

NOTES DE LECTURE

POUR UNE CULTURE ACCESSIBLE À TOUS

Élaboration d'outils pédagogiques pour développer des compétences citoyennes

CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques)
B-1400 Nivelles. 2002
Michel Bailleu et Marie-France Guissard,
coordinateurs (format A4, 576 pages)

Un cinquième ouvrage de la collection *Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte*, de nos collègues du CREM, vient de paraître, dans l'esprit et l'ouverture des précédents¹, comme le signale toujours la remarque en page de titre: « Cet ouvrage a été conçu comme source d'idées et base de discussion. Souhaitons que personne n'en fasse un dogme ». Les auteurs, une douzaine d'enseignants de tous les degrés, ont réfléchi longuement à ce qui pourrait constituer une culture mathématique de base; ils cherchent à promouvoir des pratiques pédagogiques s'appuyant sur la vie quotidienne, l'histoire, l'art et le jeu, au travers d'une grande variété de thèmes.

La table des matières en donne un avant-goût :

I. Culture mathématique à partir de 5 ans

- La construction des nombres: dénombrer, compter, comparer, ordonner...
- Le passage de rang: les machines à compter, les bouliers
- À la découverte de notre numération: comparaison de systèmes de numération...

¹ Les ouvrages précédents ont été présentés dans les pages de Math-Ecole et sont disponibles auprès de sa boutique (Voir p. 3 de couverture): *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans* [1995], *Formes et mouvements, perspectives pour l'enseignement de la géométrie* [2001], *Construire et représenter, un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans* [2001], *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur* [2002].

Rencontre avec les symétries dans l'art africain: les enfants face à la symétrie, chercher des symétries, réalisation de *litema* (décorations murales qui s'inspirent de modèles géométriques traditionnels, dans l'Afrique de langue bantoue)

II. Culture mathématique à partir de 12 ans

- Mathémagiques (multiples et diviseurs composés de 0 et de 1, des problèmes magiques expliqués par l'algèbre ou par la numération de position)
- Produits remarquables (carré d'une somme, binômes conjugués)
- Découpages géométriques (Pythagore, la différence de deux carrés)
- À la découverte des pourcentages (si l'on apprenait à comparer, peut-on additionner des pourcentages? si l'on utilisait la touche % d'une calculatrice! des tableaux de proportionnalité aux calculs de pourcentages, des graphes fléchés pour résoudre des problèmes...)
- Pourcentages et traitement de données
- Des pavages aux polyèdres
- Frises ornamentales et groupes

III. Culture mathématique à partir de 15 ans

- Construire une table à la manière de Ptolémée
- Les équations du deuxième degré
- La diagonale du carré (la racine de deux est-elle une fraction? valeurs approchées de $\sqrt{2}$, racine approchée d'un nombre positif quelconque)

Ces trois premiers chapitres occupent les 500 premières pages de l'ouvrage. Ils proposent de multiples activités et de nombreuses fiches à photocopier pour faciliter le travail de l'enseignant qui aurait envie de s'y lancer. Chaque activité est présentée en quelques lignes aboutissant à une première rubrique: *De quoi s'agit-il?* Puis viennent les *Enjeux* qui décrivent les savoirs mathématiques et les compétences visées. Une troisième rubrique, *De quoi a-t-on besoin*, fournit la liste du matériel nécessaire. Vient ensuite la description

détaillée de l'activité, ponctuée d'indications pour la gestion – *Comment s'y prendre* – d'énoncés des questions à poser aux élèves, de descriptions des procédures d'élèves, d'observations à posteriori. Une rubrique, *Échos des classes*, donne des indications sur le déroulement de certaines activités d'une ou plusieurs classes qui les ont expérimentées : les réactions les plus communes mais aussi les plus significatives, même si elles sont isolées. Parfois, des *Prolongements possibles* proposent de nouvelles situations-problèmes comme variantes ou pour des élèves mordus. L'ouvrage se termine par un quatrième chapitre, *Aspects historiques et épistémologiques*, destiné aux enseignants qui veulent en savoir encore plus sur les origines et l'histoire des notions traitées précédemment. On y trouve en particulier des développements sur la science dans le monde arabe, des compléments sur l'évolution de la pensée algébrique,

une réflexion sur la nature de l'art de l'algèbre de l'Égypte à l'Occident, l'évolution de la géométrie, de ses débuts, au monde grec, puis aux géométries non euclidiennes et au programme d'Erlangen. Enfin, une vingtaine de pages sont consacrées au « défi de l'irrationalité » des Babyloniens à Newton.

