurs de *Math-Ecole*.

2 Voir l'adresse des auteurs en fin de bibliographie.

qualitative correcte (ainsi, par exemple, la grande majorité de ces élèves pensaient que la probabilité d'un succès est doublée lorsque l'on double le nombre de tentatives et que cette probabilité est divisée par deux lorsque l'on double le nombre requis de succès).

La généralisation à tort de la linéarité est également mentionnée dans le domaine des fonctions et des graphes. Lorsque l'on demande à des élèves de donner un exemple d'une fonction ou d'un graphe, dans la plupart des cas, ils produisent des exemples linéaires. Leinhardt, Zaslavsky et Stein [9] ont catégorisé les différentes méprises des élèves qui surgissent lorsqu'ils dessinent des graphes. Une de ces catégories est nommée « linearity », Les auteurs donnent un aperçu détaillé des études qui constatent que les élèves de différents âges, à qui l'on demande de dessiner le lien entre deux variables d'une situation donnée (comme, par exemple, la taille d'un homme en fonction de son âge), ont grande tendance à dessiner une droite passant par l'origine, même quand le lien en question n'est clairement pas linéaire et quand le graphe ne passe manifestement pas par l'origine.

Ce n'est pas uniquement dans les mathématiques que l'on découvre des exemples de raisonnements linéaires erronés. On en trouve aussi dans divers domaines scientifiques. Galilée [8] décrit dans ses « Discorsi e dimostrazioni matematiche intorna a due nuove scienze » la théorie naïve d'Aristote sur les objets tombants. Aristote pensait, par exemple, qu'un objet 10 fois plus lourd qu'un autre, atteint 10 fois plus vite le sol que l'autre objet. Un énoncé de Piaget [12], dont le but était de voir si les enfants étaient capables de raisonner de façon linéaire, sous-entend un lien proportionnel direct entre la longueur d'un poisson et ses besoins de nourriture, mais rien ne dit que ceci soit biologiquement justifié : « (...) trois poissons de longueurs 5, 10 et 15 cm. Pour qu'une seule dimension soit à considérer (...) le poisson B mangera deux fois ce que mange le poisson A, et le poisson C trois fois » (p. 51).

Cet article est axé sur l'illusion de la linéarité dans le domaine de la géométrie. Dans ce domaine, l'exemple le plus célèbre est sans doute celui de la duplication du carré dans le dialogue Ménon de Platon. Un esclave, placé devant l'épreuve de dessiner un carré dont l'aire est le double de celle d'un carré donné, propose spontanément de doubler le côté du carré. L'esclave s'appuie donc de façon implicite sur un lien proportionnel entre le côté et l'aire d'un carré.

Un autre exemple de l'Antiquité est le fameux problème « délien » concernant l'impossibilité de construire à la règle et au compas l'arête d'un cube dont le volume est le double du volume d'un cube donné (voir par exemple [1]). L'origine légendaire de ce problème se situe vers 430 av. J.C. dans l'Athènes antique, où une épidémie de peste foudroyante avait abattu près d'un quart de la population. En désespoir de cause, on envoya une délégation à l'oracle d'Apollon à Délos pour demander comment on pouvait mettre fin à ce fléau. L'oracle « répondit » que l'épidémie se terminerait si l'on réussissait à doubler l'autel de forme cubique qui se trouvait dans le temple d'Apollon. Dans l'espoir de satisfaire la divinité, les Athéniens doublèrent chaque arête de l'autel, ce qui ne fit qu'intensifier l'épidémie car le volume de l'autel n'était pas doublé mais multiplié par 8.

Aujourd'hui encore, grand nombre d'élèves, mais aussi d'adultes, ne sont pas toujours conscients des différents facteurs de croissance pour les longueurs, les aires et les volumes de figures semblables agrandies ou réduites. Ainsi, Tierney, Boyd et Davis ([15], p. 308) constatent, dans leur recherche sur les conceptions d'aire auprès de futurs instituteurs, que les variations des dimensions linéaires sont bien souvent étendues aux variations de l'aire : *In responding to questions about the effect of halving or doubling the lengths of the sides of a square, most students said that the area was also halved or doubled.*

Le manque de distinction entre l'accroissement des mesures de longueur, d'aire et de, volume apparaît fréquemment dans des représentations graphiques déroutantes, comme on en voit souvent dans la presse populaire (voir aussi [11]). Le « graphique » de la figure 1 montre la consommation annuelle de bière (en litres par habitant) dans quelques pays européens. Ainsi, il s'avère que les habitants du Bénélux boivent trois fois plus de bière que les Français (respectivement 120 et 40 litres par habitant). L'aire des pots de bière dessinés suggère néanmoins un rapport de 9 à 1, et même de 27 à 1 si l'on considère les volumes des « vrais » pots de bière.

