SOLUTIONS DES CRYPTA-RITHMES DU NUMÉRO 212

Nous disions, en présentant les cryptarithmes de l'article précédent, que leur intérêt est évident au niveau de la logique, des algorithmes de calcul et de notre système de numérations décimal. Qu'on en juge :

a)[1]

$$\begin{array}{rccccccc} & & M & A & N & G & E & R \\ + & & M & A & N & G & E & R \\ \hline & G & R & O & S & S & I & R \end{array}$$

G = 1 Il n'y a qu'une seule possibilité car la somme de deux nombres naturels d'un seul chiffre (M et M) ne peut dépasser 18.

R = 0 Tiré de l'égalité de la colonne des unités : **R** + **R** = **R** (ou en cas de retenue, **R** + **R** = 10 + **R** ou **R** = 10, ce qui n'est pas possible puisque R est un nombre naturel de 0 à 9)

M = 5 Tiré de de **M** + **M** = 10, dans la colonne des centaines de milliers. On en tire qu'il n'y aura pas de retenue issue de la colonne des dizaines de milliers, ce qui signifie que **A** + **A** < 10 ou **A** + **A** + 1 < 10 et donc que **A** < 5.

S = 2 Dans la colonne des centaines, on constate que **S** = 1 + 1 = 2 si **E** + **E** < 10 (sans retenue) ou que **S** = 1 + 1 + 1 = 3 si **E** + **E** ≥ 10 (avec retenue). Mais, dans la colonne des milliers, **S** = 3 est à exclure car il n'y a pas d'apport d'une retenue et que la somme N + N est un nombre pair. On retient en conclusion que **S** = 2 et que **E** < 5.

N = 6 Dans la colonne des milliers, **N** + **N** = 1 + 1 = 2 est à exclure car le « 1 » est déjà pris. Il faut choisir l'autre double qui se termine par 2 : 6 + 6 = 12.

Comme **A** et **E** sont inférieurs à 5, il n'y a plus que « 3 » et « 4 » de disponibles pour ces deux lettres, ce qui conduit à deux possibilités.

La première convient : **A** = 3 et **E** = 4 => **O** = 7 et **I** = 8.

La seconde : **A** = 4 et **E** = 3 = > **O** = 9 et **I** = 6 est à éliminer en raison du « 6 » déjà affecté à la lettre N.

Il n'y a donc qu'une solution à ce cryptarithme : 536140 + 536140 = 1072280

Le procédure de résolution présentée ici n'est évidemment pas la seule possible. On peut aussi trouver la valeur de certaines lettres sans recherche organisée, où le hasard et le « flair » interviennent de manière prépondérante. Mais, qu'on travaille de manière systématique ou non, les propriétés de l'algorithme d'addition et de notre système de numération émergent clairement, en particulier les retenues lors du passage d'un groupement au suivant.

Pour des élèves, voire des adultes, il y a de fortes chances que toutes ces propriétés n'aient pas été perçues clairement précédemment, enfouies sous les mécanismes de l'algorithme. Il paraît donc intéressant, lorsque des cryptarihmes de ce genre sont proposés en classe, de demander une explication de la méthode adoptée pour les résoudre, même si on ne peut pas s'attendre à des justifications toujours exhaustives.

Math-Ecole propose à ses lecteurs de soumettre ce cryptarithme à leurs élèves, dès la quatrième année ou la cinquième année d'école primaire - en leur demandant d'expliquer comment ils ont procédé - et de lui communiquer ces protocoles de résolution, afin de les publier

1 tiré du *Kangourou des Mathématiques*
2 création Bernard Lamirel

b)[2]

$$\begin{array}{r} \mathbf{R\ E\ P\ A\ S} \\ +\ \mathbf{R\ E\ P\ O\ S} \\ \hline \mathbf{S\ A\ N\ T\ E} \end{array}$$

Dans ce cryptarithme, il n'y a pas de valeurs obligées de l'une ou l'autre des lettres, comme dans l'exemple précédent. Une première analyse permet toutefois d'affirmer que **R** < 5 et que **E** est un nombre impair. La triple présence du **S** et du **E**, incite aussi à commencer la recherche en émettant des hypothèses sur la valeur de ces lettres, qui, on le découvre rapidement, vont déboucher sur une chaîne d'implications : pour chaque valeur de **E**, il n'y a que deux possibilités au maximum pour **S**, ce qui entraîne un nombre restreint de valeurs de **R** et de **A**, puis de **O** et **T** et enfin de **P** et **N**. On peut ainsi organiser la recherche systématiquement en sachant qu'il y a 5 nombres pairs pour **E** :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**
0	0	imp.					
	5						
2	1						
	6						
4	2						
	7						
6	3						
	8						
8	4						
	9						

Il reste 9 couples possibles (**E** ; **S**) pour la suite de la recherche. Lorsqu'on examine les solutions correspondantes pour les deux lettres suivantes, de nombreuses combinaisons s'éliminent :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**
0	5	imp.					
2	1	imp.					
	6	3	4				
			5				
4	2	1	8				
			9				
	7	imp.					
6	3	1	2				
			3	imp.			
	8	imp.					
8	4	imp.					
	9	4	6				
			7				