En conclusion, un nouveau « pavé » pour promouvoir des pratiques pédagogiques s'appuyant sur la vie quotidienne, l'histoire, l'art et le jeu et pour alimenter une réflexion sur ce qui pourrait constituer une culture mathématique au sens le plus large du terme.

Destinataires : les maîtres de tous les niveaux, formateurs et didacticiens, personnes intéressées à une vision verticale de l'enseignement des mathématiques

Mots-clés : culture mathématique, mathématiques

F.J.

RMT ET ÉVALUATION

Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin de Mondorf-les-Bains (Luxembourg)

L. Grugnetti, F. Jaquet, J-P. Schmit (Eds). 2004. Éducation nationale Luxembourg, ARMT. Édition bilingue : français - italien, (200 p)

Après les *Profits pour la didactique*², *Évolution des connaissances et évaluation des savoirs mathématiques*³ et *Potentialités pour la classe et la formation*⁴, le quatrième volume des actes des rencontres internationales traite de l'évaluation, thème de la septième rencontre internationale sur le Rallye mathématique transalpin⁵,

Il est bien connu que, lorsqu'on parle d'évaluation, on pense en priorité à l'évaluation des élèves, qu'elle soit sommative, formative ou prédictive. Mais chacun sait que les épreuves du RMT s'adressent à des classes entières, que celles-ci s'organisent le plus souvent par groupes et que leurs résultats ne sont analysés que sur une seule feuille-réponse par problème. On ne peut donc imaginer évaluer à travers les protocoles reçus des compétences ou connaissances individuelles. Mais, en revanche, les protocoles donnent des informations très riches sur les problèmes proposés, les obstacles, la manière dont ils sont résolus, selon l'âge des élèves, selon leur contexte régional

2 Rencontres de Brigue, 1997 et 1999 (Voir p. 3 de couverture)

3 Rencontres de Siena, 1999, et Neuchâtel, 2000. (Voir p. 3 de couverture)

4 Rencontres de Parma, 2001, et Torre delle Stelle, 2002... (Voir p. 3 de couverture)

5 Mondorf-les-Bains, Luxembourg, 2004

ou national, ... En plus, les observateurs qui contrôlent la passation de l'épreuve, puis les maîtres, lors des exploitations en classe des problèmes après l'épreuve recueillent d'importantes informations complémentaires sur la manière dont les élèves s'organisent, sur les interactions au sein de la classe, ...

Les organisateurs de la rencontre avaient donc tenté un élargissement des domaines traditionnels du thème pour s'intéresser plus précisément à des évaluations plus spécifiques :

- celle des problèmes : savoirs mathématiques requis pour leur solution, caractéristiques de leurs énoncés, potentialités de discrimination des procédures de résolution, obstacles, variables didactiques...
- celle des stratégies ou procédures de résolution : efficacité, registre des représentations, analyse des erreurs, ... essentielle pour « l'évaluation formative »
- celle des justifications ou des validations, sur le plan du développement du groupe et sur le plan de l'attribution des points.
- celle des capacités de débat scientifique au sein des groupes ou entre groupes, ainsi que des capacités d'organisation de la classe.
- celle des épreuves du RMT en comparaison avec les enquêtes nationales et internationales actuelles et de leurs « retombées » sur les classes : élèves et enseignants.

Les sept communications publiées dans ces actes proposent des réflexions en relation avec les sous-thèmes proposés.