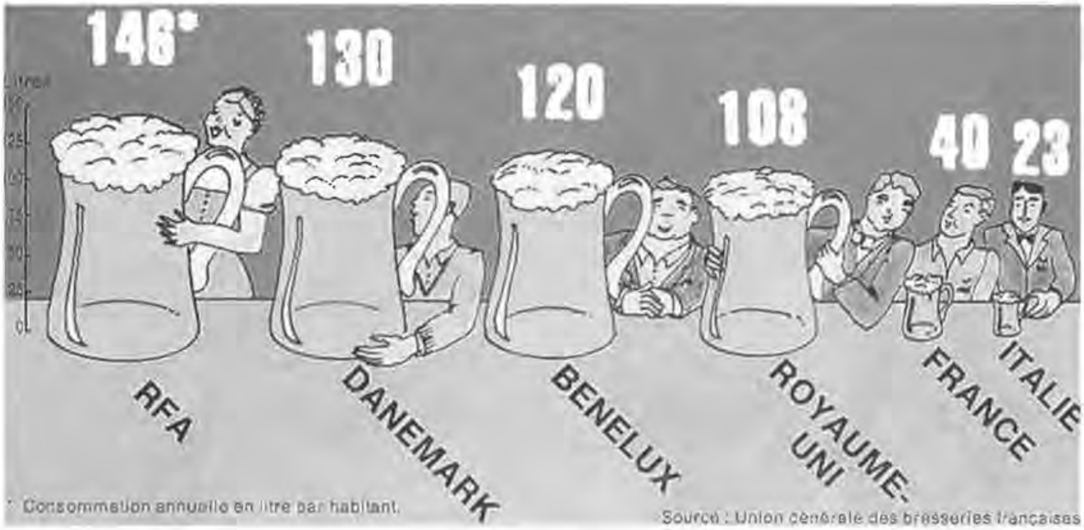

Figure 1 : Bière. L'Europe sous pression (Dans : Le Vif/L'express – 19 août 1988).

Même quelqu'un ayant compris que les aires et les volumes ne sont pas reliés de manière linéaire aux longueurs, s'étonne encore souvent du fait que l'aire et le volume augmentent *tellement* dans le cas d'un agrandissement et diminuent *tellement* dans le cas d'un rapetissement. Ceci est illustré dans le livre « Leven en Werken van de Kabouter » (titre de la traduction française : « Les Gnomes ») de Rien Poortvliet et Wil Huygen [13] (voir aussi [5]). Dans ce livre, on retrouve une analyse détaillée et vraisemblablement réaliste de tous les aspects de la vie du gnome. Une des thèses est que le gnome possède une anatomie très semblable à celle de l'être humain, et qu'un gnome mâle mesure environ 15 cm (sans compter son bonnet) et pèse environ 300 g (figure 2). Quoique ceci puisse sembler acceptable à première vue, c'est une estimation très peu réaliste : si l'on part du fait qu'un gnome de 300 g mesure 15 cm, et qu'un homme adulte mesure 180 cm, alors cet homme (qui est 180/15 = 12 fois plus grand) devrait peser 12^3 ou 1728 fois plus, c'est-à-dire environ 518 400 g ou 518 kilos !

Depuis quelques années, le Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie de la Katholieke Universiteit Leuven mène une recherche empirique systématique au sujet du phénomène de l'illusion de la linéarité dans le contexte de l'agrandissement et du rapetissement de figures géométriques semblables. Dans une première série d'études, on a étudié l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité dans ce contexte par le biais de tests collectifs. Nous résumons ci-dessous ces études, dont certaines ont déjà été décrites jadis dans cette revue [3]. Pour un commentaire plus complet, nous nous référons à [4].

Toutefois, avec ces tests collectifs, nous n'avions pas obtenu suffisamment d'informations sur les processus de résolution cachés derrière les raisonnements linéaires à tort des élèves. Ainsi, nous basant sur ces tests, nous ne pouvions pas donner de réponse satisfaisante à la question comment et pourquoi tant d'élèves tombent dans le « piège linéaire », ni pourquoi ils s'avèrent tellement insensibles à diverses formes d'aide que nous leur avions fournies lors de ces tests. C'est pourquoi nous avons décidé d'interviewer de façon individuelle un groupe restreint d'élèves et de débrouiller leurs processus de raisonnement lors de la résolution d'un problème non linéaire, en interrogeant les élèves et en leur offrant quelques indices stratégiques. Nous donnerons un compte-rendu détaillé de cette étude dans le reste de l'article.