On arrive ainsi à ne retenir que 7 combinaisons des quatre lettres **E, S, R, A**.
L'examen des couples (**O** ;**T**) de la colonne des dizaines va tenir compte de l'existence ou de la non-existence d'une retenue issue de la colonne des unités et des possibilités restantes pour **P** et **N**, compte tenu des valeurs déjà attribuées. Par exemple, pour la première des 7 combinaisons envisageables, il s'agit de compléter l'addition lacunaire

$$\begin{array}{rccccc} & 3 & 2 & \mathbf{P} & 4 & 6 \\ + & 3 & 2 & \mathbf{P} & 0 & 6 \\ \hline & 6 & 4 & \mathrm{N} & \mathrm{T} & 2 \end{array}$$

en attribuant au couple (O ;T) toutes les valeurs, de (0 ; 5) à (9 ; 4), dont les deux termes sont différents de 2, 3, 4 et 6 (déjà utilisés), puis de voir, pour chaque cas retenu, s'il existe une possibilité pour le couple (P ;N). On obtient alors le tableau complet :

E	**S**	**R**	**A**	**O**	**T**	**N**	**P**	
E	S	R	A	O	T	N	P	
2	6	3	4	0	5	imp.		
				5	0	imp.		
			5	1	7	9	8	(1)
				4	0	8	7	(2)
4	2	1	8	5	3	imp.		
			9	8	7	6	3	(3)
				6	5	8	7	(4)
				7	6	imp.		
				8	7	6	3	(5)
6	3	1	2	5	7	4	8	(6)
				7	9	4	8	(7)
				8	0	4	9	(8)
8	9	4	6	0	7	1	2	(9)
				3	0	2	5	(10)
				5	2	0	1	(11)
						1	3	(12)
						3	7	(13)
			7	2	0	5	1	(14)
						6	3	(15)
				3	1	imp.		
				5	3	imp.		

Pour établir ce dernier inventaire, il n'y a pas de miracle ! Il faut une feuille de papier, un crayon et une gomme pour écrire les essais

successifs des couples (**O** ; **T**) puis (**P** ; **N**), et il y a malgré tout de nombreuses possibilités d'oublis ou de chiffres pris deux fois.
Les 15 solutions trouvées ici (le lecteur vérifiera) sont :

(1)	32956 + 32916 = 65872
(2)	32856 + 32846 = 65702
(3)	14692 + 14682 = 29374
(4)	14892 + 14862 = 29754
(5)	14692 + 14682 = 29374
(6)	16423 + 16453 = 32876
(7)	16423 + 16473 = 32896
(8)	16423 + 16483 = 32906
(9)	48169 + 48109 = 96278
(10)	48269 + 48239 = 96508
(11)	48069 + 48059 = 96128
(12)	48169 + 42159 = 96328
(13)	48369 + 42359 = 96728
(14)	48579 + 48529 = 97108
(15)	48679 + 48629 = 97308

Ce cryptarithme paraît adapté à des élèves de l'école secondaire, en recherche collective dès qu'une méthode systématique a été établie et que le travail peut donc se répartir efficacement.

c)[3]

$$\begin{array}{rcccccc} & & \mathbf{T} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ + & \mathbf{A} & \mathbf{L} & \mathbf{C} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{L} \\ \hline & \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{N} & \mathbf{C} & \mathbf{E} & \mathbf{R} \end{array}$$

Voici un plat de résistance. Comme les lettres **A** et **C** apparaissent chacune quatre fois, il semble naturel de commencer par elles, d'autant plus que **C** = **A** + 1, selon la colonne de gauche.

Il y a neuf couples (**A**;**C**) possibles, de (1 ;2) à (8 ;9) . Pour chacun d'eux, il n'y a qu'une ou deux valeurs de N (colonne des milliers). Les couples (**L**;**T**) sont rares aussi et la valeur de R est alors entièrement déterminée.

Par exemple, en choisissant (1 ;2) pour le couple (**A**;**C**), on n'obtient que les quatre combinaisons suivantes des valeurs des six premières lettres, dont une seule aboutit à une solution :

A	**C**	**N**	**L**	**T**	**R**	**O**	**B**	**E**
1	2	3	-	-	-	imp.		
		4	5	6	7	imp.		
		4	6	5	8	imp.		
		4	8	3	0	7	5	9
		4	3	8	5	imp.		

solution : 31512 + 182778 = 214290.

Nous laissons le lecteur chercher les autres solutions, avec les 7 autres couples (**A**;**C**).

Là aussi, la résolution de ce cryptarithme fait appel aux propriétés de l'algorithme d'addition et de notre système de position décimal. Elle demande en outre une grande rigueur dans l'organisation des essais, de la patience et de nombreux contrôles, propres d'une démarche scientifique complète.

3 création Bernard Lamirel