Roland Charnay, parle de *l'évaluation et ses pièges*. S'il reconnaît qu'il y a bien évaluation à travers l'attribution de points et le classement final ou, dans une autre direction à travers les observations qui peuvent être faites pendant le déroulement des épreuves ou au travers de l'analyse des productions des classes participantes, il se concentre plutôt sur l'importance de la signification (ou des significations) à donner au terme « compétence », avant de se demander si une compétence est évaluable et, dans l'affirmative, quelles compétences peuvent être évaluées

par l'intermédiaire des problèmes du RMT. Deux présentations étroitement liées, de Carlo Marchini, Angela Rizza, Vincenza Vannucci, Claudia Mazzoni, Daniela Medici et Maria Gabriella Rinaldi des sections de Lodi et de Parma, sont consacrées aux difficultés de l'attribution des points. L'une et l'autre rapportent les résultats d'une recherche (subdivisée selon les deux ordres scolaires : primaire et secondaire inférieur) développée à partir d'interrogations sur l'influence des pratiques issues du Rallye mathématique transalpin sur l'évaluation. Leur but étant de clarifier le rapport entre évaluation et attribution de points, résumant quelques aspects fondamentaux de la première et en la comparant avec la deuxième, spécifique du RMT.

La section de Siena, par la présentation de Carla Crociani, Lucia Doretti et Lucia Salomone met l'accent sur une évaluation des problèmes du Rallye du point de vue des registres de représentation utilisables et du passage de l'une à l'autre des différentes phases de l'activité de résolution : compréhension de l'énoncé, construction d'une représentation du problème, caractérisation, mise en acte et contrôle d'une stratégie déterminée. En particulier, l'intérêt est de considérer le rôle réservé aux capacités de lecture et aux représentations graphiques, de les interpréter et de représenter visuellement des concepts et des faits mathématiques (*perception et visualisation*).

Jean-Pierre Schmit, de la section du Luxembourg, pour aborder la problématique de l'auto-évaluation par des problèmes ouverts, analyse un exemple spécifique tiré d'un manuel de 6^e année d'école primaire.

Trois enseignantes d'école primaire, Clara Bisso et Marta Pretto, de la section de Gênes, et Catherine Dupuis de la section de Suisse romande, traitent, de manières diverses, le dernier des sous-thèmes décrits ci-dessus : évaluation des « retombées » du RMT sur les classes : élèves et enseignants.

En particulier, Clara Bisso et Marta Pretto ont recueilli les opinions des enseignants et élèves, selon quelques paramètres comme : la

retombée sur les maîtres et sur les élèves du point de vue des uns et des autres, exemplifiée par des citations extraites de textes en leurs possession.

Le matériel dont sont tirées les réflexions est constitué de considérations des enseignants qui ont participé avec leurs classes à une ou plusieurs éditions du rallye et de celles des élèves d'une classe de cinquième, au terme de leur participation durant trois ans d'école primaire.

Catherine Dupuis présente un exemple d'évaluation formative dans une classe de troisième année d'école primaire et montre comment elle peut insérer des problèmes du RMT dans une séquence pédagogique. Elle compare en particulier l'un de ces derniers à sa version remaniée proposée dans les moyens d'enseignement de Suisse romande, du point de vue de l'autonomie qu'offrent chacune des versions de ce problème.

Une rencontre du RMT n'est pas faite seulement de présentations, mais aussi de travaux de groupes.

Le premier thème était consacré à l'évaluation de la dynamique de la classe durant une épreuve du RMT. Lucia Grugnetti et François Jaquet présentent les résultats d'une observation de groupes d'élèves en résolution de problèmes lors des finales régionales du 11^e RMT, selon une grille préparée à cet effet et remplie par toutes les sections. L'analyse de ces résultats suscite de nombreuses réflexions sur la thématique complexe de la dynamique des groupes au sein de la classe. Les discussions par groupe qui ont suivi cette présentation ont permis de développer ces réflexions ont conduit à des propositions d'amélioration de la grille d'observation.

(L'ancienne et la nouvelle grille figurent en annexe, ainsi que le rapport d'un des groupes de travail, à titre d'exemple, pour montrer l'intérêt de l'observation du fonctionnement des groupes et l'ampleur des recherches à développer dans ce sens.)