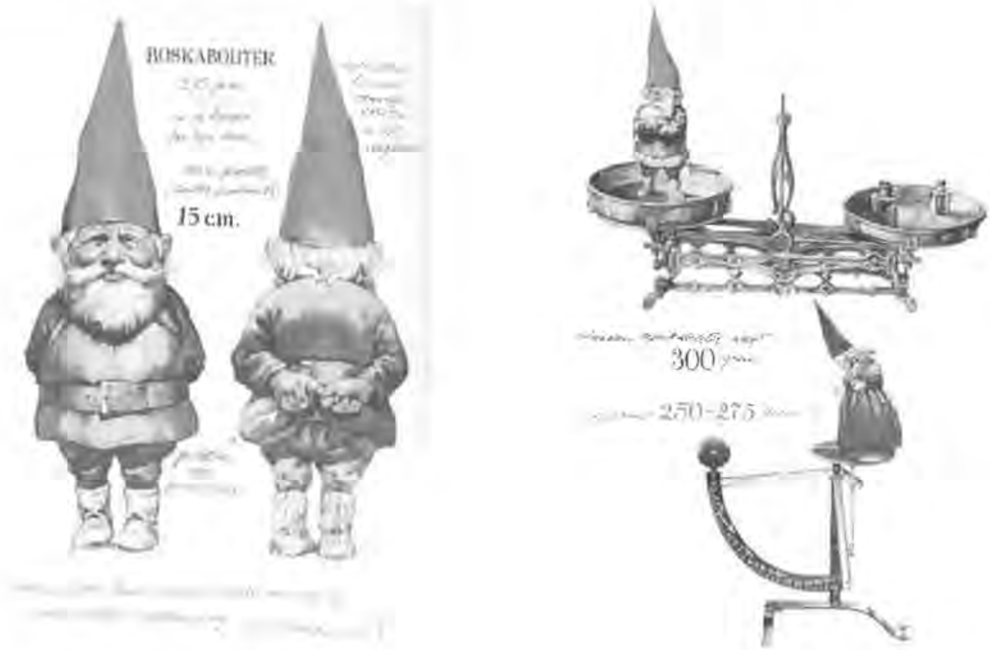

Figure 2: Combien pèse le gnome?

2. Étude basée sur des tests collectifs: un résumé

Les tests collectifs, visant à mesurer l'ampleur et la persistance de l'illusion de la linéarité, comportaient aussi bien des questions proportionnelles que des questions non-proportionnelles concernant la relation entre les longueurs, les aires et les volumes de figures géométriques semblables (agrandies ou réduites). Nous avons fait passer ces tests écrits à de grands groupes d'élèves de 12 à 13 ans et de 15 à 16 ans, sous des conditions expérimentales différentes. Toutes les questions des tests étaient formulées sous forme de « problèmes » traditionnels et elles concernaient différentes formes de figures géométriques. Voici, par exemple, une question proportionnelle (sur le périmètre d'un carré):

Pour creuser un fossé autour d'un champ carré de 100 m de côté, le fermier Gustave a besoin d'environ 4 jours. Combien de jours lui faut-il, environ, pour creuser un fossé autour d'un champ carré dont le côté mesure 300 m?

Voici un exemple d'une question non-proportionnelle (sur l'aire d'un carré) :

Pour fertiliser un champ carré de 200 m de côté, le fermier Charles a besoin d'environ 8 heures. Combien d'heures, environ, lui prendra la fumure d'un champs carré dont le côté mesure 600 m ?

Résumons les principaux résultats de ces études.

- La tendance à raisonner de façon proportionnelle s'avère être extrêmement forte dans le groupe des 12 - 13 ans (seulement 2 – 7 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles), mais les 15 - 16 ans, eux aussi, en sont fortement imprégnés (seulement 17 - 22 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles).
- La nature de la figure géométrique liée au problème influence la tendance à raisonner de façon linéaire : les prestations des élèves étaient meilleures dans les cas de figures régulières (carré, cercle) que dans les cas de figures irrégulières (par exemple, la carte de la Belgique).
- Ni la consigne de faire un dessin pour chaque question, ni même les dessins fournis n'influencent le comportement de résolution des élèves. Les élèves ont rarement suivi la consigne de faire un dessin et ils n'ont, en général, pas prêté beaucoup d'attention aux dessins fournis. Ce n'est que lorsqu'on leur a présenté des dessins sur papier quadrillé, qu'un effet positif a été constaté (les élèves à qui ceux-ci ont été fournis ont résolu 17 % des questions non-proportionnelles de façon correcte, contre 13 % dans les autres groupes).
- L'offre d'une aide métacognitive (la confrontation des élèves, avant le test, avec une question non-proportionnelle au sujet de laquelle ils pouvaient choisir entre la réponse proportionnelle et la réponse correcte) n'avait qu'un effet positif limité sur la résolution des problèmes non-proportionnels du test : dans le groupe avec cette aide, 18 % des problèmes non-proportionnels ont été bien résolus, contre 12 % dans les autres groupes.
- Le raisonnement proportionnel à tort semble être fortement lié à la structure « valeur manquante » de l'énoncé (une structure dans laquelle les élèves doivent calculer l'inconnue en se basant sur trois nombres donnés, comme dans les exemples cités ci-dessus). Les élèves à qui étaient présentées des questions équivalentes quant au contenu mais formulées sous forme de comparaisons (par exemple, la variante de la question non-proportionnelle citée plus haut : *Le fermier Charles a fertilisé aujourd'hui un champ carré. Demain, il doit fertiliser un champ carré dont le côté est trois fois plus grand. Combien de fois plus de temps lui faudra-t-il pour fertiliser ce champ ?*) ont réussi beaucoup mieux aux questions non-proportionnelles que les élèves confrontés aux questions « valeur manquante » (respectivement 41 % et 23 % de réponses correctes). Mais même chez les élèves avec les questions sous forme de comparaison, plus de la moitié des réponses étaient fautives !
- La présentation des questions dans un contexte attrayant et « réaliste », ce qui fut réalisé dans la recherche en montrant une vidéo sur le voyage de Gulliver à l'île des Lilliputiens et en reliant les questions du test à ce contexte, a même eu un effet contraire sur les prestations des élèves aux questions non-proportionnelles (25 % de réponses correctes aux questions non-proportionnelles contre 41 % dans le groupe de contrôle).
- Nous avons constaté, à notre surprise, que quand les prestations des élèves sont améliorées grâce à l'une ou l'autre forme d'aide offerte, ceci allait à chaque fois de pair avec des prestations moins bonnes pour les questions « habituelles » proportionnelles. Bien souvent les fautes commises à ces questions proportionnelles étaient dues à des raisonnements non proportionnels à tort.

La conclusion générale de ces études est qu'un grand nombre d'élèves se laissent induire en erreur par l'illusion de la linéarité, et ceci de façon flagrante, même quand on leur offre une aide mettant en évidence que le modèle linéaire est insoutenable. Les effets de différentes manipulations expérimentales ont été décevants et même, dans certains cas, négatifs. Mais à cause de la méthode de recherche utilisée (des tests collectifs sous différentes conditions expérimentales), ces tests n'ont pas procuré une image suffisamment détaillée des processus de résolution et des modes de raisonnement des élèves qui donnaient à tort des réponses linéaires. C'est pourquoi ces études avec des tests collectifs ont été complétées par une étude approfondie dans laquelle nous avons interviewé un petit nombre d'élèves.

3. Étude par interviews

3.1 Déroulement des interviews et constatations principales

Décrivons tout d'abord le déroulement des interviews ainsi que les principales constatations d'ordre général concernant les réactions des élèves pendant les interviews. Après ceci, nous donnerons les détails de deux interviews d'élèves, que nous avons sélectionnées comme représentatives des réactions de l'ensemble des élèves interviewés.

Nous avons fait passer des interviews individuelles semi-standardisées à vingt élèves de 12 - 13 ans et vingt élèves de 15 - 16 ans de l'enseignement général. Dans ces interviews, nous placions les élèves d'abord devant un problème non-linéaire sur l'agrandissement d'une figure irrégulière. L'énoncé était accompagné de dessins afin de garantir la bonne interprétation du problème par les élèves (notamment comme un agrandissement « semblable ». Grâce aux études avec des tests collectifs, nous savions déjà que le fait de fournir un dessin n'influe pas sur le nombre (massif) de réactions proportionnelles de la part des élèves. Un exemple est donné dans la figure 3.

Bart travaille pour une entreprise qui peint des dessins publicitaires sur les vitres des étalages. À Noël, il doit souvent peindre des arbres de Noël, des Pères Noël, des étoiles et des bonshommes de neige.

Un jour, il dut peindre un Père Noël de 56 cm de haut sur la porte en verre de la boulangerie Dufour. À cet effet, il avait besoin de 6 ml de peinture. Un peu plus tard, il dut peindre une version beaucoup plus grande de ce Père Noël sur la vitre de l'étalage du supermarché Staes. Ce Père Noël devait mesurer 168 cm de haut. Combien de peinture lui fallait-il ?

Boulangerie Dufour **Supermarché Staes**

Figure 3 : Exemple d'un problème non linéaire (bonne réponse : 54 ml, réponse fautive : 18 ml).

Pendant la résolution de ce problème, nous faisions penser l'élève à haute voix et nous posions quelques questions supplémentaires. Nous demandions par exemple systématiquement pourquoi ils pensaient que leur réponse était correcte et ils devaient indiquer sur une échelle à cinq niveaux leur degré de certitude (de « sûrement fausse » à « sûrement correcte »). Lorsqu'un élève résolvait le problème de façon linéaire, nous donnions en cours de route des indices supplémentaires. Ces indices soutenaient de plus en plus la solution correcte (non-linéaire) et suscitaient de plus en plus un conflit cognitif auprès de l'élève. Après chaque indice, l'interviewer demandait à l'élève s'il voulait modifier sa réponse. L'interview se terminait lorsque l'élève percevait le caractère non-linéaire du problème et lorsqu'il donnait la bonne réponse. De cette façon, nous pouvions vérifier le degré de persistance de l'élève dans son choix du modèle linéaire. Ces indices n'ambitionnaient pas un trajet d'apprentissage, mais ils ne servaient qu'à détecter le processus de pensée de l'élève. Dans la figure 4, le déroulement de l'interview est représenté de façon schématique.