Le second thème des travaux de groupes concernait le contrôle de la validité des

barèmes d'attribution des points, au travers de la « finale des finales » du 11^e RMT. Une fois de plus, les comparaisons des jugements des jurys internationaux avec ceux des correcteurs locaux de chaque section ont montré que la facette « attribution des points » de l'évaluation des copies produites par les élèves lors des épreuves du RMT est riche à plus d'un titre et que les critères élaborés dans les analyses a priori « tiennent le route ». Les résultats de cette « finale des finales », ainsi que les problèmes correspondants figurent dans cette dernière partie des actes.

La lecture de ces actes peut se faire, article par article, sans ordre imposé. Au travers de chacun d'eux, on glane quelques informations, quelques idées pour soutenir sa réflexion sur des aspects novateurs de l'évaluation, sans évidemment faire le tour de ce domaine d'une grande complexité. On constate aussi et surtout, une fois de plus, que le RMT fait office « d'interface » entre recherche en didactique et pratique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Dans ce cadre, il n'y a pas de hiérarchie, chacun s'y exprime et contribue à l'entreprise, selon ses intérêts et ses fonctions.

Destinataires : tous les maîtres, en particulier ceux des classes participant au RMT, formateurs et étudiants en didactique des mathématiques

Mots-clés : mathématiques, résolution de problèmes, évaluation, formation

F.J.

Cycle 1 à la maternelle

DÉCOUVRIR LE MONDE AVEC LES MATHÉMATIQUES

Situations pour la petite et la moyenne section

Dominique Valentin
Hatier, 2004 (152 pages + matériel reproductible)

Qu'est-ce que « faire des mathématiques » quand on a 3 ou 4 ans ? Est-il réellement possible d'en faire ? Comment les mathématiques peuvent-elles aider l'enfant à découvrir le monde, à grandir à s'interroger, à anticiper ? Cet ouvrage propose quelques réponses à ces questions en offrant un ensemble cohérent de situations qui amènent chaque enfant à chercher, à se poser des questions et à construire des connaissances nouvelles.

Le ton est donné et les conceptions de l'auteure sont donc très clairement annoncées. Voici encore quelques extraits de l'introduction :

Apprendre par la résolution de problèmes

Mon travail a donc consisté principalement à essayer de construire des situations qui doivent permettre à chaque enfant de construire des connaissances⁶ nouvelles comme solutions à des problèmes⁷.

C'est le cas, par exemple, de la situation « Des boîtes bien rangées » du chapitre 5 dans laquelle l'enfant est invité à ranger des boîtes gigognes dans une valise un peu plus grande que la plus grande des boîtes. Les boîtes sont présentées en vrac et aucune indication n'est donnée sur le fait qu'elles sont « gigognes », c'est-à-dire fabriquées pour « s'emboîter » très précisément les unes dans les autres, à condition de les organiser, de les ranger de la plus grande à la plus petite ou l'inverse... Parce que l'enfant se trouve devant un but à atteindre – mettre toutes les boîtes dans la valise – il va devoir prendre conscience de

l'importance des tailles relatives des boîtes. Ici, on n'a pas d'abord « enseigné » à l'élève la sériation ; de façon qui peut sembler paradoxale, on lui donne l'occasion de la faire fonctionner alors qu'il ne la « connaît » pas encore, de la découvrir et de l'utiliser comme le bon outil pour résoudre le problème. Plus tard, la sériation pourra devenir un objet d'étude, mais ce n'est pas le moment.

Pour d'autres problèmes, l'objectif de la situation n'est pas la construction de connaissances nouvelles mais l'élaboration de méthodes de recherche⁸, comme, par exemple, dans la situation « Les embouteillages » du premier chapitre.

Apprendre par imitation

Pourtant les enfants ne peuvent tout construire par eux-mêmes : ils peuvent et doivent profiter de l'expérience acquise par leurs aînés. Par exemple, ils n'inventeront pas le nom des nombres ! Ils les apprendront par la répétition, en entendant un camarade ou un adulte réciter la suite numérique. (...)