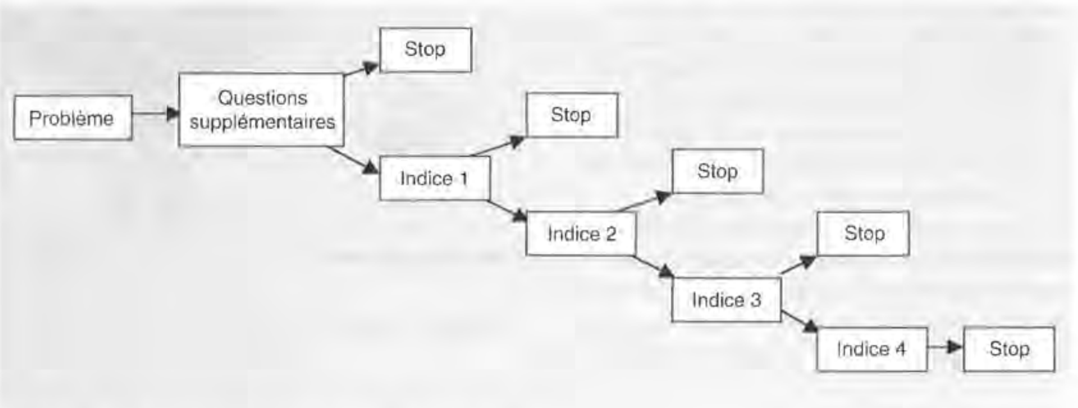

Figure 4: Schéma du déroulement de l'interview

Lorsque nous présentions le problème non-linéaire, tous les élèves (à deux près dans le groupe des plus âgés) ont donné la réponse linéaire. Dans la plupart des cas, ils trouvaient la réponse linéaire en calculant le rapport des hauteurs des Pères Noël et en raisonnant que ce rapport s'applique aussi à la quantité de peinture requise pour peindre ces figures (la hauteur est multipliée par trois, donc la quantité de peinture doit, elle aussi, être multipliée par trois). La plupart des élèves se montraient assez sûrs du bien-fondé de leur réponse : sur l'échelle à cinq niveaux, vingt élèves ont indiqué que leur réponse était « sûrement correcte », seize « probablement correcte » et les quatre qui restaient n'en avaient « aucune idée ». Par contre, il est apparu plus tard qu'ils avaient grande peine à expliquer et à justifier leur réponse. Pour eux, la réponse était évidente et une autre réponse était impensable.

Au total, quatre indices étaient prévus. Un *premier indice* était la confrontation de l'élève avec un tableau de fréquences, manipulé par nous, indiquant que des élèves fictifs avaient donné la réponse non linéaire aussi fréquemment que la linéaire (voir figure 5). Nous imaginions que ceci aurait semé le doute. De plus, les élèves ayant répondu de façon linéaire uniquement par distraction, auraient pu reconnaître dans le tableau la réponse correcte.

Réponse	Pourcentage d'élèves
18 ml	41 %
54 ml	41 %
Autres	18 %

Figure 5 : Tableau de fréquences fourni comme premier indice

Après la confrontation avec le tableau de fréquences, seulement deux élèves des 38 restants ont changé leur réponse linéaire pour la non linéaire. Les réactions de la plupart des autres élèves étaient superficielles (par exemple, des tentatives vaines d'obtenir le résultat alternatif en effectuant, de façon aléatoire, quelques opérations sur les trois nombres donnés). Grand nombre d'entre eux découvraient ainsi que l'autre solution s'obtient en multipliant la quantité de peinture par neuf (ou deux fois de suite par trois), mais ceci ne les faisait pas hésiter à la propre solution.

Comme *deuxième indice*, l'interviewer présentait l'argument d'un élève (fictif) en faveur de la solution non linéaire. Dans l'exemple, cet indice était formulé ainsi : « Un élève m'a expliqué que si le dessin de Père Noël est trois fois plus grand, alors non seulement la hauteur mais aussi la largeur est multipliée par trois. On a donc besoin de neuf fois plus de peinture et c'est pour cela qu'il a répondu 54 ml. »

Après cet indice, 14 des 36 élèves restants ont décidé de changer de réponse. Ils reconnaissaient qu'avant ils n'avaient pas vraiment essayé de se représenter le problème et qu'ils l'avaient résolu de façon irréfléchie et routinière. Mais même à ce moment, 22 élèves s'en sont tenus à leur réponse originale, quoiqu'ils ne puissent pas (bien) la justifier. Bien souvent, leur argumentation reposait sur une opinion très « scolaire » concernant la résolution de problèmes mathématiques. Ou alors, il s'avérait que les élèves ne comprenaient pas la signification précise de la similitude.

Comme *troisième indice*, on montrait la stratégie de résolution d'un élève fictif qui avait répondu correctement (de façon non linéaire). Cet élève fictif avait dessiné des rectangles autour du petit et du grand Père Noël. Ainsi, il avait remarqué que la figure ne devient pas seulement trois fois plus haute mais aussi trois fois plus large (voir figure 6).

Boulangerie Dufour **Supermarché Staes**

Figure 6 : Des rectangles fournis comme indice

La présentation de la stratégie de résolution a suscité dans neuf des 22 cas restants un véritable « Gestaltwechsel » [18]. Dès la présentation de cet indice, ils ont choisi directement, et convaincus, la solution non linéaire. Les treize élèves qui restaient s'en sont tenus à la réponse linéaire et ont exprimé des réflexions assez générales sur la façon dont, selon eux, les problèmes mathématiques doivent être abordés et sur le rôle (restreint) que les dessins peuvent jouer à leurs yeux.

Finalement, comme *quatrième indice*, on faisait le lien avec la mesure de l'aire. On leur demandait de calculer les aires des deux rectangles de la figure 6 et de les comparer. Pour tous ceux qui restaient encore après ce quatrième indice, l'interview était terminée.

Après ce quatrième indice, encore 5 élèves ont échangé leur réponse linéaire contre la non linéaire. Mais même après quatre indices (de force croissante), il y avait encore 8 élèves qui se tenaient à leur raisonnement initial linéaire. Ils répétaient surtout, et bien souvent avec emphase, leur opinion stéréotypée sur les mathématiques en général et sur la résolution de problèmes en particulier.

3.2 Deux exemples d'interviews

L'interview avec Pieter (12 ans)

L'interviewer montra a Pieter une fiche de travail énonçant le problème des Pères Noël (figure 3). L'interview se déroula comme ceci.

Pieter : [Lit l'énoncé à haute voix.] Euh, attendez, laissez-moi regarder les nombres... Ça y est, je vois, la hauteur change de 56 cm à 168 cm. Ce qui fait fois trois. Je dois donc multiplier la quantité de peinture également par trois. [Pieter dessine le schéma de la figure 7.] La réponse est 18 ml. Bart a besoin de 18 ml pour le grand Père Noël.

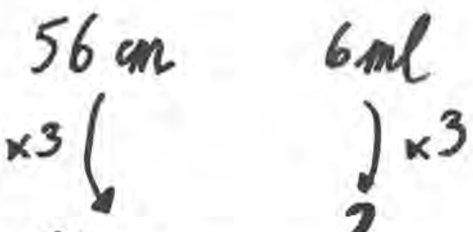

Figure 7 : Le schéma de résolution de Pieter

Interviewer : Pourquoi penses-tu que cette solution est bonne?

Pieter : [silence] Bien, euh... Je ne sais pas... C'est comme ça que je l'ai résolu.

Interviewer : Mais pourquoi as-tu multiplié par trois?

Pieter : Mais c'est logique. Comment faire autrement? Le Père Noël est *plus haut*, donc on a besoin de *plus* de peinture. Et il est *trois fois* plus haut, donc ... *trois fois* plus de peinture. C'est simple.

Interviewer : A quel point es-tu certain de ta réponse?

Pieter : J'en suis très certain. C'est un problème facile. J'ai utilisé les trois nombres et la formule, donc, forcément, c'est juste.

L'interviewer lui fournit le premier indice.

Interviewer : La semaine passée, on a donné ce même problème à des élèves d'une autre école. Leurs réponses sont dans le tableau (figure 5). 41 % des élèves de cette école ont aussi donné comme réponse 18 ml, mais il y a autant d'élèves qui ont répondu 54 ml. Pieter, que penses-tu de cette autre réponse? Et de la tienne? Veux-tu changer?

Pieter : [tout de suite] Non. C'est impossible. Je l'ai calculé et c'est 18 ml. Comment arrivent-ils à 54? Attendez, j'essaie. [Soustrait 54 de 168, essaie quelques combinaisons de 54, 168, 6 et +, -, · et :] Non, je ne vois pas. Ils ont multiplié *deux* fois par trois. Vous voyez, ils se sont trompés. Je reste à ma réponse.

Puisque Pieter se tenait à sa réponse linéaire, l'interviewer proposa le deuxième indice.

Interviewer : Un élève de l'autre école m'a expliqué comment il avait résolu le problème. Il disait que le grand Père Noël n'est pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture.

Pieter : Oh, mais cet élève s'appuie sur le dessin. Je n'ai pas regardé le dessin. Seulement le texte. Dans le texte, il n'y a que la *hauteur*.

Interviewer : Et si tu regardes le dessin ?

Pieter : 18 ml est toujours mieux. Cet élève rend les choses compliquées. Ma réponse est meilleure.

Alors, l'interviewer donna le troisième indice. Il montra les dessins de la figure 6 accompagnés des explications suivantes.

Interviewer : L'élève qui a multiplié par neuf avait dessiné d'abord des rectangles autour des Pères Noël. C'est ainsi qu'il a vu que la figure est trois fois plus grande dans les *deux directions* : en hauteur mais aussi en largeur. C'est pourquoi il faut neuf fois plus de peinture. Que penses-tu de cette solution ? Et de la tienne ? Laquelle préfères-tu ?

Pieter : Ça pourrait être une bonne solution, mais le problème ne dit rien sur la largeur. Ceci est dans le dessin, pas dans l'énoncé. Le problème traite de la hauteur.

Interviewer : Et que penses-tu de ces rectangles ?

Pieter : Ce qu'ils font avec les rectangles est correct : ceux-ci sont agrandis dans deux directions. Mais à l'intérieur des rectangles, il y a une figure irrégulière. C'est autre chose. Regardez ici, et ici ! [Pieter désigne les parties « vides » des rectangles.]

Finalement, le quatrième indice fut fourni.

Interviewer : Peux-tu calculer et comparer les aires des deux rectangles ?

Pieter : [Calcule.] Eh bien, celui-ci est neuf fois plus grand que celui-là.

Interviewer : Et si tu devais peindre la surface de ces rectangles ?

Pieter : [tout de suite] Alors il s'agit de peinture, pas d'aire. Vous rendez les choses trop difficiles. Les maths, c'est logique et multiplier par neuf, ici, n'est pas logique. Il est trois fois plus grand, donc il faut trois fois plus de peinture !

Ici se termina l'interview avec Pieter.

L'interview avec Karen (15 ans)

Karen fut placée devant le même problème des Pères Noël. L'interview se déroula ainsi.

Karen : [Lit le problème.] Ah, je vois. Il faut 6 ml pour 56 cm. Je peux donc calculer combien de peinture il faut pour 1 cm [divise 6 par 56 avec sa calculatrice]. Ça y est. Il faut 0,107 ml par cm. Après, je multiplie par 168 car le grand Père Noël mesure 168 cm. [Calcule.] Il faut 18 ml pour le grand Père Noël.

Interviewer : Pourquoi penses-tu que c'est la bonne solution ?

Karen : Eh... Ça marche, je ne sais pas pourquoi.

Interviewer : Et comment est-ce que ça marche ?

Karen : Il est facile de calculer combien de peinture il faut pour 1 cm. Donc il n'y a plus qu'à multiplier. On appelle ça la règle de trois. C'est tout ce que je peux dire la-dessus.

Interviewer : A quel point es-tu sûre de ta réponse ?