De même, lorsqu'un enfant a des difficultés à dénombrer⁹, il est important de bien repérer la nature de ses difficultés et de l'aider à les dépasser sans avoir toujours besoin de construire des situations spécifiques à cet effet. Par exemple, de nombreux enfants ont du mal à pointer efficacement les objets déjà dénombrés et les recomptent sans beaucoup de méthode. Nous avons choisi de leur montrer à séparer nettement les éléments déjà dénombrés de ceux qui ne le sont pas et

6 Les connaissances sont ainsi d'abord des « outils », souvent implicites, sans statut explicite de connaissance, avant de devenir de réels « objets » d'étude, désignés par un nom précis qui permet de communiquer à leur sujet et utilisables dans de nouveaux contextes.

7 « Un problème est une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions et d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation où la solution n'est pas disponible d'emblée mais est possible à construire.

8 Plus tard dans la scolarité, on parlera de « problème ouvert ».

9 cf. les Points clés p. 142 op. cit.

avons, évidemment, constaté que leurs progrès étaient alors très rapides.

Il n'est pas simple de distinguer ce qui nécessite une réelle problématisation pour prendre sens de ce qui peut simplement s'acquérir par imitation ; et je peux m'être trompée parfois malgré toutes les précautions prises. D'autre part, même quand on est convaincu qu'il faut une « bonne » situation-problème pour construire telle ou telle connaissance, il n'est pas toujours facile de la trouver !

Toutes ces citations montrent que cet ouvrage ne va pas être une simple énumération d'activités qu'on pourrait faire pour occuper de jeunes enfants, mais qu'on est en présence d'un projet équilibré et réfléchi dans ses conceptions de l'apprentissage. Et la suite ne le dément pas : l'ouvrage est bien structuré, d'une grande lisibilité, les propos sont clairs et riches, exprimés dans un langage accessible à tout un chacun.

Les situations d'apprentissage proposées se regroupent en 5 chapitres : apprendre à chercher, des quantités aux nombres (2 chapitres), observer pour comprendre, les grandeurs et leurs mesures.

Chaque chapitre est constitué de 5 à 8 situations subdivisées en plusieurs activités. En tête de chaque situation, les objectifs et le matériel nécessaire sont mis en évidence dans un encadré de couleur. Des conseils didactiques et des compte-rendus d'observations réalisées par l'auteure dans des classes de maternelle enrichissent les descriptifs de la mise en oeuvre conseillée pour les activités.

Du matériel reproductible complète le tout. En fin d'ouvrage, toujours rédigés dans un langage clair et proche de l'enseignant, les « points-clés » éclairent quelques sujets qui n'ont pas été explicités au cours des chapitres pour ne pas alourdir la lecture. Il ne s'agit pas de donner des définitions rigoureuses qui d'ailleurs n'existent pas toujours, mais d'indiquer le point de vue retenu dans cet ouvrage sur chaque rubrique.

Aide, essais-erreurs, évaluation, différenciation, jeu et apprentissage, situation, validation sont quelques exemples des « points-clés » que vous trouverez dans cette partie.

Avec une mise en page aérée, des photos noir-blanc et juste ce qu'il faut de couleur dans le texte, « Découvrir le monde avec les mathématiques » est un livre qui invite à la lecture. Parmi les nombreuses qualités de cet ouvrage, on citera encore l'originalité et la richesse des situations proposées, la simplicité du matériel utilisé et le fait qu'un même matériel serve à plusieurs activités.

Pour se faire une idée plus précise, nous reproduisons, dans les deux pages qui suivent, l'activité « Des boîtes bien rangées »

Destinataires : enseignants d'école maternelle et primaire, formateurs

Mots-clés : mathématiques, découverte du monde, situation, maternelle, évaluation, différenciation

M.S.