Karen : Je ne suis pas tout à fait sûre parce que je n'ai pas lu l'énoncé attentivement. Mais je crois que j'ai fait ce qu'on attendait de moi. J'ai utilisé les trois nombres et ça marche. Peut-être que j'ai fait une faute de calcul. Ça peut toujours arriver. Mais à mon avis c'est correct.

Puisque Karen avait donné une réponse linéaire, l'interviewer lui montra le tableau de fréquences et remarqua que les élèves de l'autre école ont donné aussi fréquemment comme réponse 54 ml. Karen réagit ainsi.

Karen : 54 ? Je pense que c'est trop. Je trouve ma réponse bien plus logique. D'ailleurs, il est toujours préférable de se tenir à sa première idée !

Interviewer : Un élève de l'autre école m'a dit que le Père Noël ne devient pas seulement trois fois plus haut, mais aussi trois fois plus large. Donc, il faut neuf fois plus de peinture. C'est pourquoi il a répondu 54 ml.

Karen : Non, je ne pense pas. Il est vrai qu'il devient trois fois plus haut et trois fois plus large. Mais ceci signifie, justement, que tout est multiplié par trois. Également la quantité de peinture. Elle est aussi multipliée par trois. 6 ml, c'est pour le Père Noël entier, pas seulement pour la hauteur. Et 18 ml, c'est pour le grand Père Noël entier. [Désigne successivement le petit et le grand Père Noël.] Cette aire entre trois fois dans cette aire, donc il faut trois fois plus de peinture.

Karen persistait donc à préférer la solution linéaire après le deuxième indice, donc on lui fournit le troisième indice : l'interviewer montra et commenta la stratégie avec les rectangles circonscrits. En regardant cette figure, Karen changea tout de suite de réponse.

Karen : Oh oui, maintenant je vois. En effet, il est neuf fois plus grand, parce que le petit rectangle entre aussi neuf fois dans le grand. Avec les rectangles, je comprends. Maintenant je suis sûre. C'est 54 ml.

Interviewer : Peux-tu expliquer pourquoi au début tu répondais 18 ml ?

Karen : Ma réponse paraissait logique : trois fois plus grand, trois fois plus de peinture... De plus, je n'avais regardé que le texte et j'ai tout de suite commencé à calculer. Si j'avais d'abord regardé les dessins, je l'aurais peut-être vu. Mais je ne m'étais rien représenté au sujet de ce problème ... seulement calculé.

Ici se termina l'interview avec Karen.

En guise de conclusion

Cette étude par interviews confirme la persistance du raisonnement linéaire à tort de la part des 12-16 ans lors de la résolution de problèmes de longueur et d'aire de figures géométriques. Presque tous les élèves sont partis d'emblée d'une relation linéaire (au lieu d'une relation quadratique) entre la longueur et l'aire. Même après avoir reçu des indices (forts), beaucoup d'élèves persistaient à préférer le modèle linéaire ou éprouvaient de grandes difficultés à apprécier à sa juste valeur le modèle alternatif.

Nous avons obtenu également des informations précieuses sur les processus de raisonnement à la base du raisonnement linéaire à tort des élèves. De façon globale, on peut distinguer quatre grandes catégories de tels processus de raisonnement. La prépondérance de chaque élément varie d'élève en élève, mais aussi, auprès du même élève, selon les différentes phases de l'interview.

Une première catégorie se réfère au caractère intuitif (au sens de Fischbein, [6]) du modèle linéaire : il possède un caractère d'évidence et il est utilisé de façon spontanée et presque inconsciente. C'est pourquoi les élèves ne ressentent aucun besoin de justifier leur choix de ce modèle. Les modèles intuitifs s'avèrent en outre très résistants à un enseignement formel visant à faire contrepoids. Les modèles non-linéaires sont ressentis par l'élève comme illogiques ou comme allant à l'encontre de l'intuition. On peut donc tracer une parallèle avec les « règles intuitives » comme décrites par Stavy et Tirosh [14]. Dans la recherche de ces auteurs, il apparaît que les élèves se font guider bien souvent par des règles intuitives communes lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes en mathématiques et en sciences. Deux règles reviennent fréquemment dans des tâches de comparaison : « plus de A - plus de B » et « même A - même B ». Dans le problème des Pères Noël, le raisonnement « plus de A - plus de B » est très naturel et correct (plus de hauteur correspond à plus d'aire / de peinture). Mais une réaction « même A - même B » est également possible et a été formulée presque littéralement dans certains cas (les deux Pères Noël ont la même forme, donc il faut multiplier tout par le même facteur).

Une deuxième catégorie est constituée par l'application consciente et voulue du modèle linéaire. Cette catégorie diffère de la première dans le sens que les élèves n'appliquent plus le modèle linéaire de façon intuitive, implicite ou automatique. Certains élèves paraissent vraiment convaincus du fait que tout accroissement est un accroissement linéaire. Ces élèves raisonnaient parfois de façon explicite que si la longueur et la largeur accroissent avec un facteur trois, l'aire augmente avec le même facteur. Pour cette conviction spécifique, le nom « d'illusion de la linéarité » est certainement à sa place : ces élèves sont convaincus que le modèle linéaire est le bon choix.

Troisièmement, cette étude par interviews fait apparaître certaines lacunes dans les connaissances géométriques des élèves (par exemple, la confusion entre l'aire et le volume ou le fait de ne pas reconnaître la quantité de peinture comme mesure indirecte de l'aire). Ces lacunes empêchaient les élèves de « découvrir » la faute dans leur raisonnement et de trouver la réponse correcte. En particulier, il est apparu que plusieurs élèves de 12-16 ans ont des problèmes avec les concepts de similitude et d'aire, surtout pour des figures irrégulières.

Quatrièmement, plusieurs élèves s'avèrent avoir des habitudes et des convictions inappropriées sur la résolution de problèmes mathématiques, comme : « il vaut mieux se baser sur des formules que sur des dessins ; il vaut mieux se tenir à sa première idée ; on ne peut utiliser que les informations mentionnées explicitement dans l'énoncé ; les problèmes mathématiques n'ont rien à voir avec la réalité ; pour la résolution d'un problème, on attend de l'élève qu'il effectue une ou quelques opérations standard. » Ces convictions sont sans doute un sous-produit de l'enseignement des mathématiques que les élèves ont reçu et des expériences scolaires qu'ils ont vécues en ce qui concerne les problèmes en mathématiques ([17]).

La combinaison de ces quatre éléments a entraîné la plupart des élèves à modeler le problème de façon superficielle et défectueuse.

Dans une phase ultérieure de notre recherche, nous voudrions vérifier comment on peut mieux équiper les élèves contre le piège de l'illusion linéaire. À cet effet, nous développons et évaluons en ce moment des cours, élaborés en tenant compte non seulement des résultats de nos études antérieures sur l'illusion de la linéarité, mais aussi de quelques principes plus généraux de l'enseignement « réaliste » des mathématiques (partir de contextes riches, construire le savoir sur les bases des connaissances et des stratégies informelles des élèves, ...).

Dirk De Bock, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven et EHSAL, Europese Hogeschool Brussel
Wim Van Dooren, Aspirant du Fonds voor Wetenschappelijk Onderzoek (FWO) de Flandres, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven
Dirk Janssens, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U.Leuven
Lieven Verschaffel, Centrum voor Instructiepsychologie en –Technologie (CIP&T), K.U.Leuven

Cet article est la traduction d'un manuscrit néerlandais préparé dans le cadre du projet de recherche « L'illusion de la linéarité : analyse et amélioration ». Ce projet est subventionné par le Conseil de Recherche de la K.U.Leuven (OT-2000-10). Les auteurs remercient cordialement Michel Roelens qui s'est chargé de la traduction française.

Bibliographie

[1] De Bock D., Het veld van de construeerbare reële getallen, *Wiskunde & Onderwijs*, 1983, 33, 47-60.

[2] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Première partie : circonstances et commentaires, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 120, 39-50.

[3] De Bock D., L'illusion de la linéarité. Deuxième partie : trois études dans l'enseignement secondaire, *Mathématique et Pédagogie*, 1999, 121, 30-45.

[4] De Bock D., *The illusion of linearity. An empirical analysis of secondary school students' improper proportional reasoning in geometry problems*, Doctoral dissertation, K.U.Leuven, 2002.

[5] Eggermont H., Gewichtige kabouters, *Uitwiskeling*, 1993, 9(3), 3-5.

[6] Fischbein E., *Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Reidel, 1987.

[7] Freudenthal H., *Didactical phenomenology of mathematical structures*, Dordrecht, Reidel, 1983.

[8] Galilei G., *Dialogues concerning two new sciences*, New York, Dover, 1954.

[9] Leinhardt G., Zaslavsky O. and Stein M.K., Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching, *Review of Educational Research*, 1990, 60(1), 1-64.

[10] National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston, VA, NCTM, 1989.

[11] Peltier M., Rouche N. et Manderick M., *Contremanuel de statistique et probabilité*, Bruxelles, Vie Ouvrière, 1982.

[12] Piaget J., *Epistémologie et psychologie de la fonction*, Dordrecht, Reidel, 1968.

[13] Poortvliet R. en Huygen W., *Leven en werken van de kabouter*, Bussum, Van Holkema & Warendorf , 1976. (Ce livre est traduit en français par Maddy Buysse : Huygen W. et Poortvliet R., Les gnomes, Paris, Albin Michel, 1992.)

[14] Stavy R. and Tirosh D., *How students (mis-)understand science and mathematics:* Intuitive rules, New York, Teachers College Press, 2000.

[15] Tierney C., Boyd C. and Davis G., Prospective primary teachers' conceptions of area, in G. Booker, P. Cobb and T.N. de Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2)*, Oaxtepex, Mexico, 1990, 307-314.

[16] Van Dooren W., De Bock D. et Verschaffel L., L'illusion de la linéarité parmi les élèves du secondaire : extension au calcul des probabilités, *Mathématique et Pédagogie*, en presse.

[17] Verschaffel L., Greer B. and De Corte E., *Making sense of word problems*, Lisse, The Netherlands, Swets & Zeitlinger, 2000.

[18] Wertheimer M., *Productive thinking*, New York, Harper & Brothers, 1945.

Adresse de correspondance :
Dirk DE BOCK
Centrum voor Instructiepsychologie en -Technologie (CIP&T)
Vesaliusstraat 2 – 3000 Leuven
dirk.debock@avl.kuleuven.ac.be