Situation 4

PETITE SECTION

Des boîtes bien rangées

MATÉRIEL

- les 12 boîtes dorées ou argentées
- une valise⁷ (30 cm sur 21 cm, h = 12 cm), pour l'activité 1
- une boîte en carton (23 cm sur 18 cm, h = 4 cm), pour l'activité 2

BUT À ATTEINDRE : Mettre toutes les boîtes dans la valise (ou tous les couvercles dans le carton) et pouvoir la (le) fermer.

Les dimensions de la valise et de la boîte en carton ont été choisies de manière à permettre un rangement approximatif mais tout de même assez contraignant : il n'est certes pas nécessaire de ranger les boîtes de la plus grande à la plus petite, mais il faut cependant qu'un grand nombre d'entre elles le soient. Plusieurs solutions sont ainsi possibles.



Atelier dirigé
de 3 ou 4 élèves

ACTIVITÉ 1 Ranger les boîtes sans les couvercles dans la valise

L'enseignant présente aux 4 enfants toutes les boîtes en vrac. Les enfants observent ces boîtes, les touchent, les mélangent librement. L'enseignant va alors chercher la valise et demande de ranger toutes les boîtes dans la valise qui doit pouvoir fermer. Chaque enfant, à son tour, essaie de tout ranger dans la valise.

La situation est reprise quelques jours plus tard, avec les enfants qui n'ont pas réussi à fermer la valise...

Pour éviter la simple imitation, il est possible de proposer successivement des contenants de tailles différentes aux enfants d'un même groupe, les dimensions de ces contenants étant de plus en plus contraignantes.

7. On peut obtenir une « valise » aux bonnes dimensions en découpant un carton de ramettes de papier (format A4). La hauteur est ramenée à 12 cm.



En atelier dirigé quelques jours plus tard

ACTIVITÉ 2 Ranger les couvercles dans la boîte en carton

Cette situation est proposée aux 3 ou 4 élèves qui sont parvenus à trouver une solution au premier problème.

On passe de la valise à la boîte en carton et on remplace les boîtes par les couvercles. Ici tous les couvercles, sauf un ou deux, doivent être ordonnés et rangés les uns dans les autres pour que la boîte puisse fermer.



Travail individuel échelonné dans le temps

ACTIVITÉ 3 Problèmes de rangement individuels

La situation est reprise **individuellement** pour permettre à chaque enfant de résoudre seul le problème de rangement. Il est demandé à certains enfants de ranger les boîtes dans la valise, à d'autres de ranger les couvercles dans la boîte en carton, ce qui permet de tenir compte des difficultés rencontrées par les enfants dans la recherche en groupe.

De nouveaux contenants autres que la valise ou la boîte en carton peuvent être proposés de manière à éviter les imitations. Il faut alors en choisir les dimensions avec soin.

L'enseignant n'est pas nécessairement présent pendant la recherche de chaque enfant (il l'est toutefois avec ceux qui peuvent avoir besoin de lui, ne serait-ce que pour aller au bout de la tâche), mais il vérifie avec chaque enfant, à la fin de la recherche ou avec à un autre moment si nécessaire, le rangement effectué.



Travail individuel

ACTIVITÉ 4 Ranger toutes les boîtes dans la plus grande

Après quelques semaines, l'enseignant dispose toutes les boîtes sans les couvercles sur la table, tailles mélangées. Chaque élève doit ranger seul toutes les boîtes dans la plus grande.

Nous n'avons pas proposé ce rangement en situation d'apprentissage car elle nous semble très inductrice de la sériation. Elle permet un réinvestissement individuel.

Les enquêtes ou évaluations à grande échelle quels profits pour les enseignants ?

C'était le thème de la « *table ronde* » organisée à Neuchâtel, le 1 décembre 2004, en collaboration entre la HEP Bejune et l'Association *Math-Ecole* (A.M.E.), repris de l'éditorial de notre numéro 212.

La place nous manque ici pour rendre compte de cette manifestation intéressante. Nous y reviendrons amplement dans le prochain numéro, en publiant les textes des interventions de N. Guignard et C. Tièche Christinat sur une comparaison entre *Mathéval* et *PISA*, de F. Jaquet sur une comparaison entre *RMT* et *PISA* ainsi que les propos d'introduction de M. Bréchet.